

# 電子與正電子散射的輻射修正<sup>\*1)</sup>

金星南

(中國科學院物理研究所)

## 一. 引言

巴泊 (H. J. Bhabha)<sup>[1]</sup> 根據狄喇克 (P. A. M. Dirac) 的正電子理論, 將摩勒 (C. Møller) 的電子與電子散射理論中的一個電子作為正電子而得到電子與正電子的散射理論. 他求得電子與正電子散射的微分散射截面在實驗室坐標系下 (其中電子假定是靜止的) 的公式如下:

$$d\phi = 2\pi r^2 \frac{f}{(f-1)^2 \epsilon^2} \left[ A(f, \epsilon) + B(f, \epsilon) + C(f, \epsilon) \right] d\epsilon; \quad (1)$$

其中  $r$  為電子半徑,  $\epsilon$  為正電子與電子碰撞後傳予電子的能量與正電子原來的動能之比,

$$f = \frac{\text{正電子的總能量}}{\text{正電子的靜止能量}},$$

$$A(f, \epsilon) = \frac{1}{f(f+1)} \left[ f^2 - (f^2 - 1)\epsilon + \frac{1}{2}(f-1)^2 \epsilon^2 \right],$$

$$B(f, \epsilon) = \frac{(f-1)^2 \epsilon^2}{f(f+1)^3} \left[ \frac{1}{2} f^2 + f + \frac{3}{2} - (f-1)^2 \epsilon(1-\epsilon) \right],$$

$$C(f, \epsilon) = -\frac{(f-1)\epsilon}{f(f+1)^2} \left[ f^2 + 2f - 2(f^2 - 1)\epsilon + (f-1)^2 \epsilon^2 \right];$$

$A(f, \epsilon)$  是由正常散射所引起的項,  $B(f, \epsilon)$  是由交換效應所引起的項,  $C(f, \epsilon)$  是由正常散射與交換效應的干涉作用所引起的項. 當  $\epsilon$  小的時候與正電子的能量

\* 1954 年 11 月 25 日收到.

1) 本工作完成後, 著者注意到萊特海脫 (M. L. C. Redhead) 做過同樣的工作. (他的文章發表在 *Proc. Roy. Soc.* **A220** (1953), 219).

小的時候 (即  $f$  近於 1 的時候),  $B(f, \epsilon)$  與  $C(f, \epsilon)$  比  $A(f, \epsilon)$  小得多, 但當  $\epsilon$  與正電子的能量增加時,  $B(f, \epsilon)$  與  $C(f, \epsilon)$  變大.

在實驗上, 電子與正電子散射是由何澤慧<sup>[2]</sup> 在雲霧室中研究  $\beta^+$  蛻變而發現的. 她用  $\beta^+$  放射物  $Mn^{32}$  與  $F^{18}$ , 在總照相路程 393 米中發現有 328 個  $\epsilon > 10\%$  的散射. 此後利脫等人 (O. Ritter et al)<sup>[3]</sup> 用由  $Cu^{64}$  所放出的能量在 100—400 Kev 間的正電子, 在 2890 米照相路程中發現 820 次散射; 勞埃與葛洛文 (R. R. Roy and L. Groven)<sup>[4]</sup> 用  $Rh^{102}$  所放出的能量在 500 Kev—1.1 Mev 間的正電子, 在 792 米照相路程中發現有 232 次散射; 霍克 (G. R. Hoke)<sup>[5]</sup> 用  $Na^{22}$  所放出的能量在 20—600 Kev 間的正電子, 在 2420 米照相路程中發現有 1129 次散射.

在何, 利脫等和霍克三個實驗中的散射, 大部分是在  $\epsilon$  小的時候與正電子的能量不很高的時候產生的, 所以對於這三實驗, 在 (1) 式中的  $B(f, \epsilon)$  與  $C(f, \epsilon)$  二項是不很重要的. 霍克<sup>[5]</sup> 綜合了何, 利脫等和他自己的實驗結果後還是不能鑑別出在電子與正電子散射現象中交換效應是否存在.

我們這計算是適用於上述三實驗 (即何, 利脫等和霍克的實驗) 的能量範圍的. 在這種能量範圍內, 主要的散射是正常散射, 所以後面在計算輻射修正部分的時候, 我們只考慮正常散射. 輻射修正對散射截面的改正與原散射截面之比不到 1%.

最近阿希金等人 (A. Ashkin et al)<sup>[6], 1)</sup> 用蓋革計數管做了從  $Co^{56}$  所放射出來的能量在 600 kev—1 Mev 的正電子的散射實驗, 他們證實了在電子與正電子散射現象中, 交換效應是存在的. 在萊特海脫的電子與正電子散射的輻射修正計算中, 他曾考慮了交換效應的存在.

## 二. 電子與正電子散射的輻射修正計算

### (一) 單位與符號的說明

在這計算中, 我們用在右下角具有希臘字母的標記的矢量表示四維空間的矢量, 具有拉丁字母的標記的矢量表示三維空間的矢量,  $x_\mu$  ( $\mu=1, 2, 3, 4$ ) 表示四維空間任意一點的坐標,  $A_\mu(x)$  表示電磁場的四維矢量勢, 二個四維空間矢量

1) 著者在本計算完成後才見到阿希金等的文章.

的標量積  $ab = a_\mu b_\mu = a_k b_k - a_0 b_0$ .

我們命  $\gamma_\mu$  為適合關係

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

的鮑利矩陣.  $\psi(x)$  表示狄喇克旋量,  $\bar{\psi}(x)$  表示對應於  $\psi(x)$  的伴隨旋量. 如果  $k_-$  與  $k'_-$  表示電子在散射前與散射後的四維動量,  $k'_+$  與  $k_+$  表示正電子在散射前與散射後的四維動量, 則散射前的電子由

$$\Psi_{k_-}(x) = a(k_-) e^{ik_-x} \quad (3a)$$

來表示; 散射後的電子由

$$\bar{\Psi}_{k'_-}(x) = \bar{a}(k'_-) e^{-ik'_-x} \quad (3b)$$

來表示; 散射前的正電子由

$$\bar{\Psi}_{-k'_+}(x) = \bar{a}(-k'_+) e^{ik'_+x} \quad (3c)$$

來表示; 散射後的正電子由

$$\Psi_{-k_+}(x) = a(-k_+) e^{-ik_+x} \quad (3d)$$

來表示.

此外, 我們取這種單位:

$$\hbar = c = 1,$$

$\hbar$  為普朗克常數除以  $2\pi$ ,  $c$  為光速度.

對於電磁場我們取亥維賽-洛倫茲單位.

## (二) 散射矩陣

按照近代量子電動力學的理论, 電子與正電子散射的散射矩陣可以按  $e$  (電子的電荷) 的冪展為級數的形式<sup>[7]</sup>:

$$S = S_2 + S_3 + S_4 + \dots, \quad (4)$$

其中  $S_2$  為含  $e^2$  的項,  $S_3$  為含  $e^3$  的項,  $S_4$  為含  $e^4$  的項等等. 在我們這電子與正電子散射的輻射修正計算中, 我們僅考慮  $S_2$ ,  $S_3$  與  $S_4$  三項.  $S_2$  為原來巴泊的電子與正電子散射理論所考慮的項,  $S_4$  為對電子與正電子散射所加的輻射修正項, 其中由於小能量虛光子所引起的發散須用  $S_3$  中的紅外困難消去. 我們在  $S_4$  與  $S_3$  中不考慮交換項.

關於  $S_2$ ,  $S_3$  與  $S_4$  的計算, 我們應用且以遜 (F. J. Dyson)<sup>[8]</sup> 的方法來計算. 關於  $S_2$  與  $S_4$  我們在動量表象中得到 (圖 1):

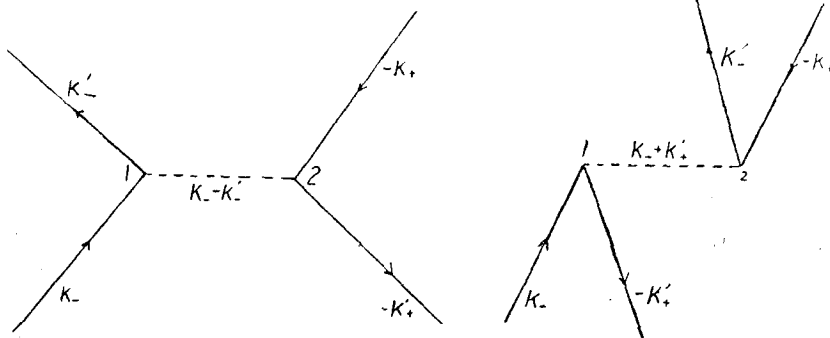


圖 1a

圖 1b

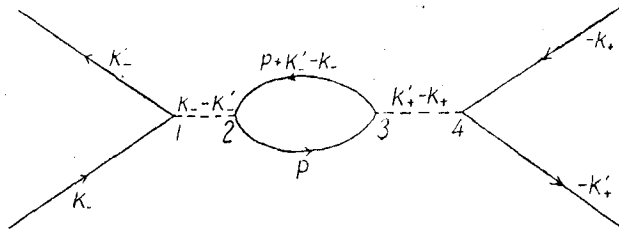


圖 1c

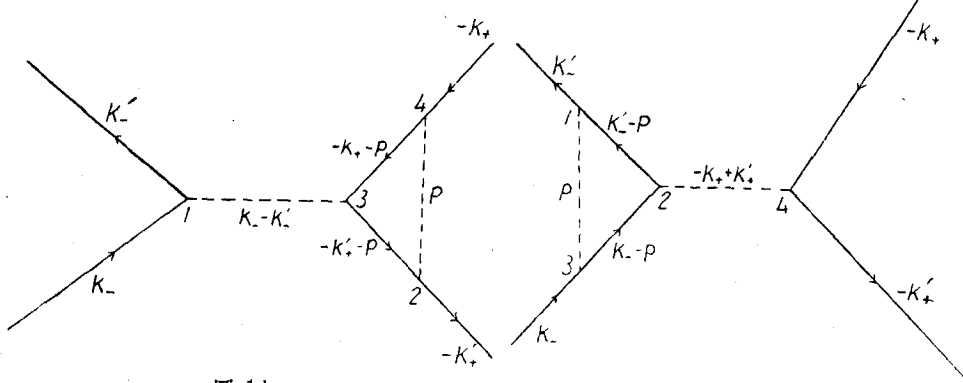


圖 1d

圖 1c

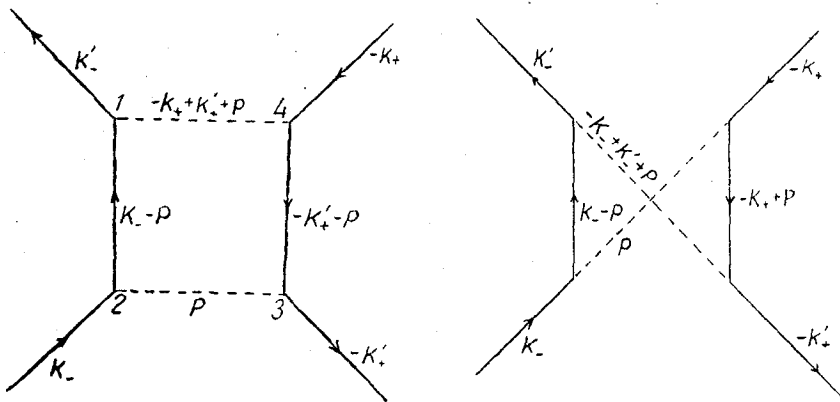


圖 1d

圖 1c

$$S_2 = S_2^0 + S_2^c$$

$$= \frac{(2\pi)^4}{i} e^2 \left\{ \frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda a(k_-) \bar{a}(-k'_+) \gamma_\lambda a(-k_+)}{q^2} - \frac{\bar{a}(-k'_+) \gamma_\lambda a(k_-) \bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda a(-k_+)}{(k'_+ + k_-)^2} \right\} \delta(k'_- - k'_+ - k_- + k_+), \quad (5)$$

$$S_4 = e^4 \left\{ -\frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda a(k_-)}{(q^2)^2} \int \text{Sp} \frac{[ip\gamma - m] \gamma_\lambda [i(p+q)\gamma - m] \gamma_\mu}{(p^2 + m^2)[(p+q)^2 + m^2]} dp \bar{a}(-k'_+) \gamma_\mu a(-k_+) + \frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda a(k_-)}{q^2} \int \bar{a}(-k'_+) \frac{\gamma_\mu [i(k'_+ + p)\gamma + m] \gamma_\lambda [i(k_+ + p)\gamma + m] \gamma_\mu}{(p^2 + 2k'_+ p)(p^2 + 2k_+ p) p^2} a(-k_+) dp + \int \bar{a}(k'_-) \frac{\gamma_\mu [i(k'_- - p)\gamma - m] \gamma_\lambda [i(k_- - p)\gamma - m] \gamma_\mu}{(p^2 - 2k'_- p)(p^2 - 2k_- p) p^2} a(k_-) dp \frac{\bar{a}(-k'_+) \gamma_\lambda a(-k_+)}{q^2} + \int \frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda [i(k_- - p)\gamma - m] \gamma_\mu a(k_-) \bar{a}(-k'_+) \gamma_\mu [i(-k'_+ - p)\gamma - m] \gamma_\lambda a(-k_+)}{(p^2 - 2k_- p)(p^2 + 2k'_+ p) p^2 (p+q)^2} dp + \int \frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda [i(k_- - p)\gamma - m] \gamma_\mu a(k_-) \bar{a}(-k'_+) \gamma_\lambda [i(-k_+ + p)\gamma - m] \gamma_\mu a(-k_+)}{(p^2 - 2k_- p)(p^2 - 2k_+ p) p^2 (p+q)^2} dp \right\} \times \delta(k'_- - k'_+ - k_- + k_+), \quad (6)$$

其中  $m$  為電子的質量,  $q = k'_- - k_- = k'_+ - k_+$ ,  $\int \cdots dp$  為對四維動量  $p$  的積分。

如果我們取  $A_\mu(x)$  的一個傅立葉分量  $A_{\mu, k}(x)$ :

$$A_{\mu, k}(x) = \frac{e_\mu}{\sqrt{2E}} e^{ikx}, \quad (7)$$

其中  $k$  為光子的四維動量,  $E$  為光子的能量,  $e_\mu$  為四維空間的單位矢量, 即

$$e_\mu e_\nu = \delta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (8)$$

則我們求得  $S_3$  如下 (圖 2):

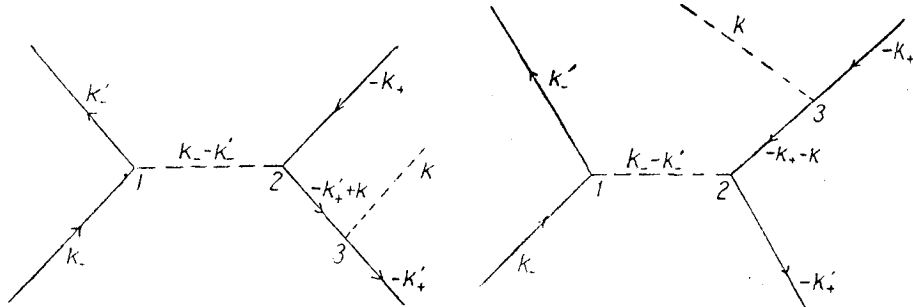


圖 2a

圖 2b

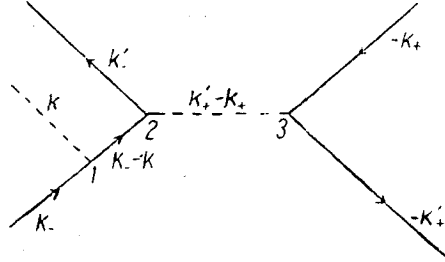


圖 2c

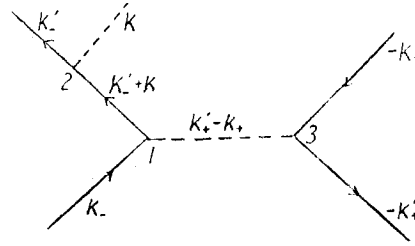


圖 2d

$$\begin{aligned}
 S_3 = & (2\pi)^4 e^3 \left\{ \frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda a(k_-)}{q^2} \bar{a}(-k'_+) \left( \gamma_\mu \frac{[i(k'_+ - k_-) \gamma + m]}{2k'_+ k} \gamma_\lambda - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \gamma_\lambda \frac{[i(k_+ + k_-) \gamma + m]}{2k_+ k} \gamma_\mu \right) a(-k_+) + \bar{a}(k'_-) \left( \gamma_\mu \frac{[i(k'_+ + k_-) \gamma - m]}{2k'_- k} \gamma_\lambda - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \gamma_\lambda \frac{[i(k_- - k_+) \gamma - m]}{2k_- k} \gamma_\mu \right) a(k_-) \frac{\bar{a}(-k'_+) \gamma_\lambda a(-k_+)}{q^2} \right\} \times \\
 & \times \frac{e_\mu}{\sqrt{2E}} \delta(k'_- - k'_+ - k_- + k_+ + k). \quad (9)
 \end{aligned}$$

(9) 式中的  $k$  的值是相當小的，與  $k'_-$ ,  $k_-$ ,  $k'_+$ ,  $k_+$  比較起來可以略去，所以  $S_3$  可以簡化為

$$\begin{aligned}
 S_3 = & (2\pi)^4 i e^3 \left\{ \frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda a(k_-) \bar{a}(-k'_+) \gamma_\lambda a(-k_+)}{q^2} \times \right. \\
 & \times \left[ \left( \frac{(k'_+)_\mu}{k'_+ k} - \frac{(k_+)_\mu}{k_+ k} \right) + \left( \frac{(k'_-)_\mu}{k'_- k} - \frac{(k_-)_\mu}{k_- k} \right) \right] \right\} \times \\
 & \times \frac{e_\mu}{\sqrt{2E}} \delta(k'_- - k'_+ - k_- + k_+). \quad (10)
 \end{aligned}$$

在  $S_4$  中的積分

$$\int \text{Sp} \frac{[ip \gamma - m] \gamma_\lambda [i(p+q) \gamma - m] \gamma_\mu}{(p^2 + m^2) [(p+q)^2 + m^2]} dp \quad (11)$$

和

$$\int \frac{\gamma_\mu [i(k'_- - p) \gamma - m] \gamma_\lambda [i(k_- - p) \gamma - m] \gamma_\mu}{(p^2 - 2k'_- p) (p^2 - 2k_- p) p^2} dp, \quad (12)$$

曾由費曼 (R. P. Feynman) 與阿希愛壽和貝萊次基 (А. Ахиезер и В. Б. Берестецкий) 詳細計算過<sup>[9]</sup>，讀者可參閱他們的著作，我們不在這裏重述他們的結果。

如果把積分 (12) 的值, 以  $-k'_+$ , 代  $k'_-$  以  $-k_+$  代  $k_-$ , 則我們求得積分

$$\int \frac{\gamma_\mu [i(k'_+ + p) \gamma + m] \gamma_\lambda [i(k_+ + p) \gamma + m] \gamma_\mu}{(p^2 + 2k'_+ p) (p^2 + 2k_+ p) p^2} dp \quad (13)$$

之值.

積分

$$\int \frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda [i(k_- - p) \gamma - m] \gamma_\mu a(k_-) \bar{a}(-k'_+) \gamma_\lambda [i(-k'_+ - p) \gamma - m] \gamma_\lambda a(-k_+)}{(p^2 - 2k_- p) (p^2 + 2k'_+ p) p^2 (p + q)^2} dp \quad (14)$$

可以寫為四個積分之和如下:

$$\begin{aligned} & 4(k_- k'_+) \bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda a(k_-) \bar{a}(-k'_+) \gamma_\lambda a(-k_+) \int \frac{dp}{(p^2 - 2k_- p) (p^2 + 2k'_+ p) p^2 (p + q)^2} \\ & + 2 \int \frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda (ip \gamma) (ik'_+ \gamma) a(k_-) \bar{a}(-k'_+) \gamma_\lambda a(-k_+)}{(p^2 - 2k_- p) (p^2 + 2k'_+ p) p^2 (p + q)^2} dp \\ & - 2 \int \frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda a(k_-) \bar{a}(-k'_+) (ik_- \gamma) (ip \gamma) \gamma_\lambda a(-k_+)}{(p^2 - 2k_- p) (p^2 + 2k'_+ p) p^2 (p + q)^2} dp \\ & + \int \frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda (ip \gamma) \gamma_\mu a(k_-) \bar{a}(-k'_+) \gamma_\mu (ip \gamma) \gamma_\lambda a(-k_+)}{(p^2 - 2k_- p) (p^2 + 2k'_+ p) p^2 (p + q)^2} dp. \end{aligned}$$

這些積分可用勃朗 (L. M. Brown) 與費曼的方法算得<sup>[10]</sup>.

用同樣的方法我們可以求得積分

$$\int \frac{\bar{a}(k'_-) \gamma_\lambda [i(k_- - p) \gamma - m] \gamma_\mu a(k_-) \bar{a}(-k'_+) \gamma_\lambda [i(-k'_+ + p) \gamma - m] \gamma_\mu a(-k_+)}{(p^2 - 2k_- p) (p^2 - 2k'_+ p) p^2 (p + q)^2} dp. \quad (15)$$

之值.

### (三) 微分散射截面

在我們的計算中, 我們分別考慮兩種情況: 由矩陣  $S_2$  與  $S_4$  所表示的彈性散射與由矩陣  $S_3$  所表示的非彈性散射.

在彈性散射的情況下, 彈性散射躍遷幾率 (對散射後的電子來說) 為<sup>[11]</sup>:

$$d\omega_0(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^7} (M_2^\dagger M_2 + M_2^{0\dagger} M_4 + M_4^\dagger M_2^0) \delta(E'_- - E'_+ - E_- + E_+) \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3}, \quad (16)$$

式 (16) 中的  $\delta$  函數中的  $E'_-$  與  $E_-$  表示電子在散射後與散射前的能量,  $E_+$  與

$E'_+$  表示正電子在散射後與散射前的能量。  $M_i$  為  $S_i$  去掉  $\delta$  函數後所餘下的部分：

$$S_i = M_i \delta(\bar{k}'_- - \bar{k}'_+ - \bar{k}_- + \bar{k}_+),$$

$M_i^\dagger$  為  $M_i$  的共軛量。  $d^3 k'_-$  為散射後電子的三維動量空間的體積元素。

在非彈性散射情況下的非彈性散射躍遷幾率（對散射後的電子來說）為：

$$d\omega_1(\mathbf{k}'_-) = \frac{1}{(2\pi)^7} \left[ \int M_3^\dagger M_3 \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \right] \delta(E'_- - E'_+ - E_- + E_+) \frac{d^3 \mathbf{k}'_-}{(2\pi)^3}, \quad (17)$$

其中  $\int \dots d^3 \mathbf{k}$  為對光子的三維動量的積分。

如果入射電子流每單位時間的密度為  $J$ ，則彈性微分散射截面  $d\sigma_0(\mathbf{k}'_-)$  與非彈性微分散射截面  $d\sigma_1(\mathbf{k}'_-)$  為

$$d\sigma_0(\mathbf{k}'_-) = \frac{1}{J} d\omega_0(\mathbf{k}'_-), \quad (18)$$

$$d\sigma_1(\mathbf{k}'_-) = \frac{1}{J} d\omega_1(\mathbf{k}'_-). \quad (19)$$

而總微分散射截面為

$$d\sigma(\mathbf{k}'_-) = d\sigma_0(\mathbf{k}'_-) + d\sigma_1(\mathbf{k}'_-). \quad (20)$$

在計算  $M_2^\dagger M_2$ ,  $M_2^{0\dagger} M_2^0$ , 和  $M_3^\dagger M_3$  時，我們引入費曼投射算符<sup>[12]</sup>

$$\frac{m - i\gamma K}{2m} \quad (21)$$

來對四維動量為  $K$  的電子的態取和。對於四維動量為  $K$  的正電子的態取和時，則費曼投射算符 (21) 中的  $K$  須代以  $-K$ 。我們在這些數值的計算時須對電子與正電子的不同自旋方向取平均值。我們當再注意  $a(K)$  的正則化規則為

$$\bar{a}(K) a(K) = \frac{m}{E_K}, \quad (22)$$

$E_K$  為四維動量為  $K$  的電子（或正電子）的能量。



我們從 (5) 式與 (6) 式可以求得  $M_2^\dagger M_2$  與  $M_2^{0\dagger} M_4 + M_4^\dagger M_2^0$  的值。把這些值代入 (16) 式，就可以求得彈性散射躍遷幾率  $d\omega_0(\mathbf{k}'_-)$ 。

從 (10) 式我們可以求得  $M_3^\dagger M_3$  之值。將  $M_3^\dagger M_3$  之值對光子的三維動量  $\mathbf{k}$  取積分；積分時，我們假定在非彈性散射中所放出的光子的最大能量是  $\Delta E$ 。將所算得的值代入 (17) 中，則我們求得電子與正電子散射的非彈性散射躍遷幾率  $d\omega_1(\mathbf{k}'_-)$ 。

由彈性散射躍遷幾率  $d\omega_0(\mathbf{k}'_-)$  與非彈性散射躍遷幾率  $d\omega_1(\mathbf{k}'_-)$ ，我們可以由公式 (20) 求得總微分散射截面  $d\sigma(\mathbf{k}'_-)$ 。

現在我們取散射前電子的入射方向 ( $\mathbf{k}'_-$  的方向) 為極坐標軸的方向，電子的散射角 ( $\vartheta'_-$ ) 為極角，則散射對  $\mathbf{k}'_-$  軸來講是圓柱形對稱性的，因之總微分散射截面對方位角  $\varphi'_-$  無關。對  $\varphi'_-$  取積分 (簡單地將  $d\sigma(\mathbf{k}'_-)$  的公式乘以  $2\pi$ ) 後，我們求得動量在  $k'_-$  與  $k'_- + dk'_-$  間的電子散射至角  $\vartheta'_-$  與  $\vartheta'_- + d\vartheta'_-$  間的微分散射截面

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{e^4}{E'_+ E_+ E'_- E_-} \frac{1}{J} \left\{ U + \frac{\alpha}{\pi} V \right\} \times \\ \times \delta(E'_- - E'_+ - E_- + E_+) k'^{-2} dk'_- \sin \vartheta'_- d\vartheta'_-. \quad (23)$$

其中  $U$  為原來巴泊所考慮的項， $\frac{\alpha}{\pi} V$  為由於輻射修正所引起的對散射截面的改正。

將式 (23) 變換至重心坐標系，並對散射後電子的動量的積分變為對電子的能量的積分。積分後我們得到電子散射至角  $\vartheta^*$  與  $\vartheta^* + d\vartheta^*$  間的微分散射截面 ( $\vartheta^*$  為在重心坐標系下電子的散射角)：

$$d\sigma(\vartheta^*) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{E^{*2}} \left\{ U + \frac{\alpha}{\pi} V \right\}_{C.M.S.} \sin \vartheta^* d\vartheta^*, \quad (24)$$

式 (24) 中的  $\left\{ U + \frac{\alpha}{\pi} V \right\}_{C.M.S.}$  為式 (23) 中的  $\left\{ U + \frac{\alpha}{\pi} V \right\}$  在重心坐標系下之值， $E^*$  為在重心坐標系下電子的能量。

#### (四) 在實驗室坐標系下總微分散射截面的數字值

我們把微分散射截面公式(24)變換至實驗室坐標系下,並把它化爲  $f$  與  $\epsilon$  的函數,則我們有:

$$d\sigma(f, \epsilon) = 2\pi r^2 \frac{f}{(f-1)^2 \epsilon^2} \left\{ U(f, \epsilon) + \frac{\alpha}{\pi} V(f, \epsilon) \right\} d\epsilon, \quad (25)$$

其中  $U(f, \epsilon)$  爲(1)式中的  $A(f, \epsilon) + B(f, \epsilon) + C(f, \epsilon)$ ,  $\frac{\alpha}{\pi} V(f, \epsilon)$  爲由於這計算的輻射修正項。

在表 1 中我們給出  $f = 1, 1.2, 2, 3$ ;  $\epsilon = 0.15, 0.55, 0.95$  時的  $U(f, \epsilon)$ ,  $A(f, \epsilon)$  與  $\frac{\alpha}{\pi} V(f, \epsilon)$  的數字值。在計算  $\frac{\alpha}{\pi} V(f, \epsilon)$  時,我們取  $\Delta E = 1$  Kev.

表 1

$\epsilon \backslash f$	1.0			1.2			2			3		
	$U(f, \epsilon)$	$A(f, \epsilon)$	$\frac{\alpha}{\pi} V(f, \epsilon)$	$U(f, \epsilon)$	$A(f, \epsilon)$	$\frac{\alpha}{\pi} V(f, \epsilon)$	$U(f, \epsilon)$	$A(f, \epsilon)$	$\frac{\alpha}{\pi} V(f, \epsilon)$	$U(f, \epsilon)$	$A(f, \epsilon)$	$\frac{\alpha}{\pi} V(f, \epsilon)$
0.15				.5018	.5207	-.0010	.5364	.5936	-.0018	.5784	.6538	-.0024
0.55	0.5	0.5	0	.3956	.4561	-.0014	.2934	.4169	-.0024	.3144	.4337	-.0032
0.95				.3042	.3940	-.0012	.1890	.2669	-.0020	.2977	.2671	-.0031

### 三. 結 論

輻射修正是最近量子電動力學中的一大進步,它使人們初步認識了“真空”對於宇宙間物理現象所產生的效應。在拉姆移動,電子的反常磁矩等現象中已經證明了實驗結果和輻射修正的理論是符合的。

電子與電子散射的輻射修正對散射截面的影響,已由阿希愛壽與波洛文(P. Половин)<sup>[13]</sup>、洛曼尼茲(G. R. Lomanitz)<sup>[14]</sup>與萊特海脫計算過。他們得到輻射修正對散射截面的改正是很小的。目前電子與電子散射實驗的誤差還是太大,所以在電子與電子散射現象中還不能知道輻射修正理論是否與實驗結果相符合。

在我們的電子與正電子散射的輻射修正計算中,所得到的輻射修正對於散射截面的改正也是很小的。在何、利脫等與霍克三實驗的能量範圍內,忽去了交換效應而計算輻射修正對於散射截面的改正與原散射截面之比是小於 0.5%。

在阿希金等的實驗的能量範圍內（這時  $f = 2 - 3$ ），輻射修正對於散射截面的改正與原散射截面之比約為 1%。在這情況下，我們的計算對於  $\epsilon$  小的時候（例如  $\epsilon = 0.15$ ）是相當正確的，但在  $\epsilon$  大的時候，則我們這計算的結果較差，因為在這情況下我們還須考慮交換效應。

現在在電子與正電子的散射實驗中誤差也是相當大的，在利脫等的實驗中所產生的誤差是 15%，在霍克的實驗中的誤差是大於 10%，在阿希金等的實驗中誤差是 10%。所以對於研究電子與正電子散射的輻射修正，實驗正確程度的增加是必要的。

我們在表 2 內給出上述實驗的能量範圍下的  $U(f, \epsilon)$  與  $A(f, \epsilon)$  的數字值，這些數字值在將電子與正電子散射實驗與泊巴的理論作比較時是有用的。（注意：表 2 內的數字值的小數點後三位數字是正確的）。

### 參 考 文 獻

- [1] Bhabha, H. J., *Proc. Roy. Soc.* **A154**, (1936), 195.
- [2] 何澤慧, *Compte Rendus* **222**, (1946), 1168; *Phys. Rev.* **70**, (1946), 224; *Compte Rendus* **226**, (1948), 1083; Bothe, W. 與何澤慧, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.* (1946), **59**.
- [3] Ritter, O., Liesberg, C., Maier-Leibnitz, H., Papkow, A., Schmeiser, K., und Bothe, W., *Zt. f. Naturf.* **6a**, (1951), 243.
- [4] Roy, R. R. and Groven, L., *Phil. Mag.* **43**, (1952), 1291.
- [5] Hoke, G. R., *Phys. Rev.*, **87**, (1952), 285.
- [6] Ashkin, A., Page, L. A. and Woodward, W. M., *Phys. Rev.*, **94**, (1954), 357.
- [7] 見 Ахнезер, А. и Берестецкий, В. В. *Квантовая Электродинамика (Москва) 1953* (以後簡寫為 *К. Э.*), 第四章與第五章.
- [8] Dyson, F. G., *Phys. Rev.*, **75**, (1949), 486, 1736; *К. Э.* 第五章.
- [9] Feynman, R. P., *Phys. Rev.* **76**, (1949), 769; *К. Э.* 第 345—354 頁.
- [10] Brown, L. M. and Feynman, R. P., *Phys. Rev.*, **85**, (1952), 231.
- [11] *К. Э.* 第 220—221 頁.
- [12] Feynman, R. P., *Phys. Rev.*, **76**, (1949), 749; *К. Э.* 第 59—61 頁.
- [13] Ахнезер, А. и Половин, Р., *ДАН СССР*, **90**, (1953), 55.
- [14] 洛曼尼茲的原文未曾發表, 巴丕等 (Barber, W. C., et al, *Phys. Rev.*, **89**, (1953), 950) 的關於在 6.1 Mev 下電子與電子散射的文章中曾經提到他的結果.

表 2.  $U(f, \epsilon)$  與  $A(f, \epsilon)$  之數字值

$f$ $\epsilon$	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
	U	A	U	A	U	A	U	A	U	A
.05	.5307	.5372	.5576	.5691	.5812	.5967	.6023	.6209	.6208	.6419
.15	.5018	.5207	.5083	.5409	.5173	.5601	.5269	.5777	.5364	.5936
.25	.4738	.5043	.4623	.5134	.4583	.5243	.4590	.5358	.4619	.5469
.35	.4467	.4881	.4189	.4862	.4047	.4894	.3985	.4952	.3968	.5019
.45	.4207	.4720	.3783	.4595	.3560	.4554	.3450	.4558	.3407	.4586
.55	.3956	.4561	.3406	.4334	.3123	.4222	.2985	.4177	.2934	.4169
.65	.3713	.4403	.3057	.4077	.2731	.3899	.2587	.3808	.2548	.3769
.75	.3480	.4248	.2736	.3824	.2390	.3585	.2257	.3453	.2246	.3386
.85	.3256	.4093	.2440	.3577	.2092	.3279	.1993	.3111	.2028	.3019
.95	.3042	.3940	.2173	.3334	.1842	.2982	.1792	.2780	.1890	.2669
	A	U	A	U	A	U	A	U	A	U
.05	.6880	.7171	.6771	.7051	.6520	.6770	.6605	.6520	.6520	.6770
.15	.6538	.6824	.6438	.6710	.6211	.6438	.6080	.6211	.6330	.6438
.25	.5937	.6223	.5769	.6044	.5575	.5769	.5457	.5575	.5769	.5856
.35	.5371	.5657	.5164	.5444	.4978	.5164	.4661	.4978	.5164	.5305
.45	.4838	.5124	.4631	.4911	.4462	.4631	.4148	.4462	.4631	.4783
.55	.4337	.4623	.4130	.4410	.3961	.4130	.3647	.3961	.4130	.4293
.65	.3871	.4157	.3664	.3944	.3495	.3664	.3211	.3495	.3664	.3832
.75	.3438	.3724	.3231	.3511	.3062	.3231	.2748	.3062	.3231	.3403
.85	.3037	.3323	.2830	.3110	.2661	.2830	.2377	.2661	.2830	.3003
.95	.2671	.2957	.2464	.2744	.2285	.2464	.2012	.2285	.2464	.2635

## THE RADIATIVE CORRECTIONS TO THE SCATTERING OF ELECTRONS AND POSITRONS

KING SING-NAN

*(Institute of Physics, Academia Sinica)*

### ABSTRACT

With the Møller's theory of scattering between the electrons and the Dirac's hole theory, Bhabha has obtained the formula for the scattering of the electrons and the positrons. The experimental evidence of this phenomenon was discovered by Ho (何澤慧), and she has studied this phenomenon by means of the  $\beta^+$ -radioactivity of the  $\beta^+$  sources such as  $\text{Mn}^{52}$ , and  $\text{F}^{18}$  in the cloud chamber. The comparison of the theory and the experiment was done (see reference [2], [3], [4], [5] and [6].) by Ho, O. Ritter et al, R. R. Roy and L. Groven, G. R. Hoke and A. Ashkin et al.

The purpose of the present work is to show the effect of the radiative corrections to the scattering of the electrons and the positrons by the method in the quantum electrodynamics developed by S. Tomonaga, J. Schwinger, R. P. Feynman and F. J. Dyson.

In the above-mentioned electron and positron scattering experiments, the contributions to the scattering cross-section are mostly due to the positrons of low energies (about 0.1 to 0.2 Mev). In this energy range, the exchange effect in Bhabha's theory is small. In this work for the radiative corrections to the scattering of the electrons and the positrons, we have neglected this exchange effect. The ratio of the correction of the scattering cross-section due to the radiative corrections to the scattering cross-section of Bhabha's theory at this energy range does not exceed 1%. For experiments of the low energy positrons and of the higher energy positrons (e.g. positrons with energies of 0.5 Mev to 1 Mev as in the experiment of Ashkin et al) with small exchanges of energy between the electrons and the positrons during scattering, our calculation is adequate. But for positrons of higher energies and with large exchanges during scattering, our calculation should be improved by considering the exchange effect.

