物 理 學 報

第 10 卷 第 4 期　1954 年 12 月

由高能核子碰撞而產生的介子簇射*

胡　寧

(中國科學院物理研究所及北京大學物理系)

本文討論在宇宙射線中介子簇射產生的一種可能的過程. 所得的結果可與存在的實驗結果互相適合. 本文所討論的過程不同於 Fermi 理論所提供的過程. 要比較這兩個理論,尚需待進一步的實驗.

一. 緒　言

近年來實驗的結果證明當高能核子互撞時, 可以有很多介子同時產生. 這個實驗結果解決了多年來在宇宙射線理論上一個爭執的問題. 這個爭論的一方面是 Heisenberg 的"一次產生"理論[1],另一方面是 Heitler 和 Janossy[2] 的"多次產生"理論. Heisenberg 認爲宇宙射線中所觀察到的高能介子簇射是由兩個高能的核子在一次碰撞中同時產生的,而 Heitler 和 Janossy 則認爲:當宇宙射線中原始的高能核子與大氣中較重的原子核相撞時,高能核子連續的與原子核內各個核子碰撞,每碰撞一次約可產生一個介子, 因而高能核子與一個較重的原子核碰撞也可產生很多介子而形成一個介子簇射. 上面所述的實驗結果證明當投射核子的動能大於 10^{11} 電子伏特時,"一次產生"理論裏所提供的介子產生的方式,是介子簇射產生的主要方式.

"一次產生"理論經過 Heisenberg, 並且經過 Lewis, Oppenheimer 及 Wouthuysen[3] 等人的工作得到進一步的發展. 但這兩種研究工作是從完全不同的觀點出發的. Heisenberg 強調介子簇射的產生是由於介子場本身的非線性效應,即由於介子與介子間的直接作用而造成的. Oppenheimer 等人則仍從通常被接受的介子理論出發,不考慮介子與介子間的直接作用, 而僅考慮介子與核子間的直接

* 1954 年 5 月 10 日收到.

作用，介子與介子的相互作用必須以核子爲中間的媒介．但由上面兩種理論裏計算出來的介子產生數都比後來觀察到的數值大得很多．根據這些理論，當碰撞中的高能原始核子的能量爲 3×10^{13} 電子伏特時，產生的介子數應爲數百個，但觀察到的介子數僅爲數十個．

根據 Oppenheimer 等人的理論，如果介子場是屬於膺矢量耦合的膺標量介子，那麼產生的介子數與投入核子能的 1/3 次冪成正比，但 Розенталь[4] 的實驗結果要求這個冪次須小於 1/4．再者，根據 Oppenheimer 等人的理論，在質心坐標中所產生的介子分佈是等向的，這也與 Lord, Fainberg 和 Schein[5] 的實驗結果相反．

在另一方面，根據 Heisenberg 的非線性理論，產生的介子數應與原始核子能的 1/2 次冪成正比．這個結果比起 Oppenheimer 等人的理論結果，更不符合於實驗的事實．

在 1950 年 Fermi[6] 發表了介子簇射產生的統計理論．這個理論的基本假設是這樣的：因爲介子與核子間的作用在高能時非常強大，由核子開始碰撞至介子產生這段很短的時間內，這個力學系統的各種可能的情態之間已達到統計上的平衡狀態．依照 Fermi 的理論，當兩個高能的核子互相碰撞時，這個系統的動能在碰撞的瞬間將突然變爲在環繞兩個核子極附近的區域內介子場和核子場的激動能．這個激動能將很快的按統計定律分配到各種可能的自由度中去．這樣，人們可以計算在這個小區域中產生具有任一個動能分佈的任意數目的核子和介子的幾率．這樣產生的核子和介子在很短的時間內將離開上述的極小區域而成爲實驗所觀察到的介子簇射．

從 Fermi 的理論我們得出所產生的介子在質心坐標裏的分佈是與方向有關的．產生的核子和介子將主要地沿着碰撞線的前後兩個方向．這個結果圓滿地解釋了 Schein 等人所觀察到介子簇射的“雙錐狀”結構．同時 Fermi 的理論指出介子的產生數應與原始核子動能的 1/4 次冪成正比．這個結果也非常接近於 Розенталь 的觀察結果．

但當原始核子的動能達到 10^{17} 電子伏特時，Fermi 的理論開始與實驗的結果不相適合．Hazen, Heineman, Lennox[7] 及 Messel, Green[8] 等人的計算結果指出由 Fermi 理論得出的介子角分佈仍比實驗分佈爲寬．此外新的實驗結果指出在高能碰撞所產生的介子簇射中，幾乎沒有核子產生，這個結果是直接與 Fermi

的理論結果違反的[1].

鑒於上述情況，我們覺得循着 Lewis, Oppenheimer, Wouthuysen 所進行的方向，以通常被接受的理論爲出發點，進一步考察究竟到怎樣的程度，這種理論仍可解釋現有的實驗結果，仍舊是有必要的. 我們承認在高能的碰撞過程中，在相當大的程度上統計的平衡是存在的. 不過這種平衡也許不應看做是在碰撞過程中迅速建立起來的，而是因爲碰撞的時間非常短暫，原來的平衡未及破壞所致. 當一個核子單獨存在時，它和它周圍的介子場達到一種統計上平衡的狀態. 當兩個核子互相碰撞時，這種平衡狀態就遭到破壞. 我們很容易想像到在碰撞時，在這兩個核子系統相互作用最強的區域，平衡狀態的破壞也最顯著. 我們知道核子與介子間的作用是隨着介子動能的增加而增加的. 主要的原因是由於高能的介子場具有更多的自由度. 而一個核子的介子場裏的高能介子都只存在於核子的極附近的區域. 所以在碰撞時最強的相互作用只在兩核子非常接近時始存在，而且作用最強的區域也只限於兩個核子極附近的區域. 如果核子和核子之間另外存在着一個極短距離的強大作用，可能這個強大作用是由一個新的介子場(如 K-介子場)所造成，那麼上面結論將更爲準確. 這樣，對於任一核子系統，我們可以假想一個以核子爲中心的極小球面. 球面外的介子場在碰撞過程裏仍舊保持其原來的狀態. 我們只需考慮這兩個球面內部區域的相互作用. 由於作用的強大，這兩個假想球面內部區域在碰撞中發生了極強大的動量交換，這個動量交換遠大於球面內部區域與外部區域間經常存在着的動量交換. 很自然的結局將是：這兩個球面內的介子場包括核子在內將與球外部分的介子場完全脫離. 球外部分的介子場，在失去核子的瞬間，變爲自由介子，並且即以它們在分離時的動量分散而成爲介子簇射. 核子在失去外圍部分後，將在運動的過程中，重新放出新的介子來補充它所失去的外圍部分，在放射新介子的過程中，核子的速度逐漸降低，直到核子與它周圍的介子場重新達到平衡時爲止.

從上面的討論我們看到：介子簇射只有當核子的碰撞半徑 (impact parameter) 比介子的 Compton 波長小得很多時纔能發生. 這個結果與 Fermi 的結果是不同的. 在 Fermi 的理論裏，產生介子簇射的碰撞半徑的平均值等於介子的 Compton 波長除以 $\sqrt{2}$，在 Fermi 的理論裏，這樣大的碰撞半徑是必需的，因爲否

1) 根據 Marshak 最近計算 (*Meson Physics* McGraw-Hill Book Co. (1952) p. 329) 由 Fermi 理論得出所產生的介子數值爲 Lord 等人實驗觀測到的數目的 1/5.

則就不能解釋介子簇射的角分佈. 由於上面原因，我們的理論所得出在空氣上層產生介子簇射的截面積要比由 Fermi 理論所算得的值要小得多，這一點可以由將來的實驗來比較.

最近 Померанчук[9] 和 Ландау[2] 曾對 Fermi 的理論作了一些修正. Померанчук 特別指出在碰撞中所包括的粒子數應遠比放出的粒子數爲多. 因此 Fermi 在討論統計的平衡時只考慮放出的粒子是不正確的. Ландау 進一步指出放出粒子的角分佈可直接從問題的一度性直接由相對論流體力學算得，因而與系統的角動量無關. Ландау 所得出的角分佈與 Fermi 結果稍有不同.但他所假定的運動的一度性，是否與事實相符，是值得進一步加以討論的.

我們必須指出，上面所描述的介子簇射產生的過程只限於碰撞能很高而所產生的介子數達到十個或數十個以上時的情況. 如果我們考慮低能碰撞問題，在碰撞中所產生的介子僅有一個或兩個，如投射的核子的能在 3×10^{11} 電子伏特左右或當碰撞能雖很高但碰撞半徑却很大時，那時的實際情況就很難用上面的描述來表示了. 我們知道動能在 3×10^{11} 電子伏特左右的核子已可由人工產生，實驗測得產生一個介子的截面約爲 10^{-28} 厘米^2. 但當碰撞能很高時 ($>10^{13}$ ev) 產生介子簇射的截面積尚未能直接由實驗量得.

在我們的理論裏，在質心坐標裏的介子角分佈可完全由介子場本身的慣性來解釋. 當假想球面外的介子場與核子脫離時，場裏的介子一方面以它們對核子的相對速度散開，但同時仍部分的保持着碰撞以前的向前運動的速度，於是產生的介子主要的仍沿着核子原有的前進方向前進，這解釋了 Schein 等人所觀察到的"雙錐狀"分佈.

根據本文的理論，產生的介子的增加率，應小於原始核子能的 1/3 次冪. 在這方面我們的理論不及 Fermi 的理論，後者更準確的符合於事實.

現在的理論還圓滿的解釋了在介子簇射裏幾乎沒有核子產生這個實驗的事實. 因爲介子簇射只是由核子的介子場的外圍部分所構成.

在討論介子簇射的性質以前，我們必須知道一個核子周圍的介子場，這個介子場與核子已達到一個統計上平衡的狀態. 在本文裏我們將討論兩種型式的介子場：標量耦合的中性標量介子場和膺矢量耦合的中性膺標量介子場. 我們只需計算一個靜止核子周圍的介子場，因爲運動核子的介子場可直接由 Lorentz 變換由靜止核子的介子場算得. 下面我們所用的計算和近似的方法是和在量子電

動力學裏 Bloch 和 Nordsieck[11] 所用的方法是相當的，但是我們的方法較 Bloch 和 Nordsieck 的方法更爲簡明易懂.

在下面 §2 中，我們將分別考慮標量耦合的標量介子場和贋矢量耦合的贋標量介子場. 在 §3 中我們將根據這兩節的結果，討論高能核子碰撞所產生的介子簇射.

二. 準靜止近似解

我們現在考慮一個靜止的核子周圍的介子場. 由於我們所感到興趣的是核子極附近的區域，在這裏核子與介子場的作用相當強大，因此通常把介子場展開成作用常數 g 的微擾計算方法是不適用的. Bloch 和 Nordsieck 關於電子的電磁場的計算指出：如果我們忽略去核子在放射介子時的反衝，則介子場的解可以不經過微擾方法而直接得到. 當然忽略去核子的反衝將是一個很嚴重的誤差的源泉. 如果我們考慮核子僅只放出一個高能介子的情形時，這個誤差將是很嚴重的，因爲根據動量守恆定律，核子必須具有與介子相反的動量. 但是如果我們考慮在核子的近處有十餘個或數十個高能的介子存在時，忽略去核子的反衝所造成的誤差將較不嚴重，因爲這數十個高能介子的總動量等於零的機會仍然是存在的，這時我們就可把核子看做是靜止的. 其次，忽略去核子的運動仍可以從統計上平均的意義上來了解，當然必須聲明這些對忽略核子反衝的解釋並沒有足夠地減輕這個誤差的嚴重性.

如果我們忽略去核子在放射介子時的反衝而把核子看做永遠靜止時，那麼核子就可看做一個非相對論的質點. 假定核子的位置爲 $\boldsymbol{z}$，標量耦合的標量介子場的 Hamilton 函數爲

$$H=\frac{1}{2}\iiint[\pi(\boldsymbol{r})^2+(\nabla\varphi(\boldsymbol{r}))^2+\kappa^2\varphi^2]\,d^3\boldsymbol{r}+g\,\varphi(\boldsymbol{z}). \tag{1}$$

在上式裏 $\pi(\boldsymbol{r})$ 和 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 爲一對正則變數，K 爲介子的質量，g 爲作用常數. 我們曾選取適當的單位使得 $c=\hbar=1$（c 爲光速，$2\pi\hbar$ 爲 Planck 常數）. $\pi(\boldsymbol{r})$ 和 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 滿足下面對易關係：

$$[\pi(\boldsymbol{r}),\ \varphi(\boldsymbol{r}')]=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{2}$$

現在我們引入下面變換：

$$\varphi(r) = V^{-\frac{1}{2}} \sum_k \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}} \left(\bar{\varphi}_k e^{i(kr)} + \varphi_k e^{-i(kr)}\right), \tag{3}$$

$$\pi(r) = V^{-\frac{1}{2}} \sum_k \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} i\left(\varphi_k e^{i(kr)} - \bar{\varphi}_k e^{-i(kr)}\right); \tag{4}$$

式中 $\varepsilon = (k^2 + K^2)^{1/2}$, V 爲 (1) 式的積分體積. 代入 (1) 式得

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \varepsilon \left(\bar{\varphi}_k \varphi_k + \varphi_k \bar{\varphi}_k\right) + \sum_k g \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\bar{\varphi}_k e^{i(kz)} + \varphi_k e^{-i(kz)}\right). \tag{5}$$

由 (2) 得 φ_k 和 $\bar{\varphi}_k$ 滿足下面對易關係:

$$\begin{gathered} [\varphi_k, \varphi_{k'}] = 0, \quad [\bar{\varphi}_k, \bar{\varphi}_{k'}] = 0, \\ [\bar{\varphi}_k, \varphi_{k'}] = \delta_{kk'}; \end{gathered} \tag{6}$$

$\bar{\varphi}_k$ 可看做是介子的吸收算符, φ_k 可看做是介子的放射算符. 我們可以選取一種表象 (representation), 使得 φ_k 在這個表象裏是對角的. 這樣 $\bar{\varphi}_k$ 就可由 $\partial/\partial\varphi_k$ 來表示. 於是 (5) 式變爲

$$H = \sum_k \varepsilon \varphi_k \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \sum_k \varepsilon + \sum_k \frac{g}{\sqrt{2\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \varphi_k} e^{i(kz)} + \frac{g}{\sqrt{2\varepsilon}} \varphi_k e^{-i(kz)}. \tag{7}$$

上式中 $\sum_k \varepsilon$ 項代表眞空漲落的現象, 可自式中略去. 取核子的位置爲坐標的原點, 卽命 $z = 0$, 上式變爲

$$H = \sum_k \varepsilon \varphi_k \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \sum_k \frac{g}{\sqrt{2\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \sum_k \frac{g}{\sqrt{2\varepsilon}} \varphi_k. \tag{8}$$

現在我們尋求滿足下式的 Schrödinger 波動函數 Ψ:

$$H\Psi = E\Psi. \tag{9}$$

我們很容易看出 (9) 的解可寫成下面形式:

$$\Psi = \Pi_k \Psi_k, \tag{10}$$

Ψ_k 滿足

$$\left[\varepsilon \varphi_k \frac{d}{d\varphi_k} + \frac{g}{\sqrt{2\varepsilon}} \frac{d}{d\varphi_k} + \frac{g}{\sqrt{2\varepsilon}} \varphi_k\right] \Psi_k = E_k \Psi_k; \tag{11}$$

式中 $E = \sum_k E_k$. (11) 的普遍解爲

$$\Psi_k = A\left(\varepsilon \varphi_k + \frac{g}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{g^2}{4\varepsilon^2} + E_k\right)} e^{-\frac{g}{\sqrt{2}\varepsilon^{3/2}}\varphi_k}, \tag{12}$$

Ψ_k 作爲 φ_k 的級數必須只包括 φ_k 的正整數冪；這要求

$$n_k = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{g^2}{4\varepsilon^2} + E_k\right) \tag{13}$$

必須是一個整數．我們很容易看出 n_k 不可能是一個負的整數，因爲如果是負的，則當 $\varphi_k \to -g/2^{1/2}\varepsilon^{3/2}$ 時 Ψ_k 就趨於無窮大，而這樣無窮大的 Ψ_k 是沒有物理意義的．所以 n_k 只可能是零或正整數．由 (13)我們得

$$E_k = n_k\varepsilon - \frac{g^2}{4\varepsilon^2}. \tag{14}$$

於是 E 爲

$$E = \sum_k E_k = \sum_k n_k\varepsilon - \sum_k \frac{g^2}{4\varepsilon^2}, \tag{15}$$

右邊第二項正是核子在介子場的自能積分；注意這一項是發散的，這一點將在下面再加討論．右邊第一項代表自由介子的能．波動函數 (10) 可寫成

$$\Psi = A\, e^{-g\Sigma_k \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\varphi_k} \Pi_k \left(\varepsilon\varphi_k + \frac{g}{\sqrt{2}\varepsilon}\right)^{n_k}, \tag{16}$$

A 爲歸一常數．我們很容易證實 (16) 滿足 (9) 式．這個力學系統的基態 Ψ_0 爲

$$\Psi_0 = A_0 e^{-g\Sigma_k \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\varphi_k} \tag{17}$$

或

$$\Psi_0 = A_0\left\{1 - g\sum \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\varphi_k + \frac{g^2}{2!}\sum_{k_1}\frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon_1^{3/2}}\varphi_{k_1}\sum_{k_2}\frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon_2^{3/2}}\varphi_{k_2} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^n\frac{g^n}{n!}\sum_{k_1}\frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon_1^{3/2}}\varphi_{k_1}\sum_{k_2}\frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon_2^{3/2}}\varphi_{k_2}\cdots\sum_{k_n}\frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon_n^{3/2}}\varphi_{k_n} + \cdots\right\}. \tag{18}$$

歸一常數 A_0 可由下面關係決定：

$$\bar{\Psi}_0\Psi_0 = 1. \tag{19}$$

由 (17)，(18) 我們得到

$$\bar{\Psi}_0 = \bar{A}_0 e^{-g\Sigma_k \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\bar{\varphi}_k} = \bar{A}_0 e^{-g\Sigma_k \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\varphi_k}} = \bar{A}_0\left\{1 - g\sum_k \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\varphi_k}\right.$$
$$\left. + \frac{g^2}{2!}\sum_{k_1}\frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon_1^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\varphi_{k_1}}\sum_{k_2}\frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon_2^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\varphi_{k_2}} + \cdots\right\}. \tag{20}$$

把 (18) 和 (20) 代入 (19), 得

$$\bar{A}_0 A e^{-g\Sigma_k \frac{1}{2\varepsilon^3}} = 1$$

或

$$A_0^2 = \bar{A}_0^2 = e^{g\Sigma_k \frac{1}{2\varepsilon^3}};$$

因此基態的波動函數爲

$$\Psi_0 = \exp\left\{\frac{g^2}{2}\sum_k \frac{1}{2\varepsilon^3}\right\}\exp\left\{-g\sum_k \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\varphi_k\right\}. \tag{21}$$

我們注意到 $\sum_k \frac{1}{2\varepsilon^3}$ 是一個發散的級數. 這將使得 Ψ_0 等於無窮大而失去物理意義. 爲着避免這個困難,我們可以在 (8) 式的最後兩項中添入收斂因子

$$H = \sum_k \varepsilon\varphi_k \frac{\partial}{\partial\varphi_k} + \sum_k \frac{gU(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2}\,\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\varphi_k} + \sum_k \frac{gU(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2}\,\varepsilon}\varphi_k, \tag{22}$$

式中 $U(\boldsymbol{k})$ 滿足下式:

$$\sum_k U(\boldsymbol{k}) = 1.$$

經過上面修正, (12) 變爲

$$\begin{aligned} \Psi_k &= A\left(\varepsilon\varphi_k + \frac{gU(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2}\,\varepsilon}\right)^{n_k} e^{-\frac{gU(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\varphi_k}, \\ n_k &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{g^2U(\boldsymbol{k})^2}{4\varepsilon^2} + E_k\right). \end{aligned} \tag{23}$$

(15) 式變爲

$$E = \sum_k n_k\varepsilon - \frac{g^2U(\boldsymbol{k})^2}{4\varepsilon^2}. \tag{24}$$

我們可以取 $U(\boldsymbol{k})$ 使得上式的第二項(卽自能積分)變爲收斂. 於是 (21) 應代替爲

$$\Psi_0 = \exp\left\{\frac{g^2}{2}\sum_k \frac{U(\boldsymbol{k})^2}{2\varepsilon^3}\right\}\exp\left\{-g\sum_k \frac{U(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\varphi_k\right\}. \tag{25}$$

我們都知道把 (12) 換成 (25) 是相當於把點核子換成一個佔有空間體積的核子.

(25) 可看作兩個 g 的級數的乘積. 我們注意到 (25) 的第二個因子只包括介子的放射算符 φ_k 而不包括介子的吸收算符,因此這個因子不包括任何"環復躍遷" (round-about transitions), 因任一環復躍遷必須包括介子的吸收. (25) 的第一個因子可以寫成下面形式:

$$\exp\left\{\frac{g^2}{2}\sum_k \frac{U(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\bar{\varphi}_k \sum_k \frac{U(\boldsymbol{k}')}{\sqrt{2}\,\varepsilon'^{3/2}}\varphi_{k'}\right\}, \tag{26}$$

所以和剛才所討論的第二個因子相反，現在所討論的因子（26）只包括環復躍遷而不包括任何直接躍遷．在通常的微擾論計算裏，Ψ_0 被展開爲

$$\Psi_0 = \Psi_0^{(0)} + g\,\Psi_0^{(1)} + g^2\,\Psi_0^{(2)} + \cdots. \tag{27}$$

這樣一來，環復躍遷就和直接躍遷互相混合起來了．當 g 很大並且當 $U(\boldsymbol{k})\to 1$ 時，(27) 的收斂問題可以變得很嚴重．我們注意到收斂困難只存在於 (25) 或 (21) 的第一個因子內．(25) 的第二個因子（寫成形式 (18)）雖然在形式上是一個 g 的級數，但每一項都代表一個個別的躍遷，不同項的係數之比就是相當躍遷的幾率幅之比．對於任何 g 值，級數的每一項都有明確的物理意義，它是由算符構成的級數，因此沒有普通級數裏所遇到的收斂問題．相反地，(25) 的第一個因子是一個 g 的普通級數，因此事實上也就發生了收斂問題．雖然在第一個因子不是收斂時，第二個因子仍可給出各種躍遷的相對幾率．

我們很容易把上面計算推廣到有數個核子存在時的情形．這時 Hamilton 算符爲

$$H = \sum_k \varepsilon\,\varphi_k\frac{\partial}{\partial\varphi_k} + \sum_k \frac{g\,U(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon}}\sum_s e^{i(kz_s)}\frac{\partial}{\partial\varphi_k} + \sum_k \frac{g\,U(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon}}\sum_s e^{-i(kz_s)}\varphi_k, \tag{28}$$

z_s 爲第 s 個核子的坐標．如果我們命

$$\begin{aligned} G^*(\boldsymbol{k}) &= g\,U(\boldsymbol{k})\sum e^{-i(kz_s)}, \\ G\ (\boldsymbol{k}) &= g\,U(\boldsymbol{k})\sum e^{i(kz_s)}; \end{aligned} \tag{29}$$

則 (28) 式變爲

$$H = \sum_k \varepsilon\,\varphi_k\frac{\partial}{\partial\varphi_k} + \sum_k \frac{G^*(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial\varphi_k} + \sum_k \frac{G(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon}}\varphi_k. \tag{30}$$

用前面相同方法我們得

$$\begin{aligned} \Psi_k &= A\left(\varepsilon\,\varphi_k + \frac{G^*(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)^{n_k} e^{-\frac{G(k)}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\varphi_k}, \\ n_k &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{GG^*}{4\varepsilon^2} + E_k\right); \end{aligned} \tag{31}$$

於是

$$\Psi = A \exp\left\{-\Sigma_k \frac{G(k)}{\sqrt{2}\,\varepsilon^{3/2}}\varphi_k\right\} \Pi_k \left(\varepsilon\varphi_k + \frac{G^*(k)}{\sqrt{2}\,\varepsilon}\right)^{n_k}, \tag{32}$$

$$E = \sum_k E_k = \sum_k n_k \varepsilon + \sum_k \frac{G(k)\,G^*(k)}{4\varepsilon^2}. \tag{33}$$

由 (29) 得

$$\sum \frac{GG^*}{4\varepsilon^2} = N\sum_k \frac{g^2 U(k)^2}{4\varepsilon^2} + \sum_{l\neq s}\sum_k \frac{g^2 U(k)^2}{4\varepsilon^2} e^{i(k,x_l - x_s)}. \tag{34}$$

上式右邊第一項代表 N 個核子的自能，第二項代表核子間的作用能. 在這一項裏 $U(k)$ 可以看做 1. 計算立刻證實這一項正是 Yukawa 的位能

$$\sum_{l\neq s} V_{ls} = \sum_{l\neq s} \frac{g^2 e^{-Kr_{ls}}}{r_{ls}}, \tag{35}$$

r_{ls} 爲第 l 個核子與第 s 個核子間的距離. 上面計算結果指出：(i) 通常由微擾論得出準確至 g^2 的核子位能，實際上是非相對論極限準確至 g 的任何冪數的解；(ii) 核子間唯一的力是雙核子力，多核子力是不存在的.

上面的計算結果是核子靜止時情況. 當核子以速度 v 作等速運動時的解，應可由 Lorentz 變換求得. 假定 ε' 和 k' 爲運動核子的介子場中介子的動能和動量，ε' 和 k' 與核子靜止時的相當值；ε 和 k 間的關係爲

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' - (vk')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad k = \frac{k' - v\,\varepsilon'/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \tag{36}$$

把上面變數變換引入 (25)時，我們必須注意

$$\sum_k \frac{1}{\varepsilon} \sim \int \frac{d^3 k}{\varepsilon} \tag{37}$$

在 Lorentz 變換下是一個不變量. 同時由 (37) 及 (3) 我們看到 $\sqrt{\varepsilon}\,\varphi_k$ 在 Lorentz 變換下也是一個不變量. 這樣，(25) 中

$$\sum_k \frac{1}{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon}\,\varphi_k = \sum_k \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\varphi_k$$

應直接換爲 $\sum_{k'} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}}\varphi_{k'}$. 於是

$$\Psi_0(v) = \exp\left\{\frac{g^2}{2}\sum_{k'}\frac{1}{2\varepsilon_0'}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{[\varepsilon' + (vk)]^2}\right\} \exp\left\{-g\sum_{k'}\frac{1}{\sqrt{2\,\varepsilon'}}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{[\varepsilon' + (vk')]}\varphi_{k'}\right\}. \tag{38}$$

下面我們將把上面對於屬於標量耦合的標量介子場推廣到屬於膺向量耦合的膺標量介子場．在現在這是與實驗結果最相適合的一種介子場．這種介子場的 Hamilton 算符爲

$$H=\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k}\varepsilon\varphi_k^{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\varphi_k^{(\alpha)}}+g\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k}\frac{(\sigma k)}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\tau^{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\varphi_k^{(\alpha)}}$$
$$+g\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k}\frac{(\sigma k)}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\tau^{(\alpha)}\varphi_k^{(\alpha)} \tag{39}$$

式中 $\tau^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, 3$) 爲核子在"電荷空間"的自旋算符．$\varphi_k^{(\alpha)}$ 是介子場在電荷空間沿 α- 方向的分量．σ 是通常的自旋算符．

如所周知，Bloch 與 Nordsieck 的方法只有在 $\tau^{(\alpha)}$ 和 σ 可以看做古典的單位向量時始可應用．在我們的計算裏也可看到當 $\tau^{(\alpha)}$ 和 σ 是古典的量時，方程

$$H\Psi=E\Psi \tag{40}$$

的解可以用和上面完全相同的方法求得，(40) 中的 H 爲 (39) 式．相當於前面 (17) 式我們現在得到

$$\Psi_0=A_0\exp\left\{-g\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k}\frac{(\sigma k)}{\varepsilon^{3/2}}\tau^{(\alpha)}\varphi_k^{(\alpha)}\right\}. \tag{41}$$

在下節裏，我們將應用 (41) 來計算高能介子簇射的產生問題．

三．介子簇射的產生

在上兩節的計算裏，我們曾假定 σ 和 $\tau^{(\alpha)}$ 是古典的單位向量，並曾忽略去核子在放射介子時的反衝．我們曾指出這個忽略可能造成嚴重的誤差．所以本節中一切計算結果，都只應看做是一個粗糙的估計．由於這個原因，在下面計算裏，我們將不去區分各種類型的介子場在細節上的差別，而僅只考慮基本上不同的兩種類型．第一種類型的作用函數不包括場量的微分，我們舉 §2 中所討論的標量介子場爲代表．第二種類型的作用函數包括場量的微分，我們舉 §2 中所討論的膺矢量耦合的膺標量介子場爲代表．

很多作者曾指出第一種類型的介子場不能圓滿的解釋實驗結果，這些實驗結果也包括高能介子產生的實驗在內．這種類型的介子場在介子簇射產生的問題

內所遇到主要的困難是不能夠解釋爲什麼產生的介子數隨着能量的增加而增加. 在我們的計算裏,我們也得出同樣的結論. 所以在下面,我們將只考慮膺矢量耦合的膺標量介子場.

在 §1 的討論中,我們認爲在核子碰撞時所產生的介子簇射是由一個假想的極小球面外的介子場所形成的. 我們已在 §2 中計算出一個核子周圍的介子場. 令假想球面的半徑爲 λ,在球面外的介子場裏介子的動量將不會超過 $K\approx 1/\lambda$. 所以球面外的介子場可由下式來表示:

$$\begin{aligned} &\Psi_0 = A_0 \exp\left\{-g\sum_{k}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{(\sigma k)}{\varepsilon^{3/2}}\tau^{(\alpha)}\varphi^{(\alpha)}\right\}, && (k<K);\\ &\Psi_0 = 0, && (k>K). \end{aligned} \tag{42}$$

因爲事實上在碰撞中脫離核子的介子場不可能由假想球面截然的分開而必須有一個中間的過渡區域. 我們可命

$$\Psi_0 = A_0 \exp\left\{-g\sum_{k}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{U(k)\,(\sigma k)}{\varepsilon^{3/2}}\tau^{(\alpha)}\varphi^{(\alpha)}\right\}, \tag{43}$$

式中函數 $U(k)$ 當 k 由小於 K 的值過渡到大於 K 的值時也逐漸由 1 過渡到零. 爲計算方便起見,我們可取

$$U(k) = e^{-k^2/K^2}. \tag{44}$$

由 (43) 和 (44), 我們算出在碰撞後產生 n 個介子的幾率應爲

$$|M_n|^2 = g^{2n}\frac{1}{n!}\prod_{l=1}^{n}\left[3\int_0^\infty dk_l\frac{U(k_l)^2}{\varepsilon_l^3}\cdot 4\pi k_l^2\right], \tag{45}$$

上式中積分的值主要由很大的 k_l 值決定,於是我們可以把

$$\varepsilon_l = (k_l^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

看成 k_l. 經過簡單的計算,我們得

$$\int_0^\infty \frac{U(k)^2}{\varepsilon^3}k^2\,dk = \int_0^\infty e^{-2k^2/K^2}k\,dk = \frac{K^2}{4}; \tag{46}$$

於是 (45) 變爲

$$|M_n|^2 = g^{2n}\frac{3^n}{n!\,4^n}(4\pi)^n K^{2n} = \frac{1}{n!}(3g^2\pi K^2)^n. \tag{47}$$

介子產生的最大可能數應爲序列 $|M_1|^2, |M_2|^2, \cdots, |M_n|^2, \cdots$ 中最大的一項. 我們很容易看出如果 $|M_N|^2$ 爲上面序列中的最大項，N 必須滿足下面條件:

$$N \approx 3g^2\pi K; \tag{48}$$

(48) 告訴我們 N 與 K^2 成正比. N是由一個核子的介子場所產生的介子數. 由兩個核子所產生的介子總數應爲 $2N$. $2N$ 也可看做爲介子產生的平均數. K 應爲介子的平均動能. N 和 K 都是可以直接觀察的量,所以 (48) 式可以直接與實驗的結果比較. Lord, Fainberg 和 Schein 在他們的實驗裏觀察到約 15 個帶電介子,如果帶電介子與中性介子數的比率是 2:1, 那麼介子的總數應爲 20 個左右，即 $N\approx10$. 如果取 $g^2\approx0.1$, 則由 (64) 算出的 K 值應爲 $K\approx3.2$. 因爲我們所用的單位是 $\mu=c=1$, 所以在通常的單位裏 K 的值應爲

$$3\mu c^2 \approx 4.5 \times 10^2 \text{ Mev}.$$

在拿上面的 K 值與 Lord, Fainberg 和 Schein 的實驗結果比較以前，我們必須注意到下面的情況. 假使在實驗室的坐標裏有一個本來是靜止的核子. 這個核子與一個高速核子碰撞而產生介子的過程將是這樣的: 原來是靜止的核子在碰撞後與它介子場的外圍部分脫離,這個失去核子的介子場即發展成爲一個介子簇射. 原來以高速度投來的原始核子在碰撞後也失去它周圍的介子場. 這個介子場將發展成爲另外一個介子簇射,這個簇射中的介子沿着原始核子的投入方向都具有很大的速度 (因爲它們仍保持着碰撞前一部分速度)，因此它們將形成一個極細狹的錐狀簇射. 如果原來是靜止的核子在脫離它周圍的介子場時並沒有給這個介子場任何動量,那麼由這個介子場所形成的介子的分佈應該是等向的. 但是事實上由靜止核子所產生的介子也都是沿着投射核子的方向，不過速度較另外一個簇射爲小. 這說明當靜止的核子在被碰後脫離它周圍介子場的瞬間，也把它由原始核子得來的動量的一部分給予這個介子場. 這是很容易理解的,因爲介子場脫離了核子不是因爲沒有被核子向前攜帶，而是由於介子場不及追隨所致. 但是所產生介子垂直於簇射軸方向(即垂直於原始核子的投入方向)的平均動量仍應爲 K.

由 Lord, Fainberg 和 Schein 等人的實驗結果我們得高速介子的 K 值爲 $\geqslant 7 \times 10^2$ Mev/c, 低速介子的 K 值爲 $\approx 5 \times 10^2$ Mev/c 這說明前面估計的值 $K \approx 4.5 \times 10^2$ Mev 是與實驗結果一致的.

在進一步把我們的理論與 Lord 等人的實驗比較以前，我們必須較詳細的分析一下 Lord 等人的實驗結果. 因爲在質心坐標中，介子的角分佈必須對於前後方向是對稱的，而垂直於碰撞線方向的動量在質心坐標中和在實驗室坐標中都是相同的，這要求在 Lord 等人所觀察到的介子簇射中，慢速粒子 (diffuse cone) 垂直於碰撞線方向的平均動量必須與高速粒子 (central cone) 垂直於碰撞線方向的平均動量相等. 所以，根據剛才的估算，如果我們取 4 Bev/c 爲慢速粒子的平均動量，那麼高速粒子的動量就必須在 300 Bev 左右，於是整個介子簇射的總能量將在 3000 Bev 左右. 但是 Lord 等人根據 Fermi 理論估計的結果原始核子的能量爲 30000 Bev，即產生簇射的總能量只爲原始能量的十分之一. 當然由於實驗的不準確，高速粒子的能量也許在事實上遠遠超過 300 Bev. 但是由於上面討論，低能粒子也必須同時遠遠超過 4 Bev，才能使它們垂直於碰撞線方向的動量，保持相等. 但是下面的討論將指出低能粒子的動能不可能大於 4 Bev 左右.

取原始核子投射的方向爲 x 坐標軸，u_x'，u_y' 爲慢速粒子的平均速度，u_x''，u_y'' 爲高速粒子的平均速度. 我們得

$$\tan\frac{1}{2}\theta' = u_y'\Big/u_x', \qquad \tan\frac{1}{2}\theta'' = u_y''\Big/u_x''. \tag{49}$$

Lord 等人的觀察給出 $\theta'=0.13$ 弧度，$\theta''=0.003$ 弧度. 轉換到質心坐標後，(u_y'', u_x'') 將變爲 (u_y, u_x)，(u_y', u_x') 將變爲 $(u_y, -u_x)$. 我們很容易證實下面關係式:

$$\left(\frac{u_y}{u_x}\right)^2 = -\frac{u_y'}{u_x'}\cdot\frac{u_y''}{u_x''}\cdot\frac{u_x'}{v-u_x'}\,\frac{u_x''}{v-u_x''}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right), \tag{50}$$

式中 v 爲質心坐標的速度. 代入 (49)，因所有速度都接近於光速 c，我們得

$$\left(\frac{u_y}{u_x}\right)^2 = \tan\frac{\theta'}{2}\cdot\tan\frac{\theta''}{2}\cdot\frac{4}{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}; \tag{51}$$

因爲在質心坐標中，介子的分佈主要是沿着碰撞線的方向，u_y^2/u_x^2 的平均值顯然必須小於 1. 代入前面 θ' 和 θ'' 的實驗值，我們得

$$(1-u'^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} < 50.$$

如果慢速的粒子都是介子時，我們得

$$\mu c^2 (1 - u'^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} < 8 \text{ Bev},$$

即粒子的平均動能不可能大於 8 Bev. 這個結論是與直接觀察結果 (≈4 Bev) 一致的. 因此高速粒子的平均動能就不可能超過

$$8 \tan \frac{\theta'}{2} \Big/ \tan \frac{\theta''}{2} \approx 300 \text{ Bev}.$$

這樣，整個簇射所包括的能量僅爲 3×10^{12} ev 左右，這只是 Lord 等人所估計的原始核子能的十分一.

甚至在極端的情況下，所有的粒子的質量都和核子的質量相同時，由上面估計所得出簇射的總能也僅是原子核子能的三分之二. 這個結果指出原始核子的動能並沒有完全用於產生簇射. 換句話說，上述假想球面以內部分，在碰撞後，仍帶去碰撞能的很大部分. 在質心坐標中，被碰撞後的核子帶走的能量將爲總能量的一半以上.

最近 Hopper, Biswas 和 Darby 曾觀察到由能量爲 1000 Bev 的原始核子所產生的介子簇射. 簇射中共有介子九個. 他們也發現只有十分之一的原始能量用於產生簇射. 在 (48) 式中代入 $N=9/2$，我們得

$$K = 2\kappa c \approx 300 \text{ Mev/c}.$$

由實驗測得作爲垂直於碰撞方向的動量分量的平均值 K 介於 200 與 300 Mev/c 之間. 這說明現在的理論與實驗相符合的程度是相當滿意的.

只有十分之一的原始核子的能用於產生介子，這個實驗事實在 Lewis 等人的理論裏及在 Fermi 和 Ландау 等人的理論裏都是一個相當困難的問題，因爲根據這些理論，這是難以理解的. 在現在的理論裏，這個事實可以這樣來理解：我們可以假定在核子極附近區域裏高能介子與核子的作用非常猛烈（這個假定與我們前面關於介子產生機構的假定是一致的），這樣，當原始核子的能爲 1000 Bev 時，在介子場裏面包括動能大於 300 Mev 的介子的部分在碰撞中表現爲一個剛體的內核，這個內核裏的介子在碰撞中不可能被放出. 當原始核子的能增加至 30000Bev 時，這個內核的形狀只稍稍收縮，現在只包括能量在 450Mev 以上的介子. 我們可以把這個堅硬的內核想像成由於一種與核子作用極強的新的較重的介子場所構成.

在下面我們將簡單的討論所產生的簇射中介子的數目與原始核子能間的關係.

在討論中我們將用質心坐標系. 命 u_s 爲前面假想球面外的介子場在與核子脫離時的速度,因在與脫離的瞬間隨着介子場運動的坐標裏, 介子的角分佈是等向的,由 Lorentz 變換得由一個核子所產生的介子的總能爲

$$E=\frac{NKc}{\sqrt{1-\frac{u_s^2}{c^2}}}.$$

命 α 爲原始核子能用於產生介子的部分. 根據前面的實驗結果 α 應爲 0.1. 能量守恆定律要求下式的成立:

$$\frac{NKc}{\sqrt{1-\frac{u_s^2}{c^2}}}=\alpha W, \tag{52}$$

式中 W 爲碰撞核子的動能. 應用前面所述實驗結果,我們可命 $\alpha=0.1$, 因子 $\gamma_s=(1-u_s^2/c^2)^{-1/2}$ 可以看做代表介子的角分佈的量. 當 $u_s=0$ 時, $\gamma_s=1$, 在質心坐標中的介子的角分佈將是等向的. 這正是 Hopper 等人所觀察到的情況. 在 Lord 等人的實驗裏我們得出 $\gamma_s\approx 2$. 從 (48) 和 (52), 我們得

$$N=(3\pi g^2)^{1/3}\left(\frac{\alpha W}{\gamma_s c}\right)^{2/3}. \tag{53}$$

命 W' 爲在實驗室坐標中投進的原始核子的動能,我們得

$$\left(\frac{W}{Mc^2}\right)^2=\frac{W'}{Mc^2}; \tag{54}$$

代入 (53), 得

$$N=\left(\frac{3g^2\pi\alpha^2W'}{\gamma_s^2M}\right)^{1/3}. \tag{55}$$

(55) 式指出如 α 和 γ_s 是常數, N 與 $W'^{1/3}$ 成正比. 從實驗結果的指示裏我們看出 α 及 $1/\gamma_s$ 當 W' 增加時都減少,因此 N 隨 W' 的增加將慢於 $W'^{1/3}$.

Розенталь 曾由實驗的結果估計出 N 隨 W' 的增加應不快於 $W'^{1/4}$. 這個結果與我們上面的結果是一致的. 但必須指出, 在 Розенталь 的計算裏,他曾假定產生介子簇射的截面積卽等於核子的幾何截面積. 在下面的計算裏我們

將指出產生介子簇射的截面積小於核子的幾何截面積．如果我們把這個修正引進 Розенталь 的計算裏，我們將發現 N 隨 W' 的增加將較修正前爲快．

我們必須進一步指出 Розенталь 在他的計算裏並曾假定所有的原始核子的能都用於產生介子簇射．這個假定與前面所述的結果是衝突的．我們認爲在完全接受 Розенталь 的 1/4 冪定律以前，必須對這一點作進一步的研究．

現在我們將指出根據現在理論所算出的高能介子簇射產生的截面積比 Fermi 所估計者爲小．讓我們再討論一下 Lord 等人的實驗．根據 Fermi 理論產生這個簇射的截面積應爲

$$\sigma = \pi R^2, \qquad R = \frac{\hbar}{\kappa c} = 1.4 \times 10^{-13}\,\mathrm{cm};$$

式中 R 爲介子的 Compton 波長．根據現在的理論，這樣大的介子簇射只有當碰撞參數很小時才可能，因爲在前面我們已經指出，大數目的介子必須在碰撞的核子互相很接近時才可能產生．碰撞的截面積應爲

$$\sigma' = \pi R_1^2, \qquad R_1 = \hbar / K;$$

從前面的估計，我們得 $R_1 \approx 0.4 \times 10^{-13}$cm，於是我們得

$$\sigma' = 0.1 \times \sigma,$$

即我們所得的截面積僅爲 Fermi 的值的十分之一．

參　考　文　獻

[1] Heisenberg, *Nature,* **164** (1949), 65; Zs. f. Phys. **126** (1949), 569; **133** (1952), 65.
[2] Heitler and Janossy, *Proc. Phys. Soc. London,* A **62** (1949), 669.
[3] Lewis, Oppenheimer and Wouthuyson, *Phys. Rev.,* **73** (1948), 127.
[4] Розенталь, *ДАН. СССР,* **80** (1951), 731.
[5] Lord, Fainberg and Shein, *Phys. Rev.,* **80** (1950), 970.
[6] Fermi, *Prog. Theor. Phys.,* **5** (1950), 570; *Phys. Rev.,* **81** (1951), 683.
[7] Hazen, Heineman and Lennox, *Phys. Rev.,* **86** (1952), 198.
[8] Messel and Green, *Phys. Rev.,* **87** (1952), 378.
[9] Померанчук *ДАН. СССР,* **78** (1951), 897.
[10] Ландау *Изв. А Н СССР серия физиц.,* **17** (1953), 51.
[11] Bloch and Nordsieck, *Phys. Rev.,* **52** (1937), 54.
[12] Hopper, Biswas and Darby *Phys. Rev.,* **84** (1951), 457.

ON MULTIPLE PRODUCTION OF MESONS BY HIGH ENERGY NUCLEON COLLISIONS

Hu Ning

(Institute of Physics, Academia Sinica, and Peking University)

Abstract

A possible quantum mechanical picture of multiple production of mesons is discussed in the present paper. The theoretical result is in agreement with the experimental evidences. The picture presented in the present paper is different from that given by Fermi. More experimental deta are needed for the comparison of these two theories.