第 59 卷 第 4 期 2010 年 4 月
1000-3290/2010/59(04)/2187-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 4, April, 2010
©2010 Chin. Phys. Soc.

双势阱中冷原子的关联隧穿*

曹 辉† 赵 清

(北京理工大学理学院物理系,北京 100081)

(2009 年 6 月 13 日收到;2009 年 7 月 26 日收到修改稿)

研究了在不同的相互作用和隧穿耦合强度比值情况下双势阱中冷原子的隧穿现象. 两格点 Bose-Hubbard 模型不能完全解释实验. 为此,对此模型做了高阶修正. 取双势阱的基态和第一激发态作基矢,写出哈密顿量的表示,解释了用两格点 Bose-Hubbard 模型分析实验时参数不能定量符合的原因. 另外,通过计算两阱中原子纠缠度的变化,结合三态上原子布居数分布,直观描述了整个隧穿过程.

关键词: 关联隧穿, 强相互作用, 弱相互作用, 纠缠度

PACC: 0365, 3280P, 7335C

1. 引 言

原子的激光冷却是上世纪末最活跃的研究领域之一. 1997 年, Cohen-Tannoudji[1], Chu[2] 和 Phillips[3] 三人因对此领域的贡献而荣获诺贝尔物理学奖. 通过与激光相互作用,原子温度可由室温冷却到几 mK,由于这时 de Broglie 波长和原子间的长度可比拟,原子的物质波特性开始显露出来,由此可观察到新的物理现象,如 Bose-Einstein 凝聚[4—6]等,并使得物质波干涉等实验能够进行. 现在由激光冷却得到的冷原子以及激光对原子的操纵作用已经成为很多实验的基础,在超高分辨光谱、量子频标、固体表面特性、原子反射、原子衍射、原子干涉、Bose-Einstein 实验等方面都发挥着重要的作用[7—14].

2007 年 8 月,德国科学家 Fölling 等[15] 报道了他们直接观察到二阶原子隧穿的工作. 这一工作引起了对冷原子隧穿现象的广泛关注. 他们发现,在原子间相互作用较弱,隧穿耦合占主要地位时,单个原子能够独立隧穿. 而存在强的斥力相互作用时,位于势垒一侧的两个原子难以分开,实验发现它们在一个二阶共同隧穿过程中成对隧穿. 他们通过记录随时间变化的原子位置和相位相干性描述了强弱相互作用下的单原子隧穿及双原子关联隧穿.

本文先利用两格点 Bose-Hubbard 模型研究在不同的相互作用(U)和隧穿耦合(J)强度比值情况下冷原子的隧穿现象,计算了单、双原子隧穿过程中双势阱左右两阱中原子的布居数(用平均位置体现),并对比实验结果作了讨论. 随后对两格点 Bose-Hubbard 模型做了高阶修正. 取双势阱的基态和第一激发态作基矢,写出了 Hamilton 量的表示式,进而求得此表示下单、双原子隧穿时两阱中原子的布居数变化,并讨论了新模型的优势. 另外,计算了两阱中原子纠缠度的变化,结合三态上的布居数分布,直观描述了整个隧穿过程.

2. 两格点 Bose-Hubbard 模型

考虑紧束缚近似,忽略双势阱左右阱原子间的相互作用,则相互作用的 Bose 子可以由双模 Bose-Hubbard Hamilton 量来描述[16],

$$H = -J(\hat{a}_{\mathrm{L}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{R}} + \hat{a}_{\mathrm{R}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{L}}) - \frac{1}{2}\Delta(\hat{n}_{\mathrm{L}} - \hat{n}_{\mathrm{R}}) + \frac{1}{2}U(\hat{n}_{\mathrm{L}}(\hat{n}_{\mathrm{L}} - 1) + \hat{n}_{\mathrm{R}}(\hat{n}_{\mathrm{R}} - 1)), \quad (1)$$

其中, $J = \int \phi_{\mathrm{L}}^{*}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\mathrm{ext}}\right)\phi_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是左右阱间的

* 国家自然科学基金(批准号:10604009, 50935001)和国家重点基础研究发展计划(批准号:2006CB921400)资助的课题.

† E-mail: stanley_1012@163.com

隧穿矩阵元，ϕ_L，ϕ_R 分别为原子处于左、右阱时的波函数，V_{ext} 为激光产生的光晶格势，m 为双阱中原子的质量. $U = g\int|\phi_{L,R}|^4 d\boldsymbol{r}$ 为处于同一阱中的两原子间相互作用能，其中 $g = 4\pi a_s\hbar^2/m$，a_s 为正散射长度. $\hat{a}^\dagger_{L,R}$ 和 $\hat{a}_{L,R}$ 分别为左、右阱中 Bose 子基态的产生、湮没算符，Δ 为两阱势能差. 算符 $\hat{n}_L$，$\hat{n}_R$ 分别代表左、右模式中的原子数. 在紧束缚近似下，原子的量子态可用 Fock 态基矢表示，其中，$\hat{n}_L$，$\hat{n}_R$ 均为非负整数. 对于单原子来说，两个态 $|1,0\rangle$ 和 $|0,1\rangle$ 由隧穿矩阵元耦合. 对于双原子来说，原子间的相互作用会导致单原子隧穿发生失谐，当原子间相互作用远大于隧穿耦合时，单原子跃迁被抑制. 然而，势阱对称的情况下（$\Delta = 0$），$|0,2\rangle$ 态和 $|2,0\rangle$ 态的能量总相等，这两态的直接跃迁仍是共振的，这个过程对应双原子成对隧穿.

为表征原子布居数随时间的变化，定义平均位置为

$$\langle x\rangle = (N_R - N_L)/(N_L + N_R), \tag{2}$$

其中，N_L，N_R 分别为左、右阱中原子总数，平均位置表示相对于中间势垒的位置，单位为 $d/2$，其中 d 为两阱之间的间隔.

在三态描述下，任意给定一组双阱参数 U，J，Δ，原子对的时间演化可由（1）式中的 Hamilton 量计算得到. 问题归结为计算如下 Schrödinger 方程：

$$i\hbar\frac{d|\Psi\rangle}{dt} = H|\Psi\rangle. \tag{3}$$

$\Delta = 0$ 时，可将（1）式中的 Hamilton 量对角化. $\Delta \neq 0$，可运用数值方法对上述方程求解. 在三态描述下，体系的波函数可表示为

$$|\Psi\rangle = C_0|0,2\rangle + C_1|1,1\rangle + C_2|2,0\rangle. \tag{4}$$

则平均位置为

$$\langle x\rangle = |C_0|^2 - |C_2|^2. \tag{5}$$

此处考虑初态为 $|2,0\rangle$ 的情况，即 $C_0(0) = 0$，$C_1(0) = 0$，$C_2(0) = 1$，易得平均位置随时间演化如图 1 所示. 图 1 给出了双势阱中间势垒分别为 $V_s = 5.5E_r$（$J/U \approx 1.5$）和 $11.1E_r$（$J/U \approx 0.2$）时的情况（$E_r = h^2/2m\lambda^2$ 为反冲能量，其中 m 为原子质量，$\lambda = 765$ nm 为短晶格波长）.

图 1（a）为相互作用较弱时的平均位置图像，图 1（b）为相互作用较强时的图像. 图中的圆点为文献［15］中实验所得数据，由上图可知，两格点 Bose-Hubbard 模型不能完全解释实验结果. 在相互作用较弱时，根据两格点 Bose-Hubbard 得到的结果与实验结果相差较大；在相互作用较强时，两格点 Bose-Hubbard 模型得到的结果与实验符合较好.

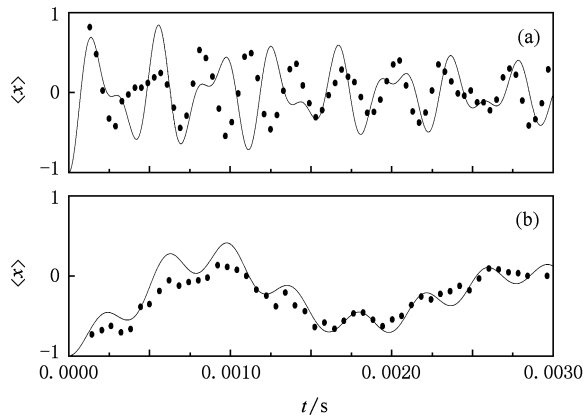

图 1 平均位置随时间演化图像 （a）$V_s = 5.5E_r$，$J/U \approx 1.5$，（b）$V_s = 11.1E_r$，$J/U \approx 0.2$

3. 两格点 Bose-Hubbard 模型的高阶修正

在上面的模型中，取单原子处于左、右阱中的波函数作为基矢，但实际上，这样的基矢取法是存在问题的. 严格来说，这两个波函数并不正交. 当双阱中间势垒较高，原子间相互作用较强时，两阱中的波函数重叠极少，此时，用此模型没有很大偏差；但当双阱中间势垒较低，原子间相互作用较弱时，两阱中的波函数重叠加大，两波函数不是正交的，不能直接用它们作为基矢，对整个系统的波函数进行展开. 此时，把双势阱整体看作一个特殊的势阱处理，ϕ_0 和 ϕ_1 分别为其基态和第一激发态的波函数，以这两波函数作为基矢，由它们的线性组合来表示原子处于左右阱时的波函数，能够得到更合理的结果[17—20]

$$\phi_L = \frac{\phi_0 - \phi_1}{\sqrt{2}},\qquad \phi_R = \frac{\phi_0 + \phi_1}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

此时，把

$$\hat{\Psi} = \phi_0\hat{b}_0 + \phi_1\hat{b}_1 \tag{7}$$

代入两体相互作用 Hamilton 量

$$\hat{H} = \int\hat{\Psi}^\dagger(r)H_0\hat{\Psi}(r)dr + \frac{1}{2}\iint\hat{\Psi}^\dagger(r)\hat{\Psi}^\dagger(r')V(r,r')$$

$$\times \hat{\Psi}(r)\hat{\Psi}(r')\mathrm{d}r\mathrm{d}r' \tag{8}$$

其中

$$V(r,r') = g\delta(r-r'). \tag{9}$$

且相应地取

$$\hat{b}_0 = \frac{\hat{a}_\mathrm{L}+\hat{a}_\mathrm{R}}{\sqrt{2}},$$
$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{a}_\mathrm{R}-\hat{a}_\mathrm{L}}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

由此，可得

$$\begin{aligned}\hat{H} = &-\frac{1}{2}\Delta(\hat{n}_\mathrm{L}-\hat{n}_\mathrm{R}) - J(\hat{a}_\mathrm{L}^\dagger\hat{a}_\mathrm{R}+\hat{a}_\mathrm{R}^\dagger\hat{a}_\mathrm{L}) \\ &+\frac{1}{2}U(\hat{n}_\mathrm{L}(\hat{n}_\mathrm{L}-1)+\hat{n}_\mathrm{R}(\hat{n}_\mathrm{R}-1)) \\ &+2U_\mathrm{LR}\hat{n}_\mathrm{L}\hat{n}_\mathrm{R}+\frac{1}{2}U_\mathrm{LR}(\hat{a}_\mathrm{L}^\dagger\hat{a}_\mathrm{L}^\dagger\hat{a}_\mathrm{R}\hat{a}_\mathrm{R}+\hat{a}_\mathrm{R}^\dagger\hat{a}_\mathrm{R}^\dagger\hat{a}_\mathrm{L}\hat{a}_\mathrm{L}) \\ &+(-\Delta J)(\hat{a}_\mathrm{L}^\dagger\hat{a}_\mathrm{L}^\dagger\hat{a}_\mathrm{L}\hat{a}_\mathrm{R}+\hat{a}_\mathrm{L}^\dagger\hat{a}_\mathrm{R}^\dagger\hat{a}_\mathrm{L}\hat{a}_\mathrm{L} \\ &+\hat{a}_\mathrm{R}^\dagger\hat{a}_\mathrm{R}^\dagger\hat{a}_\mathrm{R}\hat{a}_\mathrm{L}+\hat{a}_\mathrm{R}^\dagger\hat{a}_\mathrm{L}^\dagger\hat{a}_\mathrm{R}\hat{a}_\mathrm{R}).\end{aligned} \tag{11}$$

在本文中的三态描述下，上述哈密顿量可写作如下形式：

$$\begin{aligned}\hat{H} = &-\frac{1}{2}\Delta(\hat{n}_\mathrm{L}-\hat{n}_\mathrm{R}) - J'(\hat{a}_\mathrm{L}^\dagger\hat{a}_\mathrm{R}+\hat{a}_\mathrm{R}^\dagger\hat{a}_\mathrm{L}) + 2U_\mathrm{LR}\hat{n}_\mathrm{L}\hat{n}_\mathrm{R} \\ &+\frac{1}{2}U(\hat{n}_\mathrm{L}(\hat{n}_\mathrm{L}-1)+\hat{n}_\mathrm{R}(\hat{n}_\mathrm{R}-1)) \\ &+\frac{1}{2}U_\mathrm{LR}(\hat{a}_\mathrm{L}^\dagger\hat{a}_\mathrm{L}^\dagger\hat{a}_\mathrm{R}\hat{a}_\mathrm{R}+\hat{a}_\mathrm{R}^\dagger\hat{a}_\mathrm{R}^\dagger\hat{a}_\mathrm{L}\hat{a}_\mathrm{L}),\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}J' &= J+\Delta J, \\ \Delta J &= -g\int\phi_\mathrm{L}^3\phi_\mathrm{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \\ U_\mathrm{LR} &= g\int\phi_\mathrm{L}^2\phi_\mathrm{R}^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}.\end{aligned} \tag{13}$$

实际上，J 应由(13)式中给出的 J' 代替. 这正好解释了隧穿矩阵元的实验结果与理论值之间存在的 3%—10% 的偏差[15]. 在两格点 Bose-Hubbard 模型中，类似 $\int\phi_\mathrm{L}^m\phi_\mathrm{R}^n\mathrm{d}\boldsymbol{r}(m,n\geqslant 1, m=4-n)$ 的项被忽略掉，从而理论结果与实验结果出现了偏差. 而在此部分，我们选定 ϕ_0 和 ϕ_1 作为基矢，且保留了这样的高阶项. 由此，我们可以得到更好的结果. 图 2 给出了修正后得到的结果，图 2 中的圆点是与图 1 中相同的实验数据点. 比较图 1 与图 2 可知，在相互作用较弱时，修正的作用极明显；在相互作用较强时，修正的作用较小. 由上述可知，两格点 Bose-Hubbard 模型适应与否，与隧穿耦合和相互作用强度比值关系有密切关系. 只有当原子间相互作用相对较强时，两阱中的波函数重叠极少，用两格点 Bose-Hubbard 模型能得到理想的结果. 而当隧穿耦合相对较弱时，两阱中的波函数重叠加大，两格点 Bose-Hubbard 模型变得不再适用. 修正后模型不受此限制，有更广泛的适用性，显示出明显的优势.

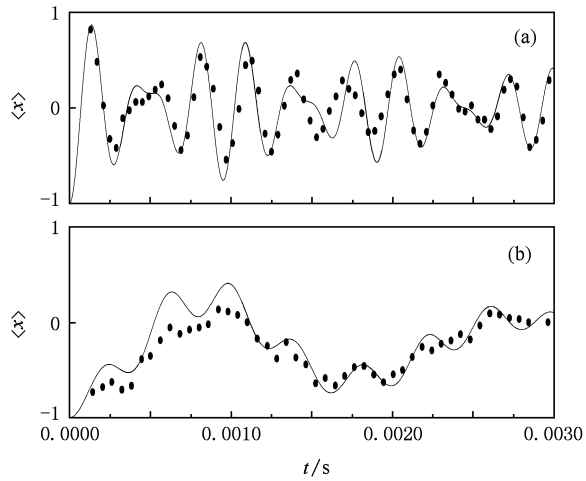

图 2　模型修正后的平均位置随时间演化(曲线为模型修正后得到的结果，圆点为实验数据点)　(a) $V_\mathrm{s}=5.5\ E_\mathrm{r}, J/U\approx 1.5$，(b) $V_\mathrm{s}=11.1E_\mathrm{r}, J/U\approx 0.2$

4. 隧穿的直观描述

下面我们通过纠缠度的变化来描述关联隧穿过程. 对(4)式中给出的波函数，纠缠度采用如下定义[21—24]：

$$P_\mathrm{E} = 2\left|C_0C_2-\frac{C_1^2}{2}\right|. \tag{14}$$

然后结合纠缠度的演化分别解释强弱相互作用下发生的隧穿过程.

4.1. 弱相互作用

由图 3 可知，初始时刻($t=0$)，所有原子位于左阱(平均位置为 −1)，原子处于$|2,0\rangle$态，显然纠缠度为 0.0—0.14 ms 过程，平均位置由 −1 到 1，完成一个由$|2,0\rangle$到$|0,2\rangle$的跃迁，但是此两原子隧穿的主要过程并非关联隧穿. 由三态上的布居数分布可以得到此过程由两个单原子隧穿组成，$|1,1\rangle$态上的布居数正好变化一个周期，两个原子先后发生隧穿. 在 0.14 ms 处，原子已大部分转移到$|0,2\rangle$态，此时，$|1,1\rangle$态布居数为 0，$|2,0\rangle$态仅含有少量原子，纠缠度出现一个较小峰值. 0.14—0.28 ms 这段过

程,部分原子由|0,2〉转移到|2,0〉态,纠缠度峰值逐渐增大,两原子逐步建立起关联,关联隧穿逐渐显现出影响.0.28—0.42 ms,纠缠进一步加强.在约0.42 ms时,|1,1〉态上布居数为0,此时系统态为|2,0〉+|0,2〉,纠缠度最大,接近于1.实际上,由纠缠度定义易知,|1,1〉态和|2,0〉+|0,2〉态均为纠缠度最大($P_E = 1$)的态.此隧穿过程实际为这两种态相互竞争的过程,由此容易理解,|1,1〉态上布居数为最大值0.5及最小值0时,纠缠度都取得极大值的原因.

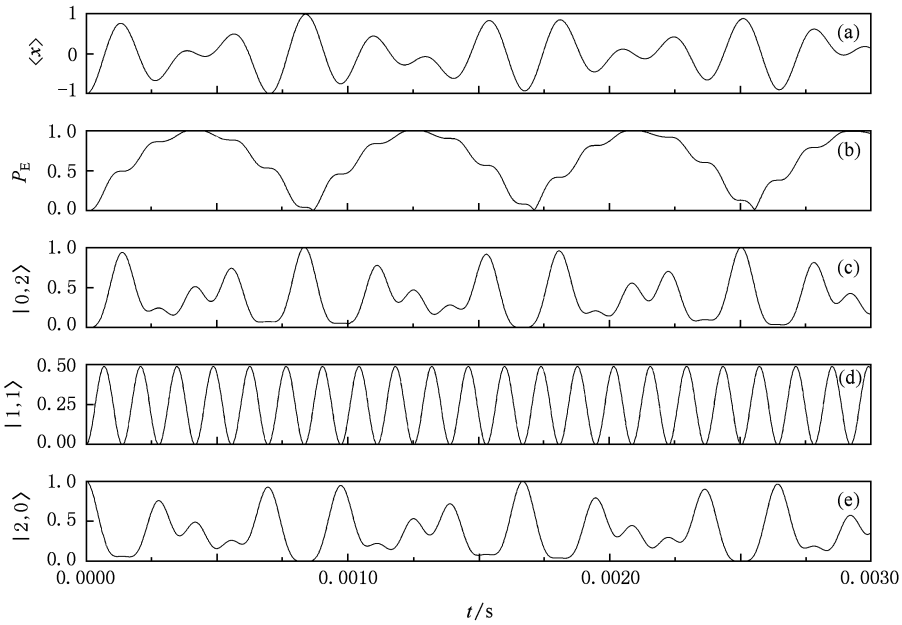

图3 弱相互作用下($J/U \approx 1.5$)纠缠度及三态上原子布居数分布 (a) 原子平均位置,(b) 纠缠度,(c) 态|0,2〉上原子布居数,(d) 态|1,1〉上原子布居数,(e) 态|2,0〉上原子布居数

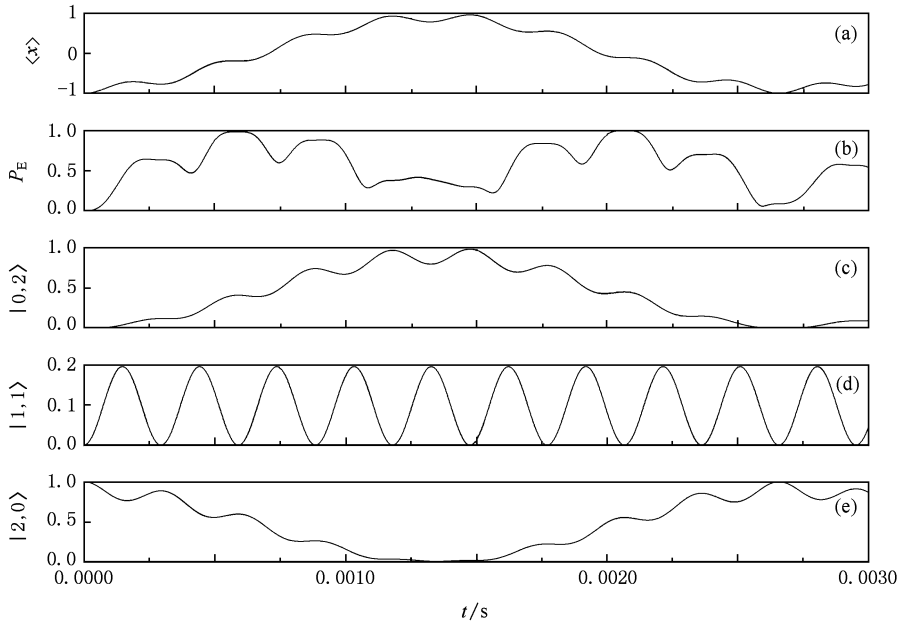

图4 强相互作用下($J/U \approx 0.2$)纠缠度及三态上的布居数分布 (a) 原子的平均位置,(b) 纠缠度,(c) 态|0,2〉上的原子布居数,(d) 态|1,1〉上的原子布居数,(e) 态|2,0〉上的原子布居数

4.2. 强相互作用

由图 4 可知，强相互作用（$J/U=0.2$）时，J 的作用较弱，即单原子隧穿影响较小，此隧穿过程中单原子隧穿频率变慢，且幅度较小. 在 0—0.7 ms 时间内，$|0,2\rangle$ 上的原子数一直增加，$|2,0\rangle$ 上的原子数一直减小（当然仍有小的起伏，由单原子隧穿所致），显然此种情况下主要过程为两原子隧穿，且是共同隧穿. 又由纠缠度一直增大的趋势可知，此两原子隧穿为关联隧穿. 纠缠度于 0.7 ms 左右达到最大. 接下来的过程，纠缠度不断减小，关联隧穿仍是主要过程，不过纠缠度逐渐减小，原子完成的仍是从 $|2,0\rangle$ 态到 $|0,2\rangle$ 态的跃迁，即由左阱到右阱的共同隧穿.

5. 结　　论

本文先通过两格点 Bose-Hubbard 模型研究了双势阱中冷原子的关联隧穿，发现由两格点 Bose-Hubbard 模型得到的结果不能很好的与实验相符. 我们通过改换基矢，得到了一个新的 Hamilton 量表示来描述双势阱中冷原子的运动，并对修正后模型的优势作了讨论. 另外，结合纠缠度的计算，考察三态上的布居数分布，得到了双原子隧穿过程的直观描述.

[1] Cohen-Tannoudji C N 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 707

[2] Chu S 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 685

[3] Phillips W D 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 721

[4] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198

[5] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969

[6] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J, Hulet R G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687

[7] Wang G F, Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev.* A **73** 013619

[8] Berthoud P, Joyet A, Dudle G, Sagna N, Thomann P 1998 *Europhys. Lett.* **41** 141

[9] Esslinger T, Bloch I, Hänsch T W 1998 *Phys. Rev.* A **58** R2664

[10] Fujita J, Morinaga M, Kishimoto T, Yusuda M, Matsui S, Shimizu F 1996 *Nature* **380** 691

[11] Bordé Ch J, Salomon Ch, Avrillier S, van Lerberghe A, Bréant C 1984 *Phys. Rev.* A **30** 1836

[12] Balykin V I, Letokhov V S, Ovchinnikov Y B, Sidorov A 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2137

[13] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳、傅立斌、赵　鸿、刘　杰 2005 物理学报 **54** 5003]

[14] Ye D F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5071 (in Chinese) [叶地发、傅立斌、赵　鸿、刘　杰 2007 物理学报 **56** 5071]

[15] Fölling S, Trotzky S, Cheinet P, Feld M, Saers R, Widera A, Müller T, Bloch I 2007 *Nature* **448** 1029

[16] Makhlin Y, Schön G, Shnirman A 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 357

[17] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S, Shenoy S R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950

[18] Raghavan S, Smerzi A, Fantoni S, Shenoy S R 1999 *Phys. Rev.* A **59** 620

[19] Ostrovskaya E A, Kivshar Y S, Lisak M, Hall B, Cattani F 2000 *Phys. Rev.* A **61** 031601(R)

[20] Ananikian D, Bergeman T 2006 *Phys. Rev.* A **73** 013604

[21] Abouraddy A F, Saleh B E A, Sergienko A V, Teich M C 2001 *Phys. Rev.* A **64** 050101(R)

[22] Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev.* A **74** 063614

[23] Fu L B 2006 *Europhys. Lett.* **75** 1

[24] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马　云、傅立斌、杨志安、刘　杰 2006 物理学报 **55** 5623]

Correlated tunneling of cold atoms in double-well potential*

Cao Hui† Zhao Qing

(*Department of Physics*, *School of Science*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

(Received 13 June 2009; revised manuscript received 26 July 2009)

Abstract

The tunneling phenomena of cold atoms in double-well with different interaction (U) and tunnel coupling (J) were studied. Experiments cannot be interpreted completely by a two-site Bose-Hubbard model. Thus, a new model was introduced, in which the ground state and the first excited state of the double-well were used as state bases. The expression of Hamiltonian was derived under the new model, which explains the reason why the parameter isnot consistent with the experiment from a two-site Bose-Hubbard model. Furthermore, we figured out the fluctuation of entanglement degree of the atoms in the double-well, and directly described the whole process of tunneling with the population of particles in the three states.

Keywords: correlated tunneling, strong interaction, weak interaction, degree of entanglement

PACC: 0365, 3280P, 7335C

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10604009, 50935001) and the National Basic Research Program of China (Grant No. 2006CB921400).

† E-mail: stanley_1012@163.com