第 18 卷 第 12 期
1962 年 12 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 18, No. 12
Dec., 1962

电磁理論中算符的一些性質*

顾 福 年
(江 西 大 学)

提 要

在本文中，把在不均匀各向异性介質中的麦克斯韦方程看作算符，它定义在一个有界区域，可以被理解为微波技术中的諧振腔．但在这腔中充塡着鉄氧体，等离子体或其他各向异性介質，这些介質在应用中日益重要． 文中証明了在某些 $\overleftrightarrow{\mu}$、$\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 和边界条件下，算符成为对称．而对称性和自伴性在本征函数展开中带来很多方便；此外我們推导了本征振动的正交性和互易定理．

如果不滿足对称性，引入伴諧振腔的概念，所謂伴諧振腔在几何形状上和原来的腔相同，但 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$、$\overleftrightarrow{\mu}$ 和边界条件不一样．它和自伴諧振腔在正交性和互易定理上有某些相似之处．

本来从事研究各种电磁現象的工作者，都致力于解决各种具体問題，經过了相当长时期后，有了丰富成果的积累，有可能来总結一下过去的結果，并表达成抽象的形式． 特别是近来对各种尖端技术的研究；如鉄氧体和等离子体等，都大大增加了問題的复杂性，那些各向异性、不均匀的介質的性質，有很多是和各向同性、均匀介質是不相同的，更要求用比較簡炼的数学語言来說明、来概括． 从 1956 年起就开始有人用算符来叙述正交性、互易定理、展开式等問題[1,2,3]．

一

本文首先研究各向异性、不均匀介質的麦克斯韦方程的自伴性，并給出一个充分条件，我們知道自伴和非自伴在正交性和本征函数的展开上有很大区别，在以前曾对不均匀、各向异性介質充滿在波导管中的情况[1]和諧振腔中电磁場的正交性[4]加以研究，但是他們在正交性的表示式中，都引入了所謂权函数或者"权算符"的概念，这对于叙述和应用都不大方便，而且对自伴的概念不甚注意，本文就从比較严密的数学观点来考虑这个問題，而且对文献[3]中所叙述的互易定理亦有了更一般的叙述．

为了說明方便起見，只把微波技术中的諧振腔作为說明問題的对象，在波导管中的情况就完全类似，这腔体外壁一般是用良好金属导体組成，是单連通或多連通三維有界区域，在金属面上有或大或小的一个或数个洞隙和外面相通；以便得到电磁的激励，使能量存在的型式有所改变． 在腔內仅有空气或者放某种介質，現在可以訊为是放鉄气体或者等离子体．

我們的出发点是麦克斯韦方程，設 $\overleftrightarrow{\mu}$、$\overleftrightarrow{\varepsilon}$、$\overleftrightarrow{\sigma}$ 分别是导磁率张量，介电系数张量和导电

* 1962 年 3 月 26 日收到．

率张量，它們都是三阶的正方矩陣，而且假定电磁場是单色波和时間的关系是 $e^{-i\omega t}$. 又假定 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 和 $\overleftrightarrow{\mu}$ 的逆矩陣都存在，现在把 $(\mathbf{E}, i\mathbf{H})$ 組成六个分量的矢量函数空間，則麦克斯韦方程在无源的情况下，写成算符形式如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}\nabla x \\ \overleftrightarrow{\mu}^{-1}\nabla x & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ i\mathbf{H} \end{pmatrix} - \omega\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ i\mathbf{H} \end{pmatrix} = 0, \tag{1}$$

这里 $\mathbf{0}$ 是三行三列元素均为零的矩陣，而微分算符 ∇x 在直角座标系中是

$$\nabla x \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix},$$

这样的算符 $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}\nabla x \\ \overleftrightarrow{\mu}^{-1}\nabla x & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 显然不对称，当然不可能是自伴的，現在我們假定 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 和 $\overleftrightarrow{\mu}$ 是厄密矩陣，而且是正定的、可交换的. 这在一些鉄氧体和等离子体中是成立的[5]，因为在某一直角座标系下，其导磁率张量和介电系数张量具有下面的形式：

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{11} \end{bmatrix},$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{bmatrix},$$

这里 μ、μ_a、ε、ε_a、μ_{11}、ε_{11} 都是大于 0 的实数，显然这是厄密型的，不难証明它們在下面定义的內积下是正定的[1]：

$$(\varphi, \psi) = \iiint \varphi \cdot \psi^* dv,$$

只要 $\mu > \mu_a$, $\varepsilon > \varepsilon_a$（这要求符合物理情况）. 如把矩陣 $\overleftrightarrow{\mu}$ 和 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 看作三維空間的算符，則可称它們为对称、有界、可逆、正定的算符；另外关于 $\overleftrightarrow{\mu}$ 和 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 的可交换性也立即可得. 在这些假定下，有下面的結論[6]：

1. $\overleftrightarrow{\mu}$ 和 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 各有平方根——$\overleftrightarrow{\mu}^{\frac{1}{2}}$ 和 $\overleftrightarrow{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$，而且亦是正定、厄密型的，它們之間亦可以互换；
2. $\overleftrightarrow{\mu}^{-1}$ 和 $\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}$ 各有平方根，而且亦是正定的，厄密型的，它們之間亦可以互换；
3. $\overleftrightarrow{\mu}\ \overleftrightarrow{\varepsilon}$ 亦是正定的，有平方根 $\overleftrightarrow{\mu}^{\frac{1}{2}}\overleftrightarrow{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} = (\overleftrightarrow{\mu}\ \overleftrightarrow{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} = \overleftrightarrow{\mathscr{K}}$.

作一个变换，定

$$\mathscr{E} = \sqrt{-i\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}}\,\mathbf{E}, \mathscr{H} = \sqrt{i\omega\overleftrightarrow{\mu}}\,\mathbf{H}. \tag{2}$$

这样在麦克斯韦方程的两边分别左乘以矩陣 $\sqrt{-i\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}}$ 和 $\sqrt{i\omega\overleftrightarrow{\mu}}$，則(1)式变为

1) 矩陣 A 如滿足 $(A\varphi, \varphi) > 0$ 則 A 为正定矩陣.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\nabla x\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}} \\ \overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\nabla x\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathscr{E}\\ \mathscr{H}\end{pmatrix} - \omega\begin{pmatrix}\mathscr{E}\\ \mathscr{H}\end{pmatrix} = 0, \tag{3}$$

或者簡写为

$$A\boldsymbol{\varphi} - \omega\boldsymbol{\varphi} = 0, \tag{3$'$}$$

这里 $\boldsymbol{\varphi}$ 是六分量的函数矢量，可以把它写成两个三分量的函数矢量 $\boldsymbol{\varphi}_1$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_2$ 如下：

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1\\ \boldsymbol{\varphi}_2\end{pmatrix}.$$

定义內积

$$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \iiint\limits_G \boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\psi}^* dv,$$

G 是有界区域，其边界面 S 片片光滑，$\boldsymbol{\varphi}$ 組成希伯特空間．算符 A 的定义域是連續可微矢量函数，它們在希伯特空間內稠密．A 是一个綫性、无界算符．A 的定义区域还沒有完全确定，下面就是研究如果 A 是对称算符，要求在曲面 S 上滿足某些边界条件：

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) - (\boldsymbol{\varphi}, A\boldsymbol{\psi}) &= (\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\nabla x\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\psi}_1) + (\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\nabla x\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\psi}_2) - \\ &- (\boldsymbol{\varphi}_2, \overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\nabla x\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_1) - (\boldsymbol{\varphi}_1, \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\nabla x\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_2) = \\ &= \iiint\limits_G [\nabla x\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_2\cdot(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_1)^* + \nabla x\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_1\cdot(\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_2)^* - \\ &- \overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_2\cdot\nabla x(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_1)^* - \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_1\cdot\nabla x(\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_2)^*]dv.\end{aligned}$$

用公式 $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla x\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla x\mathbf{B}$ 以及高斯公式，得到

$$(A\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) - (\boldsymbol{\varphi}, A\boldsymbol{\psi}) = \iint\limits_S \{\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_2 x(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_1)^* + \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_1 x(\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_2)^*\}\cdot\mathbf{n}ds, \tag{4}$$

現在我們在边界面上假定 $\boldsymbol{\varphi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 滿足

$$\begin{aligned}(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_1)x\mathbf{n} &= \overleftrightarrow{\mu}^{\frac{1}{2}}\overleftrightarrow{z}\boldsymbol{\psi}_2,\\ (\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_1)x\mathbf{n} &= \overleftrightarrow{\mu}^{\frac{1}{2}}\overleftrightarrow{z}\boldsymbol{\varphi}_2,\end{aligned} \tag{5}$$

这里 $\overleftrightarrow{z}$ 是比阻抗矩陣，代表腔面的物理情况，如果腔壁是理想导体时，则 $\overleftrightarrow{z} = \mathbf{0}$．通常是用良好导电材料，而不是专为求損耗时，就可以近似地令 $\overleftrightarrow{z} = 0$．

把(5)代入(4)得到在右边的被积函数为

$$\begin{aligned}(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_1)^* x\mathbf{n}\cdot\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_2 - \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_1 x\mathbf{n}\cdot(\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_2)^* &= \\ = (\overleftrightarrow{\mu}^{\frac{1}{2}}\overleftrightarrow{z}\boldsymbol{\psi}_2)^*\cdot\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_2 - \overleftrightarrow{\mu}^{\frac{1}{2}}\overleftrightarrow{z}\boldsymbol{\varphi}_2\cdot(\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\psi}_2)^* &= \\ = \overleftrightarrow{z}^*\boldsymbol{\psi}_2^*\cdot\boldsymbol{\varphi}_2 - \overleftrightarrow{z}\boldsymbol{\varphi}_2\cdot\boldsymbol{\psi}_2^* = \boldsymbol{\psi}_2^*\cdot\tilde{z}^*\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\psi}_2^*\cdot\overleftrightarrow{z}\boldsymbol{\varphi}_2&,\end{aligned}$$

这里 $\tilde{z}$ 是 $\overleftrightarrow{z}$ 的轉置矩陣，由于 $\boldsymbol{\psi}_2$、$\boldsymbol{\varphi}_2$ 的任意性，所以只要 $\overleftrightarrow{z}$ 是厄密矩陣就行了．$\overleftrightarrow{z}$ 代表腔面上电場和磁場的关系，如果腔面不是某种物質，而連接着波导管，$\overleftrightarrow{z}$ 代表波导管中电磁場的关系．所以有下面定理．

定理 I．　在无源、各向异性、不均匀介質中的麦克斯韦方程，在有界区域 G 及其边界封閉曲面 S 中定义，而且在 S 上电場和磁場滿足关系式 $(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varphi}_1)x\mathbf{n} = \overleftrightarrow{\mu}^{\frac{1}{2}}\overleftrightarrow{z}\boldsymbol{\varphi}_2$，則方程所

对应的算符 A 在上面所定义的內积下是对称的；因而亦可以用广义扩张的方法扩张成为自伴算符[6]，其充分条件是介电系数张量 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 和导磁系数张量 $\overleftrightarrow{\mu}$ 是厄密型、可逆、正定、可交换和可微的函数矩陣，而且 $\overleftrightarrow{\varkappa}$ 也是厄密矩陣.

系 1. 在上述条件下，方程（3）一定有实数本征頻率 ω 存在，其对应的本征函数 $\begin{pmatrix}\mathscr{E}_p\\ \mathscr{H}_p\end{pmatrix}$ 在下面的意义下互相正交：

$$\iiint_G [\mathscr{E}_p \cdot \mathscr{E}_q^* + \mathscr{H}_p \cdot \mathscr{H}_q^*] dv = 0, \tag{6}$$

如果

$$\omega_p \neq \omega_q.$$

系 II. 在有源情况下，且满足定理一的条件，有互易定理：

$$(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{J}_a, \mathbf{E}_b) - (\mathbf{E}_a, \overleftrightarrow{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\overleftrightarrow{\mu}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{J}_b) = 0. \tag{7}$$

証 在 a, b 两处有二个外加电源 $\mathbf{J}_a$、$\mathbf{J}_b$，它們各产生电場 $\mathbf{E}_a$、$\mathbf{E}_b$，滿足

$$\nabla x \mathbf{E}_a = i\omega\overleftrightarrow{\mu}\mathbf{H}_a, \quad \nabla x \mathbf{H}_a = -i\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}\mathbf{E}_a + \mathbf{J}_a,$$

$$\nabla x \mathbf{E}_b = i\omega\overleftrightarrow{\mu}\mathbf{H}_b, \quad \nabla x \mathbf{H}_b = -i\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}\mathbf{E}_b + \mathbf{J}_b.$$

和上面一样作一变换，定

$$\mathscr{J}_a = \sqrt{-i\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}}\,\mathbf{J}_a, \quad \mathscr{J}_b = \sqrt{-i\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}}\,\mathbf{J}_b.$$

則有

$$A\boldsymbol{\varphi}_a - \omega\boldsymbol{\varphi}_a = \begin{pmatrix}\overleftrightarrow{\mathscr{K}}^{-1}\mathscr{J}_a\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},$$

$$A\boldsymbol{\varphi}_b - \omega\boldsymbol{\varphi}_b = \begin{pmatrix}\overleftrightarrow{\mathscr{K}}^{-1}\mathscr{J}_b\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},$$

所以

$$(A\boldsymbol{\varphi}_a, \boldsymbol{\varphi}_b) - (\boldsymbol{\varphi}_a, A\boldsymbol{\varphi}_b) = \omega(\boldsymbol{\varphi}_a, \boldsymbol{\varphi}_b) - \omega(\boldsymbol{\varphi}_a, \boldsymbol{\varphi}_b) + \\ + (\overleftrightarrow{\mathscr{K}}^{-1}\mathscr{J}_a, \mathscr{E}_b) - (\mathscr{E}_a, \overleftrightarrow{\mathscr{K}}^{-1}\mathscr{J}_b).$$

上式左边由 A 的对称性等于零，右边第一、二項相消，所以得到(7)式.

二

以下我們研究在一般情况下非自伴的性質，当定理一的条件不滿足而不能成为自伴算符时，我們可以找到这个腔的伴諧振腔[1]，使它們两者之間有某种类似于自伴的性質，它代表着伴算符，在物理上亦不是沒有意义的，如象上面举例的 $\overleftrightarrow{\mu}$ 和 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$，如果把恆磁化場的方向改变一下，就可以使 $\overleftrightarrow{\mu}$ 和 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 变成为原来矩陣的轉置矩陣，所以一般說来伴諧振腔亦代表一个具体物件[3].

現在我們来定义內积 $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \iiint_G \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi}^* dv$，但是現在对我們說来，$\boldsymbol{\varphi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 有价值的只是 $\boldsymbol{\varphi}$ 属于 A 的定义区域，而 $\boldsymbol{\psi}$ 属于 A 的伴算符 A^+ 的定义区域. 現在我們确定由一次可微矢量函数 $\boldsymbol{\varphi}$ 所組成的空間为 $\mathscr{H}_1$；$\mathscr{H}_1$ 在希伯特空間內是稠密的，A^+ 的定义区域是由滿足下面条件的元素組成

$$\psi_1 = \overleftrightarrow{\varepsilon}^+\varphi_1, \quad \psi_2 = \overleftrightarrow{\mu}^+\varphi_2.$$

$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ 組成空間 $\mathscr{H}_2$. 这就是說 $\mathscr{H}_2$ 是 $\mathscr{H}_1$ 經过算符 $\begin{bmatrix}\overleftrightarrow{\varepsilon}^+ & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \overleftrightarrow{\mu}^+\end{bmatrix}$ 的映射而得到的，同上面一样假定 $\overleftrightarrow{\mu}$ 和 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 可逆. 这样如把方程（1）写作

$$A\boldsymbol{\varphi} - \omega\boldsymbol{\varphi} = 0,$$

則其伴算符 A^+ 可定为

$$A^+ = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \nabla x(\overleftrightarrow{\mu}^+)^{-1}\\ \nabla x(\overleftrightarrow{\varepsilon}^+)^{-1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

A^+ 作用的元素是 $\psi = \begin{pmatrix}\overleftrightarrow{\varepsilon}^+ & \mathbf{E}\\ i\overleftrightarrow{\mu}^+ & \mathbf{H}\end{pmatrix}$ 对应的本征值問題是

$$A^+\psi - \omega\psi = 0 \tag{8}$$

对应的麦克斯韦方程是

$$\nabla x\mathbf{E} = i\omega\overleftrightarrow{\mu}^+\mathbf{H}, \quad \nabla x\mathbf{H} = -i\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}^+\mathbf{E}.$$

不难証明

$$(A\boldsymbol{\varphi}, \psi) - (\boldsymbol{\varphi}, A^+\psi) = \iint\limits_S \{\boldsymbol{\varphi}_2 x[(\overleftrightarrow{\varepsilon}^+)^{-1}\psi_1]^* + \boldsymbol{\varphi}_1 x[(\overleftrightarrow{\mu}^+)^{-1}\psi_2]^*\}\cdot\mathbf{n}ds =$$

$$= \iint\limits_S \{[(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1})^+\psi_1]^* x\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_2 x\mathbf{n}\cdot[(\overleftrightarrow{\mu}^{-1})^+\psi_2]^*\}ds.$$

令 A 的定义区域在边界面 S 上满足

$$\boldsymbol{\varphi}_1 x\mathbf{n} = \overleftrightarrow{z}\boldsymbol{\varphi}_2, \tag{9}$$

A^+ 的定义区域在边界面 S 上满足

$$[(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1})^+\psi_1]x\mathbf{n} = \overleftrightarrow{z}^+(\overleftrightarrow{\mu}^{-1})^+\psi_2 = (\overleftrightarrow{\mu}^{-1}\overleftrightarrow{z})^+\psi_2. \tag{10}$$

当然对应 A 的伴算符不止于上面所定义的 A^+，但我們只对这一部分有兴趣.

这就是說伴諧振腔和原来的諧振腔几何外形是一样的，但所充塡的介質不同，其 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 和 $\overleftrightarrow{\mu}$ 是互为伴矩陣，而且分别满足边界条件(9)和(10)，如果把(10)式了解为 $\mathscr{H}_1$ 空間中的元素，(9)和(10)式仅相异为 $\overleftrightarrow{z}$ 变为 $\overleftrightarrow{z}^+$. 所以在我們的意义下，伴諧振腔的伴腔还是原来的腔，卽 $A^{++} = A$. 并有以下定理.

定理 II. 对于任意一个諧振腔，其 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 和 $\overleftrightarrow{\mu}$ 可逆满足边界条件（9），则存在一个满足麦克斯韦方程的伴諧振腔，不过它的 $\overleftrightarrow{\mu}$ 和 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 是原来的伴矩陣，而且在边界上满足条件(10).

系 I. 如果諧振腔及其伴諧振腔都有本征頻率和对应的本征振动存在，則当它們的本征頻率不是互相共軛时，它們的本征振动型式在上面定义的內积意义下互相垂直.

証　按假定有

$$A\boldsymbol{\varphi}_p - \omega_p\boldsymbol{\varphi}_p = 0, \quad A^+\psi_q - \omega_q\psi_q = 0,$$

則

$$(A\boldsymbol{\varphi}_p, \psi_q) = (\omega_p\boldsymbol{\varphi}_p, \psi_q) = \omega_p(\boldsymbol{\varphi}_p, \psi_q),$$

$$(A\boldsymbol{\varphi}_p, \psi_q) = (\boldsymbol{\varphi}_p, A^+\psi_q) = \omega_q^*(\boldsymbol{\varphi}_p, \psi_q).$$

上两式相减，当 $\omega_p \neq \omega_q^*$，則

$$(\boldsymbol{\varphi}_p, \boldsymbol{\psi}_q) = 0$$

現在說一下它的物理意义：

$$(\boldsymbol{\varphi}_p, \boldsymbol{\psi}_q) = \iiint_G [\mathbf{E}_p \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\tilde{\varepsilon}}\mathbf{E}_q^*) + \mathbf{H}_p \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\tilde{\mu}}\mathbf{H}_q^*)]dv =$$

$$= \iiint_G (\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}\mathbf{E}_p \cdot \mathbf{E}_q^* + \overset{\leftrightarrow}{\mu}\mathbf{H}_p \cdot \mathbf{H}_q^*)dv,$$

这个积分是相当于在 G 內所貯藏的电能和磁能之总和，这說明二个腔的能量不相干涉的。

系 II. 有一般的互易定理如下：設在互为伴的諧振腔里有 a, b 两处，在諧振腔 A 中有外加电流密度 $\mathbf{J}_a$，产生电場 $\mathbf{E}_a$，在伴諧振腔 A^+ 里有外加电流密度 $\mathbf{J}_b$，产生电場 $\mathbf{E}_b$，它們的振动頻率都是 ω（ω 要是实数），則

$$\iiint_G (\mathbf{J}_a \cdot \mathbf{E}_b^* + \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{J}_b^*)dv = 0.$$

証　在 A 的 a 处有

$$A\boldsymbol{\varphi}_a - \omega\boldsymbol{\varphi}_a = \begin{pmatrix} i\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{+}\mathbf{J}_a \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

在 A^+ 的 b 处有

$$A^+\boldsymbol{\psi}_b - \omega\boldsymbol{\psi}_b = \begin{pmatrix} i\mathbf{J}_b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

上二式分別和 $\boldsymbol{\psi}_b$ 及 $\boldsymbol{\varphi}_a$ 作內积，相减，象定理 I 系 II 一样得到証明。

末了，作者特別感謝呂保維教授对本文所提的指正。

参　考　文　献

[1] Bresler A. D., Joshi G. H. and Marcuvitz N., Othogonality Properties for Modes in Passive and Active Uniform Waveguides *J.A.P.*, **29**, No. 5 (1958), 794—799.

[2] Bresler A. D., The Far Field Excited by a Point Source in a Passive Dissipationless Anisotropic Uniform Waveguide *I.R.E. Transactions*, **MTT-7**, No. 2 (1959), 282—287.

[3] Harrington R. F. and Villeneuve A. T., Reciprocity Relationship for Gyrotropic Media, *I.R.E. Transactions*, **MTT-6**, No. 3 (1958), 308—310.

[4] Гуревич А. Г., Резонаторы с тензорный средой, *Р. и Э.*, **III**, №12 (1958), 1475—1484.

[5] Гуревич А. Г., Ферриты на сверхвысоких частотах, Москва (1960).

[6] Riesz F. et B. Sz. Nagy, Lecon D'analyse Fonctionelle §104. Budapest (1953).

[7] Ахизер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейнных операторов в гильбертовым пространстве, Москва, (1950).

SOME PROPERTIES OF OPERATOR IN ELECTROMAGNETIC THEORY

Ku Fu-nien
(*Kiang Hsi University*)

ABSTRACT

In this paper we studied the Maxwell's equations in imhomogeneous and anisotropic media as an operator. It is defined in a bounded region, which can be comprehended as a resonant cavity in micro-wave technique. But these cavities are filled with ferrite, plasma or other gyrotropic medium, all these new media become more and more important in practice. We proved that under some concrete conditions imposed on $\overleftrightarrow{\mu}$, $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ and restrictions on the boundary value, the operator of Maxwell's equations becomes a symmetric one. The symmetry and self-adjoint property give much convenience in eigenfunction expansion problems. Besides, we derived the orthogonality of characteristic oscillation and reciprocity theorem in general.

If it does not satisfy the conditions of symmetry, we introduced the concept of adjoint-cavity. The so-called adjoint cavity coincides with the primary cavity in geometrical shape, but both $\overleftrightarrow{\mu}$, $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ and boundry conditions do not coincide. It has some properties similiar with self-adjoint cavity in orthogonality and reciprocity theorem.