物 理 學 報

第 11 卷 第 3 期 1955 年 5 月

變厚度彈性圓薄板問題

葉 開 沅

(北 京 大 學)

一. 引 言

變厚度的圓薄板常常在機器零件的設計中遇到,例如蒸汽渦輪機和活塞的膜片便是.

用平板小撓度理論求解變厚度平板問題並不是容易的事,因此到目前爲止,這類的實際問題已解決的爲數並不多. 處理過這問題的有郝滋爾[1](Holzer, H.),畢樞勒[2] (Pichler, O.), 奧宋[3,4,5] (Olsson, R. G.), 康匯[6] (Conway, H. D.) 拉森納兒[7] (Reissner, M. E.). 這些解答是解析的,但在計算的過程中尤其對於數字計算來說是非常繁冗的,因爲解答中包含有特殊函數例如指數積分和匯合超幾何函數. 馮元禎[8] 引進兩個應力函數來表示彎曲力矩、扭轉力矩和剪力. 這樣便可使得一些邊界條件(特別是懸空邊)簡化. 他用張弛法處理了幾個例子.

在 1953 年和 1954 年間,中國科學院數學研究所力學研究室曾進行一系列的力學問題報告會,在關於彈性圓薄板大撓度問題的討論會[9] 上,錢偉長教授建議用小參數法來解決不等厚的圓薄板問題;在關於一般薄板問題的討論會[10]上,作者提供了解決變厚度圓薄板問題的具體步驟. 本文便是依照這步驟來進行的. 我們用小參數法重新處理了畢樞勒[2,11]的問題,得到的結果很良好,證實我們在討論會中的看法是正確的. 這種方法數字計算的步驟簡單,因此便有可能推廣. 這裏我們還列出了應力的設計公式.

二. 對稱變厚度圓薄板問題的基本方程

現在我們來求在均勻載荷下的變厚度圓薄板問題的基本方程. 考慮圖 1 中小元素 $abcd$ 的力矩平衡,我們有

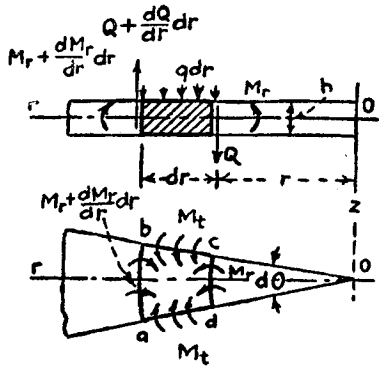

圖 1. 圓板的平衡和它的兩個剖面

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_t + Qr = 0\,, \qquad (1)$$

其中 M_r 是單位長度徑向彎曲力矩，M_t 是單位長度切向彎曲力矩，Q 是單位長度剪力.

我們知道:

$$M_r = -D\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right), \qquad (2)$$

$$M_t = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \mu\frac{d^2 w}{dr^2}\right), \qquad (3)$$

其中 w 是垂直撓度，$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 是圓平板的抗撓剛度，h 爲板的厚度，μ 是泊松比.

Q 和單位面積載荷 q 有下列的關係:

$$Q = \frac{1}{2\pi r}\int_0^r q\, 2\pi r\, dr\,. \qquad (4)$$

以 (2)，(3)，(4) 式中的 M_r, M_t, Q 代入方程 (1)，我們有

$$D\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) + \frac{dD}{dr}\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right) = \frac{1}{r}\int_0^r qr\, dr\,. \qquad (5)$$

若載荷是均勻的,則上式可寫成

$$D\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) + \frac{dD}{dr}\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right) = \frac{1}{2}qr\,, \qquad (6)$$

這就是均勻載荷下變厚度圓薄板問題的基本方程.

假定平板的厚度 h 爲下式所表示:

$$h = h_0\, e^{-\frac{\beta}{b}\left(\frac{r}{a}\right)^2}\,, \qquad (7)$$

其中 β, h_0 爲常數,對於不同的 β，沿着平板的直徑的厚度變化如圖 2 所示.

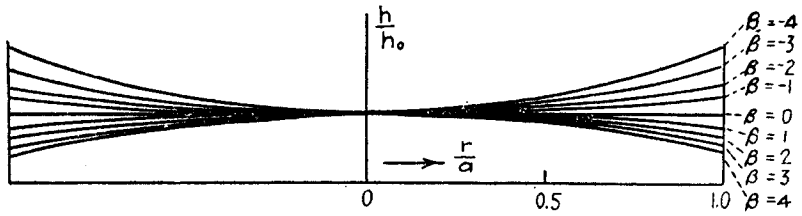

圖 2. 對於不同的 β，沿着平板的直徑厚度變化

引進下列新變數：

$$x=\left(\frac{r}{a}\right)^2,\quad y=\frac{w}{h_0},\quad Q=\frac{3a^4(1-\mu^2)}{4Eh_0^4}q, \tag{8}$$

其中 a 是圓板的半徑.

以 (7) 式中的 h 代入方程 (6)，然後利用 (8) 式中的關係把它化成無量綱形式

$$\frac{d^2}{dx^2}x\frac{dy}{dx}-\frac{\beta}{4}\left[2x\frac{d^2y}{dx^2}+(1+\mu)\frac{dy}{dx}\right]=Q\,e^{\frac{\beta x}{2}}. \tag{9}$$

在邊緣固定的情形下，邊界條件是

當 $x=1$ 時，　　$y=0,\ \dfrac{dy}{dx}=0;$ (10)

當 $x=0$ 時，　　$\dfrac{dy}{dx}$ 有限. (11)

三. 方 程 的 解 法

現在我們要在邊界條件 (10)，(11) 下，用小參數法來解方程 (9).

由 (8) 式，(6) 式可寫成

$$h=h_0\,e^{-\epsilon x}, \tag{12}$$

其中 $\epsilon=\dfrac{\beta}{6}$，將上式展開，我們有

$$h=h_0\left(1-\epsilon x+\frac{\epsilon^2}{2!}x^2-\frac{\epsilon^3x^3}{3!}+\cdots\right). \tag{13}$$

在這裏我們選擇了 ϵ 作爲小參數，在 h 的變化不大時，是可以這樣做的.

把方程 (9) 中的因變數 y 展開爲 ϵ 的升冪級數，它可以寫成下面的樣子：

$$y=y_0(x)+y_1(x)\,\epsilon+y_2(x)\,\epsilon^2+\cdots, \tag{14}$$

其中 $y_0, y_1, y_2\cdots$ 是待定的含 x 的函數. 將 (14) 式中的 y 代入方程 (9) 和邊界條件 (10)，(11) 中，依照 ϵ 的次數，將各項次數相同的歸併在一塊，我們便可得到一系列對於 y_0, y_1, y_2 等及其相關邊界條件的微分方程.

對於 y_0，我們得到下列的方程和邊界條件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}\,x\,\frac{dy}{dx}=Q\,,\\&y_0(1)=0\,,\quad \frac{dy_0(1)}{dx}=0\,,\quad \frac{dy_0(0)}{dx}\ \text{有限}.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

方程（15）的解答是

$$y_0=\frac{Q}{4}(x^2-2x+1)\,,\tag{16}$$

這就是著名的在均匀載荷下，小撓度圓板的解(或泊松理論的解).

對於 y_1，我們有下列的方程和邊界條件:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}\,x\,\frac{dy_1}{dx}=3\left[x\frac{d^2y_0}{dx^2}+\frac{1}{2}(1+\mu)\frac{dy_0}{dx}+Qx\right],\\&y_1(1)=0\,,\quad \frac{dy_1(1)}{dx}=0\,,\quad \frac{dy_1(0)}{dx}\ \text{有限}.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

利用（16）式，方程（17）可寫成

$$\frac{d^2}{dx^2}\,x\,\frac{dy_1}{dx}=\frac{3Q}{4}[(7+\mu)x-(1+\mu)]\,,\tag{18}$$

解此方程，我們卽得出

$$y_1=\frac{Q}{48}[2(7+\mu)x^3-9(1+\mu)x^2-12(2-\mu)x+(19-5\mu)]\,.\tag{19}$$

對於 y_2，我們有下列的方程和邊界條件:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}\,x\,\frac{dy_2}{dx}=3\left[x\frac{d^2y_1}{dx^2}+\frac{1}{2}(1+\mu)\frac{dy_1}{dx}+\frac{3}{2}Qx^2\right],\\&y_2(1)=0\,,\quad \frac{dy_2(1)}{dx}=0\,,\quad \frac{dy_2(0)}{dx}\ \text{有限}.\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

利用（19）式，方程（20）可寫成

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\,x\,\frac{dy_2}{dx}=\frac{Q}{16}[&(177+36\mu+3\mu^2)x^2-\\&-(27+36\mu+9\mu^2)x-2(6+3\mu-3\mu^2)]\,.\end{aligned}\tag{21}$$

解此方程，我們卽得出

$$y_2=\frac{Q}{256}[(59+12\mu+\mu^2)x^4-8(3+4\mu+\mu^2)x^3-$$

$$-8(6+3\mu-3\mu^2)x^2-4(17-24\mu+7\mu^2)x+$$
$$+(81-52\mu+11\mu^2)]. \tag{22}$$

對於 y_3，我們有下列的方程和邊界條件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}x\frac{dy_3}{dx}=3\left[x\frac{d^2y_2}{dx^2}+\frac{1}{2}(1+\mu)\frac{dy_2}{dx}+\frac{3}{2}Qx^3\right],\\&y_3(1)=0,\quad \frac{dy_3(1)}{dx}=0,\quad \frac{dy_3(0)}{dx}\text{ 有限}.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

由方程（22）可求出 $\frac{dy_2}{dx}$ 及 $\frac{d^2y_2}{dx^2}$，以此代入方程（23），我們卽得出

$$\frac{d^2}{dx^2}x\frac{dy_3}{dx}=\frac{3Q}{128}[(605+143\mu+19\mu^2+\mu^3)x^3-$$
$$-2(45+69\mu+27\mu^2+3\mu^3)x^2-$$
$$-4(18+15\mu-6\mu^2-3\mu^3)x-(17-7\mu-17\mu^2+7\mu^3)]. \tag{24}$$

解此方程，我們卽得出

$$y_3=\frac{Q}{25600}[6(605+143\mu+19\mu^2+\mu^3)x^5-$$
$$-75(15+23\mu+9\mu^2+\mu^3)x^4-$$
$$-400(6+5\mu-2\mu^2-\mu^3)x^3-150(17-7\mu-17\mu^2+7\mu^3)x^2-$$
$$-30(45-217\mu+179\mu^2-39\mu^3)x+$$
$$+(3795-4693\mu+2581\mu^2-451\mu^3)]. \tag{25}$$

對於 y_4，我們有下列的方程和邊界條件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}x\frac{dy_4}{dx}=3\left[x\frac{d^2y_3}{dx^2}+\frac{1}{2}(1+\mu)\frac{dy_3}{dx}+\frac{9}{8}Qx^4\right],\\&y_4(1)=0,\quad \frac{dy_4(1)}{dx}=0,\quad \frac{dy_4(0)}{dx}\text{ 有限}.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

由方程（25）可求出 $\frac{dy_3}{dx}$ 及 $\frac{d^2y_3}{dx^2}$，以此代入方程（26），我們有下列的方程：

$$\frac{d^2}{dx^2}x\frac{dy_4}{dx}=\frac{9Q}{5120}[(7365+1892\mu+314\mu^2+28\mu^3+\mu^4)x^4-$$
$$-10(105+176\mu+86\mu^2+16\mu^3+\mu^4)x^3-$$

$$
\begin{aligned}
&-40\,(30+31\mu-5\mu^2-7\mu^3-\mu^4)\,x^2-\\
&-10\,(51-4\mu-58\mu^2+4\mu^3+7\mu^4)\,x-\\
&-(45-172\mu-38\mu^2+140\mu^3-39\mu^4)\,]\,. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

解此方程,我們卽得出

$$
\begin{aligned}
y_4=\frac{Q}{102400}\,[&(7365+1892\mu+314\mu^2+28\mu^3+\mu^4)\,x^6-\\
&-18\,(105+176\mu+86\mu^2+16\mu^3+\mu^4)\,x^5-\\
&-150\,(30+31\mu-5\mu^2-7\mu^3-\mu^4)\,x^4-\\
&-100\,(51-4\mu-58\mu^2+4\mu^3+7\mu^4)\,x^3-\\
&-45\,(45-172\mu-38\mu^2+140\mu^3-39\mu^4)\,x^2+\\
&+18\,(145+356\mu-998\mu^2+604\mu^3-107\mu^4)\,x+\\
&+3\,(1180-2874\mu+3646\mu^2-1654\mu^3+246\mu^4)\,]\,. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

四. 應力的設計公式

我們知道:

$$\sigma_r''=-\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right), \qquad (29)$$

$$\sigma_t''=-\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\mu\frac{d^2w}{dr^2}\right), \qquad (30)$$

其中 σ_r'', σ_t'' 是徑向和切向的彎曲應力, z 是與中心面的距離.

由 (8) 式,將 (29) 和 (30) 式變換成無量綱形式,我們得到

$$\sigma_r''=-\frac{Eh_0^2\,e^{-\epsilon x}}{(1-\mu^2)\,a^2}\left[2x\frac{d^2y}{dx^2}+(1+\mu)\frac{dy}{dx}\right],\ \left(z=\frac{h}{2}\right), \qquad (31)$$

$$\sigma_t''=-\frac{Eh_0^2\,e^{-\epsilon x}}{(1-\mu^2)\,a^2}\left[(1+\mu)\frac{dy}{dx}+2\mu x\frac{d^2y}{dx^2}\right],\ \left(z=\frac{h}{2}\right). \qquad (32)$$

我們令

$$\Sigma_r''=\frac{(1-\mu^2)\,a^2\,\sigma_r''}{Eh_0^2}, \qquad (33)$$

$$\Sigma_t''=\frac{(1-\mu^2)\,a^2\,\sigma_t''}{Eh_0^2}. \qquad (34)$$

(31) 和 (32) 式可以寫成

$$\Sigma_r'' = -e^{-\epsilon x}\left[2x\frac{d^2y}{dx^2} + (1+\mu)\frac{dy}{dx}\right], \tag{35}$$

$$\Sigma_t'' = -e^{-\epsilon x}\left[(1+\mu)\frac{dy}{dx} + 2\mu x\frac{d^2y}{dx^2}\right]. \tag{36}$$

在我們的情形中，所求得的結果如下：

$$\Sigma_r'' = -e^{-\epsilon x}(\Sigma_{r0}'' + \Sigma_{r1}''\epsilon + \Sigma_{r2}''\epsilon^2 + \Sigma_{r3}''\epsilon^3 + \Sigma_{r4}''\epsilon^4), \tag{37}$$

其中

$$\Sigma_{r0}'' = \frac{Q}{2}[(3+\mu)x-(1+\mu)], \tag{38}$$

$$\Sigma_{r1}'' = \frac{Q}{8}[(35+12\mu+\mu^2)x^2-3(3+4\mu+\mu^2)x-2(2+\mu-\mu^2)], \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{r2}'' = \frac{Q}{64}[&(413+143\mu+19\mu^2+\mu^3)x^3-6(15+23\mu+9\mu^2+\mu^3)x^2-\\&-4(18+15\mu-6\mu^2-3\mu^3)x-(17-7\mu-17\mu^2+\mu^3)],\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{r3}'' = \frac{3Q}{2560}[&(5445+1892\mu+314\mu^2+28\mu^3+\mu^4)x^4-\\&-10(105+176\mu+86\mu^2+16\mu^3+\mu^4)x^3-\\&-40(30+31\mu-5\mu^2-7\mu^3-\mu^4)x^2-\\&-10(51-4\mu-58\mu^2+4\mu^3+7\mu^4)x-\\&-(45-172\mu-38\mu^2+140\mu^3-39\mu^4)],\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{r4}'' = \frac{3Q}{51200}[&(81015+28177\mu+5346\mu^2+622\mu^3+39\mu^4+\mu^5)x^5-\\&-15(945+1689\mu+950\mu^2+230\mu^3+25\mu^4+\mu^5)x^4-\\&-100(210+247\mu-4\mu^2-54\mu^3-14\mu^4-\mu^5)x^3-\\&-50(255+31\mu-294\mu^2-38\mu^3+39\mu^4+7\mu^5)x^2-\\&-15(135-471\mu-286\mu^2+382\mu^3+23\mu^4-39\mu^5)x+\\&+(435+1503\mu-1926\mu^2-1182\mu^3+1491\mu^4-321\mu^5)].\end{aligned} \tag{42}$$

$$\Sigma_t'' = -e^{-\epsilon x}(\Sigma_{t0}'' + \Sigma_{t1}''\epsilon + \Sigma_{t2}''\epsilon^2 + \Sigma_{t3}''\epsilon^3 + \Sigma_{t4}''\epsilon^4), \tag{43}$$

其中

$$\Sigma''_{t0}=\frac{Q}{2}\left[(1+3\mu)\,x-(1+\mu)\right], \tag{44}$$

$$\Sigma''_{t1}=\frac{Q}{8}\left[(7+36\mu+5\mu^2)\,x^2-3\,(1+4\mu+3\mu^2)\,x-2\,(2+\mu-\mu^2)\right], \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\Sigma''_{t2}=\frac{Q}{64}\Big[&(59+425\mu+85\mu^2+7\mu^3)\,x^3-\\&-6\,(3+19\mu+21\mu^2+5\mu^3)\,x^2-12\,(2+7\mu+2\mu^2-3\mu^3)\,x-\\&-(17-7\mu-17\mu^2+7\mu^3)\Big],\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\Sigma''_{t3}=\frac{3Q}{2560}\Big[&(605+5588\mu+1306\mu^2+172\mu^3+9\mu^4)\,x^4-\\&-10\,(15+128\mu+170\mu^2+64\mu^3+7\mu^4)\,x^3-\\&-40\,(6+35\mu+23\mu^2-11\mu^3-5\mu^4)\,x^2-\\&-10\,(17+44\mu-38\mu^2-44\mu^3+21\mu^4)\,x-\\&-(45-172\mu-38\mu^2+140\mu^3-39\mu^4)\Big],\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\Sigma''_{t4}=\frac{3Q}{51200}\Big[&(7365+82907\mu+21126\mu^2+3482\mu^3+309\mu^4+11\mu^5)\,x^5-\\&-15\,(105+1121\mu+1670\mu^2+790\mu^3+145\mu^4+9\mu^5)\,x^4-\\&-100\,(30+241\mu+212\mu^2-42\mu^3-50\mu^4-7\mu^5)\,x^3-\\&-50\,(51+251\mu-78\mu^2-286\mu^3+27\mu^4+35\mu^5)\,x^2-\\&-2\,(135-111\mu-1662\mu^2+78\mu^3+1143\mu^4-351\,\mu^5)\,x+\\&+(435+1503\mu-1926\mu^2-1182\mu^3+1491\mu^4-321\mu^5)\Big].\end{aligned} \tag{48}$$

用上面的結果,我們有下面的設計公式:

$\Sigma''_r(0)=$ 在中心的徑向折合彎曲應力

$$\begin{aligned}&=Q\Big[\frac{1}{2}(1+\mu)+\frac{1}{4}(2+\mu-\mu^2)\,\epsilon+\\&+\frac{1}{64}(17-7\mu-17\mu^2+\mu^3)\,\epsilon^2+\\&+\frac{3}{2560}(45-172\mu-38\mu^2+140\mu^3-39\mu^4)\,\epsilon^3+\\&+\frac{3}{51200}(435+1503\mu-1926\mu^2-1182\mu^3+1491\mu^4-321\mu^4)\,\epsilon^4\Big],\end{aligned} \tag{49}$$

$\Sigma''_r(1)=$ 在邊緣的徑向折合彎曲應力

$$= -Qe^{-\epsilon}[1+\frac{1}{4}(11-\mu)\epsilon+\frac{1}{32}(117-24\mu+3\mu^2)\epsilon^2+$$

$$+\frac{3}{160}(165-56\mu+17\mu^2-2\mu^3)\epsilon^3+$$

$$+\frac{3}{51200}(3150-1482\mu+856\mu^2-244\mu^3+26\mu^4)\epsilon^4]. \tag{50}$$

五. 討　　論

在 [11] 中,平板的中心撓度用下面的公式來表示:

$$w_{\max}=\alpha\frac{6(1-\mu^2)a^4q}{Eh_0^3}, \tag{51}$$

其中 α 是一決定於常數 β 的數字因子.

在我們的情形中,平板的中心撓度可用下面的式子來表示:

$$y(0)=Q[\frac{1}{4}+\frac{1}{48}(19-5\mu)\epsilon+\frac{1}{256}(81-52\mu+11\mu^2)\epsilon^2+$$

$$+\frac{1}{25600}(3795-4693\mu+2581\mu^2-451\mu^3)\epsilon^3+$$

$$+\frac{3}{102400}(1180-2874\mu+3646\mu^2-1654\mu^3+246\mu^4)\epsilon^4], \tag{52}$$

因此, α 可以寫成如下的樣子:

$$\alpha=\sum_{i=0}^{4}\alpha_i, \tag{53}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0&=\frac{1}{32},\\
\alpha_1&=\frac{1}{384}(19-5\mu)\epsilon,\\
\alpha_2&=\frac{1}{2048}(81-52\mu+11\mu^2)\epsilon^2,\\
\alpha_3&=\frac{1}{204800}(3795-4693\mu+2581\mu^2-451\mu^3)\epsilon^3,\\
\alpha_4&=\frac{3}{819200}(1180-2874\mu+3646\mu^2-1654\mu^3+246\mu^4)\epsilon^4.
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

現在我們把 $\mu = 0.3$ 時所計算得到的 α_i 的值列在表 1 中.

表 1. α_i 的值 (當 $\mu = 0.3$)

α_i \ β	1	2	3	4
α_0	0.031250	0.031250	0.031250	0.031250
α_1	0.007596	0.015191	0.022787	0.030382
α_2	0.000900	0.003602	0.008104	0.014408
α_3	0.000059	0.000472	0.001591	0.003772
α_4	0.000002	0.000027	0.000138	0.000436

由表 1 可以看出,我們算至四次近似已很够準確了.

現在把我們所得的結果和畢樞勒用級數法所得的結果來比較一下, 表 2 表示用二種不同的方法求得的 α 值.

表 2. 計算變厚度圓薄板中心撓度的數字因子 α ($\mu = 0.3$)

β	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
畢樞勒的結果	0.0801	0.0639	0.0505	0.0398	0.0313	0.0246	0.0192	0.0152	0.01195
本文的結果	0.0802	0.0639	0.0505	0.0398	0.0313	0.0245	0.0192	0.0151	0.01194

由表 2 我們可以看出, 級數法所得的結果和本文用小參數法所得的結果是完全一致的,但我們的運算却比原來大大地簡化. 在以前處理過的問題中,只考慮抗撓變剛度是向徑 r 的一次式或二次式的情形, 這是因爲處理問題的方法會給較複雜的情形以很大的限制. 現在我們可以把上述情形推廣, 將厚度寫成下式:

$$h = h_0 + \epsilon h_1(r), \tag{55}$$

其中 ϵ 是一小參數,這種情形顯然是可以解決的.

一些工程需要的較複雜的情形,若用以往的方法困難是會很大的, 但用小參變數法是可以得到適當地解決的.

錢偉長教授在完成本文的過程中,給作者以極大的幫助與關懷, 謹在這裏向他致以衷心的謝忱.

參 考 文 獻

[1] Holzer, H., *Z. ges. Turbinenwesen,* **15** (1918), 21.

[2] Pichler, O., Die Biegung Kreissymmetrischen Platten von Veränderlicher Dicke, Dissertation Stuttgart, Berlin, Germany, 1928 (亦可參閱 [11]).

[3] Olsson, R. G., Biegung Kreisförmiger Platten von radial Veränderlicher Dicke, *Ingenieur-Archiv.,* **8**, p. 81–98, 1937.

[4] Olsson, R. G., Unsymmetrische Biegung der Kreisringplate von Quadratisch Veränderlicher Steifigkeit, *Ingenieur-Archiv.,* **10** (1939), 14–27; **11** (1940), 259–264; **13** (1942-1943), 147–154.

[5] Olsson, R. G., Biegung der Rechteckplate bei Linear Veränderlicher Biegungssteifigkeit, *Ingenieur-Archiv.,* **5** (1934), 363–373. (也可參閱 [11] p. 194).

[6] Conway, H. D., Symmetrically Loaded Circular Plates of Variable Thickness, *J. Appl. Mech., Trans. ASME,* **1948**, 1–6.

[7] Reissner, M. E., Remark on the Theory of Bending of plates of Variable Thickness, *Jour. Math. & Physics,* **16** (1937), 43–45.

[8] Fung, Y. C. (馮元楨), Bending of thin Elastic plates of Variable Thickness, *Journal of the Aeronautical Sciences,* **20** (1953), (7), 455–468.

[9] 錢偉長、林鴻蓀、胡海昌、葉開沅，彈性圓薄板大撓度問題，中國科學院數學研究所力學研究室專刊乙種第 1 號，力學問題論集第一輯，P. 130，中國科學院出版，1954 年.

[10] 胡海昌、葉開沅、張福範，彈性薄板的小撓度平衡問題，中國科學院數學研究所力學研究室乙種專刊第 2 號，力學問題論集第二輯，第 110 頁，中國科學院出版，1955 年 2 月第一版.

[11] Timoshenko, S., Theory of Plates and Shells, 龍門聯合書局翻印.

BENDING OF A THIN ELASTIC PLATE OF VARIABLE THICKNESS

YEH KAI-YUAN

(*Peking University*)

ABSTRACT

The classical Kirchhoff-Love theory of thin plates when applied to plates of variable thickness results in a fourth-order partial differential equation with variable coefficients which is difficult to solve. So far, only three cases are known with numerical certainty, namely, the symmetrical bending of circular plates, the unsymmetrical bending of a circular plate with quadratically varying stiffness, and a rectangular plate with linear stiffness in one direction and simply supported on two opposite edges. These solutions are analytic, generally involving special functions such as the exponential integrals and the confluent hypergeometric functions. The only difficulties involved are apparently in the nature of disagreeable computation.

The problem of a clamped edge circular plate under uniform load with thickness represented by the expression

$$h = h_0 e^{-\frac{\beta}{6}\left(\frac{r}{a}\right)^2} \tag{A}$$

where β and h_0 are constants and a is the radius of the plate, has been discussed by Pichler. In this paper, we shall treat this problem again by means of the small parameter method. The results obtained by this method are equivalent to that of the series method, but in a greatly simplified form.

The fundamental equation of this problem is

$$\frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy}{dx} - \frac{\beta}{4}\left[2x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1+\mu)\frac{dy}{dx}\right] = Q e^{\frac{\beta x}{2}}. \tag{B}$$

where

$$x = \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad y = \frac{w}{h_0}, \quad Q = \frac{3a^4 (1-\mu^2) q}{4 E h_0^4}. \tag{C}$$

The boundary conditions are

$$\left.\begin{aligned} & y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{as } x = 1, \\ & \frac{dy}{dx} \text{ remains finite, as } x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{D}$$

The independent variable y is expanded in ascending power series with ϵ as parameter

$$y = y_0(x) + y_1(x)\epsilon + y_2(x)\epsilon^2 + \cdots \tag{E}$$

where $y_0, y_1, y_2 \ldots$ are functions of x to be determined and ϵ is a chosen small parameter which equals to $\frac{\beta}{6}$.

We substitute the expression (E) into (B) and also into the boundary conditions (D). By collecting terms of the successive order in ϵ, we obtain a sequence of differential equations for $y_0, y_1, y_2 \ldots$ etc. accompanied by the corresponding boundary conditions, and thus the problem is solved.

The present results give also the stresses in the plate in explicit expression.

All these results are presented in such a form that the direct application in design problem is possible.