

# 鐵磁共振的量子理論——各向同性鐵氧體的共振條件\*

楊 榮

提 要

在本文中用雙時間格林函數方法研究了具有兩個磁性次晶格的各向同性鐵氧體的鐵磁共振問題。在一級近似中,所得之磁化率表式及共振條件與經典理論的結果相同。本理論在寬廣的溫度範圍中適用,而且自然地給出自旋系統的共振躍遷几率(它與共振綫強度成比例)。最後討論了理論的應用範圍、與實驗結果的比較、以及在補償點附近應作的修正。

在鐵氧體中存在着兩個或兩個以上磁性次晶格,所以一般說來,其共振條件將有別於“純鐵磁體”中的共振條件。根據經典力學的計算<sup>[1,2]</sup>,在具有兩個次晶格的鐵氧體中應該有兩個共振頻率。如果鐵氧體不具有補償點或所處溫度離補償點很遠,則一個共振頻率處在超高频(微波)範圍,其共振條件與普通的鐵磁體實際並無區別,而另一個共振頻率處在紅外範圍,它決定於次晶格之間的交換作用。

曾有作者用量子力學的方法對鐵磁及反鐵磁共振問題作了研究<sup>[3]</sup>,但因所用的近似(自旋波近似)中假定了自旋偏差是小量,所以其結果只在低溫下正確,並不能直接推廣到一般溫度。而且它們也並不反映鐵磁共振(或稱亞鐵磁共振)的特點。

最近波戈留波夫(Боголюбов)和加布里可夫(Тябликов)<sup>[4]</sup>發展了在統計物理中的雙時間格林函數方法,這個方法的優點之一在於它適用於一切溫度。加布里可夫將此方法應用於鐵磁共振理論<sup>[5]</sup>,得到了一系列重要的結果。

以下我們利用雙時間格林函數方法來研究具有兩個次晶格的鐵氧體的鐵磁共振問題。

## § 1. 張量磁化率

在工作<sup>[5]</sup>中給出了在鐵磁體中張量磁化率的表式,這些表式不難推廣到兩個次晶格的情形。

令系統的哈密頓量具有以下形式

$$H = H_0 + H'(t), \quad (1)$$

$$H'(t) = \sum V_\omega e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

其中  $H_0, V_\omega$  是與時間明顯無關的算符,而  $H'(t)$  可看作微擾。則在綫性近似中,力學變量  $A$  之平均值  $\bar{A}(t)$  與其平衡值  $\langle A \rangle$  之偏差  $\delta\bar{A}(t) = \bar{A}(t) - \langle A \rangle$  決定於下式:

\* 1961 年 4 月 17 日收到。

$$\delta \bar{A} = \sum_{\omega} \frac{2\pi}{i} \langle \langle A | V_{\omega} \rangle \rangle_{E=\omega}^{\text{ret}} e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

其中  $\langle \langle \dots \rangle \rangle_{E=\omega}^{\text{ret}}$  表示推迟格林函数在点  $\omega$  上的傅里叶分量<sup>[5]</sup>.

铁氧体的磁化强度  $\mathbf{M}$  为

$$\mathbf{M} = (\mu_1 \mathbf{S}_1 + \mu_2 \mathbf{S}_2) V^{-1}, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{S}_1 = \sum_f \mathbf{S}_f$ ,  $\mathbf{S}_2 = \sum_g \mathbf{S}_g$  各为次晶格  $f$  与  $g$  的总自旋算符,  $\mu_1, \mu_2$  是旋磁比<sup>1)</sup>:

$$\mu_i = -g_i \mu_0, \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

$g_i$  是每个次晶格的  $g$  因子,  $\mu_0$  是玻尔磁子,  $V$  是样品体积.

在铁磁共振问题中, 我们需研究在恒定外磁场  $\mathcal{H}$  及较弱的射频磁场  $\mathbf{h}(t)$  作用下铁氧体磁化强度的变化. 根据式 (3)

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{M}}(t) &= (\mu_1 \delta \mathbf{S}_1 + \mu_2 \delta \mathbf{S}_2) V^{-1} = \\ &= \frac{2\pi}{i} V^{-1} \sum_{\omega} \{ \mu_1 \langle \langle \mathbf{S}_1 | V_{\omega} \rangle \rangle_{\omega} + \mu_2 \langle \langle \mathbf{S}_2 | V_{\omega} \rangle \rangle_{\omega} \} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (6)$$

由此可以得到铁氧体的张量磁化率为

$$\delta \bar{M}^{\alpha}(t) = \sum_{\beta} f_{\alpha\beta} h^{\beta}(t). \quad (7)$$

由于

$$H'(t) = -\mu_1 \sum_{\beta} h^{\beta}(t) S_1^{\beta} - \mu_2 \sum_{\beta} h^{\beta}(t) S_2^{\beta}, \quad (8)$$

故对于线偏振射频磁场, 可得

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} &= -\frac{2\pi}{i} V^{-1} \{ \mu_1^2 \langle \langle S_1^{\alpha} | S_1^{\beta} \rangle \rangle_{\omega} + \mu_1 \mu_2 \langle \langle S_1^{\alpha} | S_2^{\beta} \rangle \rangle_{\omega} + \\ &+ \mu_2 \mu_1 \langle \langle S_2^{\alpha} | S_1^{\beta} \rangle \rangle_{\omega} + \mu_2^2 \langle \langle S_2^{\alpha} | S_2^{\beta} \rangle \rangle_{\omega} \}; \end{aligned} \quad (9)$$

而对于圆偏振射频磁场, 可得

$$\begin{aligned} f_{\pm} &= -\frac{\pi}{i} V^{-1} \{ \mu_1^2 \langle \langle S_1^{\pm} | S_1^{\mp} \rangle \rangle_{\omega} + \mu_1 \mu_2 \langle \langle S_1^{\pm} | S_2^{\mp} \rangle \rangle_{\omega} + \\ &+ \mu_2 \mu_1 \langle \langle S_2^{\pm} | S_1^{\mp} \rangle \rangle_{\omega} + \mu_2^2 \langle \langle S_2^{\pm} | S_2^{\mp} \rangle \rangle_{\omega} \}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$S^{\pm} = S^x \pm iS^y,$$

而由于<sup>[5]</sup>

$$\langle \langle A | B \rangle \rangle_{\omega}^{\text{ret}} = -\{ \langle \langle A^{\dagger} | B^{\dagger} \rangle \rangle_{-\omega}^{\text{ret}} \}^*, \quad (11)$$

故

$$f_{-}(\omega) = f_{+}^*(-\omega), \quad (12)$$

其中  $f_{+}, f_{-}$  各相应于右偏振及左偏振的磁化率.

单位时间内铁氧体所吸收的能量为

$$Q = \sum_{(\alpha, \beta)} 2\omega f'_{\alpha\beta}(\omega) h_{\omega}^{\alpha} h_{\omega}^{\beta}, \quad (13)$$

或

$$Q = \omega h_{\omega}^2 f'_{+} = -\omega h_{\omega}^2 f'_{-}. \quad (14)$$

1) 在本文内我们采用  $\hbar = 1$ .

## § 2. 哈密頓量

為了簡單起見,我們暫不考慮磁各向異性。在海森堡模型中系統的哈密頓量可以寫成以下形式<sup>1)</sup>:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{h=f,g} \mu_i \mathbf{S}_h - \frac{1}{2} \sum_{h_1 h_2} J_{ii}(h_1 - h_2) \mathbf{S}_{h_1} \mathbf{S}_{h_2} - \sum_{f,g} J_{12}(f-g) \mathbf{S}_f \mathbf{S}_g, \quad (15)$$

其中  $f, g$  表示兩個次晶格的格點, 當  $h \in f, i=1$  當  $h \in g, i=2$ ,  $J_{11}, J_{22}$  是每個次晶格內部的交換積分,  $J_{12}$  是兩個次晶格之間的交換積分。

將自旋算符變換成泡利算符

$$\mathbf{S}_h = \gamma_i(1 - 2n_h) + \mathbf{A}_i b_h + \mathbf{A}_i^* b_h^+$$

(此變換首先由加布里可夫引入), 其中  $n_h = b_h^+ b_h$ , 而  $\gamma_i$  及  $\mathbf{A}_i$  是經典矢量:

$$A_i^x = -\frac{\gamma_i^x \gamma_i^z + i \gamma_i^y}{\sqrt{1 - (\gamma_i^z)^2}}, \quad A_i^y = -\frac{\gamma_i^y \gamma_i^z - i \gamma_i^x}{\sqrt{1 - (\gamma_i^z)^2}}, \quad A_i^z = \sqrt{1 - (\gamma_i^z)^2}, \quad (16)$$

它們具有以下性質:

$$(\gamma_i \gamma_i) = 1, \quad (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_i^*) = 2, \quad (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_i) = (\mathbf{A}_i \gamma_i) = 0, \quad (17)$$

而  $b_h, b_h^+$  服從以下對易關係:

$$b_{h_1} b_{h_2} - b_{h_2} b_{h_1} = 0, \quad b_h b_h = b_h^+ b_h^+ = 0, \\ b_{h_1}^+ b_{h_2}^+ - b_{h_2}^+ b_{h_1}^+ = \delta_{h_1 h_2} (1 - 2n_{h_1}), \quad (18)$$

可得

$$H = E_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4, \quad (19)$$

其中  $E_0$  是恆量部分,  $H_1, H_2, H_3, H_4$  各包含泡利算符  $b_h, b_h^+$  的一次、二次、三次、四次等項。

## § 3. 格林函數

引入格林函數:

$$G_{hh'}^{(1)} \equiv \langle \langle b_h(t) | b_{h'}^+(t') \rangle \rangle = \theta(t-t') \langle [b_h(t), b_{h'}^+(t')] \rangle, \\ G_{hh'}^{(2)} \equiv \langle \langle b_h^+(t) | b_{h'}^+(t') \rangle \rangle = \theta(t-t') \langle [b_h^+(t), b_{h'}^+(t')] \rangle, \quad (20)$$

其中

$$\langle \dots \rangle = Q^{-1} \text{Sp}(\dots \exp \beta H), \quad Q = \text{Sp} \exp \beta H, \quad \beta = -(kT)^{-1}, \\ \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$[A, B] = AB - BA,$$

1) 我們假定每個格點的原子中只有一個電子對鐵磁性提出貢獻, 電子的自旋動量矩為  $\frac{1}{2} \mathbf{S}_h$ , 其磁矩即為  $\frac{1}{2} \mu_i \mathbf{S}_h$ 。

而  $A(t)$  是在海森堡表象中的算符  $A$ .

格林函数满足以下方程<sup>[4]</sup>:

$$i \frac{dG_{hh'}^{(1)}}{dt} = i\delta(t-t') \langle [b_h(t), b_{h'}^+(t)] \rangle + \langle \langle i \frac{db_h(t)}{dt} | b_{h'}^+(t') \rangle \rangle, \quad (22)$$

以及相似地对于  $G_{hh'}^{(2)}$  的方程. 根据运动方程:

$$i \frac{dA}{dt} = AH - HA, \quad (23)$$

可以得到决定  $G_{hh'}^{(1)}$  及  $G_{hh'}^{(2)}$  的微分方程, 在这些微分方程中将有较高级的格林函数出现, 例如  $\langle \langle b_{h_1}(t) b_{h_2}(t) | b_{h'}^+(t') \rangle \rangle$ ,  $\langle \langle n_{h_1}(t) b_{h_2}(t) | b_{h'}^+(t') \rangle \rangle$  等等. 对于这些高级格林函数也可以写出微分方程, 但在方程中将出现更高级的格林函数.

作为第一级近似, 我们将认为

$$\begin{aligned} \langle \langle n_h(t) b_{h_1}(t) | b_{h_2}^+(t') \rangle \rangle &\cong \bar{n}_i G_{h_1 h_2}^{(1)}, \\ \langle \langle n_h(t) b_{h_1}^+(t) | b_{h_2}(t') \rangle \rangle &\cong \bar{n}_i G_{h_1 h_2}^{(2)}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中当  $h \in f, i=1$ , 当  $h \in g, i=2$ ,  $\bar{n}_i \equiv \langle n_i \rangle$ , 并且认为一切由奇数个泡利算符组成的格林函数都等于零.

这样, 对于格林函数的傅里叶分量  $G_{ii'}^{(j)}(E, k) (i, i' = 1, 2, j = 1, 2)$ :

$$G_{hh'}^{(j)}(t-t') = N_i^{-1} \sum_k e^{i(h-h', k)} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ii'}^{(j)}(E, k) e^{-iE(t-t')} dE, \quad (25)$$

可以得到以下代数方程组:

$$\begin{pmatrix} E - \varepsilon_1 & 0 & A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 & E - \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & E + \varepsilon_1 & -B_1 & -A_1 \\ -B_2 & -A_2 & 0 & E + \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} \\ G_{11}^{(2)} \\ G_{21}^{(1)} \\ G_{21}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\sigma_1}{2\pi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

以及

$$\begin{pmatrix} E - \varepsilon_2 & 0 & A_2 & B_2 \\ A_1 & B_1 & E - \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & E + \varepsilon_2 & -B_2 & -A_2 \\ -B_1 & -A_1 & 0 & E + \varepsilon_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{22}^{(1)} \\ G_{22}^{(2)} \\ G_{12}^{(1)} \\ G_{12}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\sigma_2}{2\pi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (26')$$

其中

$$A_1 = -\frac{N_1}{N_2}(\eta + 1)J_{12}\sigma_1, \quad B_1 = -\frac{N_1}{N_2}(\eta - 1)J_{12}\sigma_1, \quad (27)$$

$$\varepsilon_1 = \mu_1 \mathcal{E} \gamma_1 + 2(\bar{J}_{11} - J_{11})\sigma_1 + 2\eta \bar{J}_{12}\sigma_2, \quad (28)$$

$$J_{11} = \sum_{f'} J_{11}(f-f') e^{i(f-f', k)}, \quad \bar{J}_{11} = J_{11}|_{k=0}, \quad (29)$$

$$J_{12} = \sum_g J_{12}(f-g) e^{-i(f-g, k)}, \quad \bar{J}_{12} = J_{12}|_{k=0}, \quad (30)$$

$$\eta = (\gamma_1 \gamma_2) = \gamma_1 \gamma_2 - \sqrt{(1-\gamma_1^2)(1-\gamma_2^2)}, \quad (\gamma_i = \gamma_i^z), \quad (31)$$

$$\sigma_i = 1 - 2\bar{n}_i, \quad (32)$$

$N_1, N_2$  各為兩個次晶格中的原子數，而  $A_2, B_2, \epsilon_2, J_{22}, J_{21}$  等各量只須相應地在式 (27) — (30) 中作足標置換： $1 \rightleftharpoons 2, f \rightleftharpoons g$ 。

不難看到，決定張量磁化率 (9), (10) 的格林函數  $\langle\langle S_i^a | S_j^b \rangle\rangle$  完全可以用以上我們引入的  $G_{ij}^{(f)}$  來表示。鐵磁共振頻率決定於格林函數的奇點。在以上所考慮的一級近似中，觀察方程組 (26) 可以看到，格林函數  $G_{ij}^{(f)}$  具有極點，它決定於方程：

$$\begin{vmatrix} E - \epsilon_1 & 0 & A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 & E - \epsilon_2 & 0 \\ 0 & E + \epsilon_1 & -B_1 & -A_1 \\ -B_2 & -A_2 & 0 & E + \epsilon_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

的根。解方程 (33) 後不難得到其根的明顯表達式：

$$E_k^2 = \frac{1}{2} \{ \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 8\eta J_{12} J_{21} \sigma_1 \sigma_2 \pm \sqrt{(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)^2 + 16J_{12} J_{21} (\eta \epsilon_1 + \epsilon_2)(\epsilon_1 + \eta \epsilon_2)} \}, \quad (34)$$

要得到共振頻率，須令  $k = 0$  (一致共振情形)。如忽略非近鄰原子之間的交換作用，即令

$$J_{12}(f-g) = \begin{cases} -J_a, & f, g \text{ 是近鄰,} \\ 0, & f, g \text{ 不是近鄰,} \end{cases} \quad (35)$$

則可得

$$\begin{aligned} E_0^2 = & \frac{1}{2} \{ (2\eta J_a z_1 \sigma_2 - \gamma_1 \mu_1 \mathcal{H})^2 + (2\eta J_a z_2 \sigma_1 - \gamma_2 \mu_2 \mathcal{H})^2 + \\ & + 8\eta J_a^2 z_1 z_2 \sigma_1 \sigma_2 \pm [(2\eta J_a (z_1 \sigma_2 + z_2 \sigma_1) - (\gamma_1 \mu_1 + \gamma_2 \mu_2) \mathcal{H})^2 \times \\ & \times (2\eta J_a (z_1 \sigma_2 - z_2 \sigma_1) - (\gamma_1 \mu_1 - \gamma_2 \mu_2) \mathcal{H})^2 + \\ & + 16J_a^2 z_1 z_2 \sigma_1 \sigma_2 (2\eta J_a (\eta z_1 \sigma_2 + z_2 \sigma_1) - (\eta \gamma_1 \mu_1 + \gamma_2 \mu_2) \mathcal{H}) \times \\ & \times (2\eta J_a (\eta z_2 \sigma_1 + z_1 \sigma_2) - (\gamma_1 \mu_1 + \eta \gamma_2 \mu_2) \mathcal{H})]^{1/2} \}, \quad (36) \end{aligned}$$

其中  $z_1, z_2$  各為格點  $f$  周圍的  $g$  近鄰數及格點  $g$  周圍的  $f$  近鄰數。

我們看到，如果  $\mathcal{H} = 0$ ，則當  $k \rightarrow 0$  時元激發頻率 (34) 趨向以下兩個極限值：

$$E_0^2|_{\mathcal{H}=0} = \begin{cases} 0, \\ 4J_a^2 (z_1 \sigma_2 - z_2 \sigma_1)^2. \end{cases} \quad (37)$$

這就是說，在介質中的元激發有兩支，當  $k \rightarrow 0$  時一支的頻率也趨近零，而另一支趨近某一定值。後者與分子晶體中的光學振動相仿。

在式 (34) 或 (36) 中有四個未知量： $\sigma_1, \sigma_2, \gamma_1, \gamma_2$ 。按其定義 (32), (31) 可見， $\sigma_i$  的物理意義是次晶格的平均相對自旋，而  $\gamma_i$  表徵次晶格磁化強度對外場  $\mathcal{H}$  的取向。下面我們將根據格林函數的基本性質及系統的热力學平衡條件寫出決定  $\sigma_i$  及  $\gamma_i$  的方程。

#### § 4. 平衡狀態中的 $\sigma_i$ 與 $\gamma_i$

由方程組 (26), (26') 不難得到  $G_{ij}^{(f)}$  的明顯表式，由此根據工作 [4] 的基本結果可以求得  $\langle b_{h_1}^+ b_{h_2}^+ \rangle, \langle b_{h_1}^+ b_{h_2} \rangle$  等的平均值。例如

$$\langle b_f^+ b_f \rangle = -\frac{\sigma_1 \nu_1}{2(2\pi)^3} + \frac{\sigma_1 \nu_1}{2(2\pi)^3} \left\{ \frac{\epsilon_1 E_1^2 + \epsilon_2 (2(\eta^2 + 1) J_{12} J_{21} \sigma_1 \sigma_2 - \epsilon_1 \epsilon_2)}{E_1 (E_1^2 - E_2^2)} \operatorname{cth} \frac{E_1}{2\theta} - \right.$$

$$- \frac{\epsilon_1 E_2^2 + \epsilon_2(2(\eta^2 + 1)J_{12}J_{21}\sigma_1\sigma_2 - \epsilon_1\epsilon_2)}{E_2(E_1^2 - E_2^2)} \operatorname{cth} \frac{E_2}{2\theta} \} d^3k, \quad (38)$$

其中  $E_1, E_2$  是格林函数的两个极点 (34),  $v_1 = V/N_1$  是第一个次晶格的每个格点 ( $f$ ) 平均所占体积,  $\theta = kT$  是温度模量, 而积分按整个  $k$  空间进行.

因为

$$\langle b_i b_f \rangle = \bar{n}_1 = (1 - \sigma_1)/2,$$

所以由(38)可以得到决定  $\sigma_1$  的超越方程:

$$\frac{1}{\sigma_1} = \frac{v_1}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\epsilon_1 E_1^2 + \epsilon_2(2(\eta^2 + 1)J_{12}J_{21}\sigma_1\sigma_2 - \epsilon_1\epsilon_2)}{E_1(E_1^2 - E_2^2)} \operatorname{cth} \frac{E_1}{2\theta} - \frac{\epsilon_1 E_2^2 + \epsilon_2(2(\eta^2 + 1)J_{12}J_{21}\sigma_1\sigma_2 - \epsilon_1\epsilon_2)}{E_2(E_1^2 - E_2^2)} \operatorname{cth} \frac{E_2}{2\theta} \right\} d^3k. \quad (39)$$

相似地可以得到决定  $\sigma_2$  的超越方程, 为此只须在方程 (39) 中作以下置换:  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ ,  $\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2$ ,  $v_1 \leftrightarrow v_2$ .

系统的热力学平衡状态决定于自由能的极小值:

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_i} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \gamma_i} \right\rangle = 0. \quad (40)$$

如果认为奇数泡利算符的平均值为零:

$$\langle b \rangle = \langle b^+ \rangle = \langle b_1 b_2 b_3 \rangle = \dots = 0, \quad (41)$$

而

$$\langle n_1 n_2 \rangle \cong \bar{n}_1 \bar{n}_2, \quad (42)$$

则条件(40)可写成

$$\begin{aligned} & -\mu_0 \mathcal{H} \sigma_1 + \frac{\partial \eta}{\partial \gamma_1} \bar{J}_{12} (1 - \sigma_1 \sigma_2) + \\ & + 2 \frac{\partial \eta}{\partial \gamma_1} \frac{v_1}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{E_1^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \eta - 4\eta J_{12} J_{21} \sigma_1 \sigma_2}{E_1(E_1^2 - E_2^2)} \operatorname{cth} \frac{E_1}{2\theta} - \right. \\ & \left. - \frac{E_2^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \eta - 4\eta J_{12} J_{21} \sigma_1 \sigma_2}{E_2(E_1^2 - E_2^2)} \operatorname{cth} \frac{E_2}{2\theta} \right\} J_{12} J_{21} \sigma_1 \sigma_2 d^3k = 0, \quad (43) \end{aligned}$$

以及与此相似的方程 ( $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ ,  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ ,  $\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2$ ,  $v_1 \leftrightarrow v_2$ ,  $\bar{J}_{12} \leftrightarrow \bar{J}_{21}$ ).

方程 (39), (43) 以及与它们相似的两个方程 (共四个方程) 决定  $\sigma_1, \sigma_2, r_1, r_2$  四个未知量. 我们看到, 这是一组联立的超越方程组, 在一般情形中要得到其解是困难的. 在这里我们不详细讨论这些量随温度及外场而变化的行为<sup>1)</sup>, 而只指出以下几点情况.

由于在普通能达到的磁场中, 电子磁矩的磁能 ( $\mu_0 \mathcal{H}$ ) 远小于电子之间的交换能 ( $J_a$ ):

$$\mu_0 \mathcal{H} / J_a \lesssim 10^{-2} - 10^{-3},$$

所以除了在居里点附近, 铁氧体的两个次晶格的磁矩  $\langle \mu_1 \mathbf{S}_1 \rangle$ ,  $\langle \mu_2 \mathbf{S}_2 \rangle$  经常接近反平行取向, 即  $\eta = (\gamma_1 \gamma_2) \cong -1$ . 而且, 除了在补偿点 ( $\mu_1 S_1 - \mu_2 S_2 \cong 0$  或  $S_1 - S_2 \cong 0$ ) 附近, 绝对值较大的磁矩经常与外恒定磁场  $\mathcal{H}$  相平行. 如果铁氧体具有补偿点, 则在补偿点的一边  $\gamma_1 \cong -\gamma_2 \cong 1$ , 而在补偿点的另一边  $\gamma_1 \cong -\gamma_2 \cong -1$ . 以后为了简单起见, 我们

1) 这些行为造成铁氧体的总磁化强度与温度及磁场的依赖关系, 有关研究正在进行中.

將認為

$$\eta = -1, \quad \gamma_1 = -\gamma_2 = +1 \quad \text{或} \quad -1. \quad (44)$$

### § 5. 磁化率與共振條件

由於條件(44), 我們可令 ( $\gamma_1 = 1$  它對應於  $S_1 - S_2 < 0$  的情形)

$$\mathbf{A}_1 = \{1, -i, 0\}, \quad \mathbf{A}_2 = \{1, i, 0\}, \quad (45)$$

$$S_f^z = b_f + b_f^+, \quad S_f^y = -i(b_f - b_f^+), \quad S_f^x = 1 - 2n_f, \quad (46)$$

$$S_g^z = b_g + b_g^+, \quad S_g^y = i(b_g - b_g^+), \quad S_g^x = -(1 - 2n_g),$$

由於(11), 可得

$$f_+ = -\frac{4\pi}{V} \left\{ \mu_1^2 N_1 G_{11}^{(1)}(\omega, 0) + 2\mu_1 \mu_2 N_2 G_{12}^{(2)}(\omega, 0) - \mu_2^2 N_2 G_{22}^{(2)*}(-\omega, 0) \right\}. \quad (47)$$

由(26)及(26')可求得所需之格林函數的明顯表式. 計算得到

$$f_+ = 2 \frac{\mu_0^2}{pJ_a} \frac{\sum_{j=0}^3 a_j \Omega^{3-j}}{(\Omega^2 - \Omega_{01}^2)(\Omega^2 - \Omega_{02}^2)}. \quad (48)$$

式中引入了無量綱頻率:

$$\Omega = \frac{\omega}{pJ_a}, \quad \Omega_0 = \frac{E_0}{pJ_a}, \quad (49)$$

其中  $p = V \frac{z_1 + z_2}{N_1 + N_2}$  是原胞中每個粒子的平均近鄰數,  $\Omega_{01}$ ,  $\Omega_{02}$  是格林函數的極點, 而  $a_j (j = 0, 1, 2, 3)$  由以下表式所決定:

$$\begin{aligned} a_0 &= g_1^2 S_1 - g_2^2 S_2, \\ a_1 &= (g_1^3 S_1 - g_2^3 S_2)h - 2(g_1 - g_2)^2 S_1 S_2, \\ a_2 &= -(S_1 - S_2)[g_1 g_2 h + 2(g_1 S_1 - g_2 S_2)]^2, \\ a_3 &= -(g_1 S_1 - g_2 S_2)[g_1 g_2 h + 2(g_1 S_1 - g_2 S_2)]^2, \end{aligned} \quad (50)$$

以上各式中  $S_i$  是次晶格的自旋平均值 (我們用了同一符號來表示自旋平均值及自旋算符, 但這不至於引起誤會).

$$S_i = N_i \sigma_i / V, \quad (51)$$

因此樣品的總自旋  $S$  及總磁化強度  $M$  為

$$\begin{aligned} S &= S_1 - S_2, \\ M &= -\mu_0 (g_1 S_1 - g_2 S_2). \end{aligned} \quad (52)$$

$h$  是無量綱磁場:

$$h = \mu_0 \mathcal{H} / pJ_a. \quad (53)$$

式(48)可以寫為

$$\begin{aligned} f_+ &= \frac{\mu_0^2}{pJ_a} \frac{1}{(\Omega_{01}^2 - \Omega_{02}^2)} \left\{ \frac{\sum a_j \Omega_{01}^{3-j}}{\Omega_{01}(\Omega - \Omega_{01})} - \frac{\sum a_j (-\Omega_{01})^{3-j}}{\Omega_{01}(\Omega + \Omega_{01})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sum a_j \Omega_{02}^{3-j}}{\Omega_{02}(\Omega - \Omega_{02})} + \frac{\sum a_j (-\Omega_{02})^{3-j}}{\Omega_{02}(\Omega + \Omega_{02})} \right\}, \end{aligned} \quad (54)$$

其中求和按  $j$  進行,  $j = 0, 1, 2, 3$ .

左向圓偏振磁化率可按上式及式(12)立刻写出.

为了分析共振条件以及各共振綫之相对强度,我們必須考虑方程(36). 在条件(44)下,方程(36)可以分解成两支(我們使用无量綱頻率(49)及磁場(53)):

$$I: \quad \Omega_0^2 + [2(S_1 - S_2) + (g_1 + g_2)h]\Omega_0 + [g_1g_2h + 2(g_1S_1 - g_2S_2)]h = 0, \quad (55)$$

$$II: \quad \Omega_0^2 - [2(S_1 - S_2) + (g_1 + g_2)h]\Omega_0 + [g_1g_2h + 2(g_1S_1 - g_2S_2)]h = 0. \quad (55')$$

在平面 $(\Omega, h)$ 上,方程(55), (55')表示两对双曲綫(见图1,亦見[6,10]),其漸近綫各为

$$I: \quad \Omega + g_1h - 2S_2 = 0, \quad \Omega + g_2h + 2S_1 = 0, \quad (56)$$

以及

$$II: \quad \Omega - g_1h + 2S_2 = 0, \quad \Omega - g_2h - 2S_1 = 0. \quad (56')$$

我們看到,如果鉄氧体不具有补偿点或所处温度远离补偿点,則可以认为

$$|S_1 - S_2| \gg h.$$

因此,在忽略了高次小量以后可以得到以下两个共振頻率:

$$|\omega_{01}| \cong g_{\text{有效}}\mu_0\mathcal{H}, \quad (57)$$

$$|\omega_{02}| \cong 2pJ_a|S_1 - S_2| - \left| \frac{g_1S_2 - g_2S_1}{S_1 - S_2} \right| \mu_0\mathcal{H}, \quad (58)$$

其中

$$g_{\text{有效}} = \frac{|g_1S_1 - g_2S_2|}{|S_1 - S_2|} = \frac{1}{\mu_0} \frac{|M_1 - M_2|}{|S_1 - S_2|}. \quad (59)$$

当外恆定磁場 $\mathcal{H}$ 的数量級为数千奥时,第一个共振頻率 $\omega_{01}$ 处在超高频范围,它对应于次

格子总磁矩的共振旋进,其共振条件与普通只有一种次晶格的鉄磁体实际并无区别;另一个共振頻率 $\omega_{02}$ 处在紅外范围,它对应于次晶格在“交換場”中的“自然共振”. 頻率表式(57)、(58)、(59)与經典理論<sup>[1,2]</sup>所得相同. 我們导出的表式适用于寬广的温度范围, $S_1, S_2, M_1, M_2$ 是在給定温度下每个次晶格的自旋及磁化强度.

一般情况中,在給定的磁場 $\mathcal{H}$ 下由方程(55)、(55')可得到两对共振頻率 $\pm \Omega_{01}, \pm \Omega_{02}$ ,而在給定的操作頻率 $\Omega$ 下,可得到四个共振磁場. 可是,简单的分析指出,这些共振頻率(或共振磁場)所相应的共振条件及綫強是不同的,其中某些頻率值(或磁場

值)應該放弃,因为它们并不符合鉄磁共振的实驗条件.

的确,如果 $\Omega_{01}, \Omega_{02}$ 是方程(55)之根,則

$$\sum a_j \Omega_0^{3-j} = 0, \quad (\Omega_0 = \Omega_{01}, \Omega_{02})$$

而

$$\begin{aligned} \sum a_j (-\Omega_0)^{3-j} &= -2(\Omega_{01} + \Omega_{02})\Omega_0 \times \\ &\times [4(g_1^2S_1 - g_2^2S_2)^2 + g_1^2g_2^2(g_1S_1 - g_2S_2)^2]^{\frac{1}{2}}(RQ), \end{aligned}$$

其中 $(RQ)$ 是双曲綫(55)上的点 $R(\Omega_0, h)$ 至双曲綫在它与纵軸( $h$ -軸)交点 $C$ 上的切綫

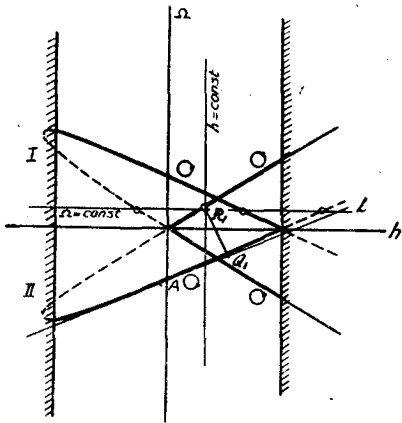


图 1



CL 之垂直距離(見圖 1)。因此

$$f_+ = 2 \frac{\mu_0^2}{pJ_a} [4(g_1^2 S_1 - g_2^2 S_2)^2 + g_1^2 g_2^2 (g_1 S_1 - g_2 S_2)^2]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \frac{1}{\Omega_{01} - \Omega_{02}} \left\{ \frac{(R_1 Q)}{\Omega + \Omega_{01}} - \frac{(R_2 Q)}{\Omega + \Omega_{02}} \right\}. \quad (60)$$

由於

$$\frac{1}{\Omega + \Omega_0 + i\epsilon} = \frac{P}{\Omega + \Omega_0} - i\pi\delta(\Omega + \Omega_0),$$

所以(60)可寫成

$$f_+ = f'_+ - if''_+, \\ f'_+ = A \left\{ \frac{(R_1 Q)}{\Omega + \Omega_{01}} P - \frac{(R_2 Q)}{\Omega + \Omega_{02}} P \right\}, \quad (61)$$

$$f''_+ = A\pi \{ (R_1 Q)\delta(\Omega + \Omega_{01}) - (R_2 Q)\delta(\Omega + \Omega_{02}) \}, \quad (62)$$

其中  $A$  代表(60)中大括弧前的因子。

由於(12), 故

$$f_- = f'_- - if''_-, \\ f'_- = A \left\{ -\frac{(R_1 Q)}{\Omega + \Omega_{01}} P - \frac{(R_2 Q)}{\Omega + \Omega_{02}} P \right\}, \quad (63)$$

$$f''_- = -A\pi \{ (R_1 Q)\delta(\Omega - \Omega_{01}) - (R_2 Q)\delta(\Omega - \Omega_{02}) \}. \quad (64)$$

在式(62)及(64)中  $\delta$  函數前的因子的物理意義是量子系統的躍遷几率, 因此它與綫強成比例。

如果  $\Omega'_{01}, \Omega'_{02}$  是方程(55')之根, 則

$$\sum a_j (-\Omega'_0)^{3-j} = 0, \quad (\Omega'_0 = \Omega'_{01}, \Omega'_{02})$$

即

$$f'_+ = A' \left\{ \frac{(R'_1 Q')}{\Omega - \Omega'_{01}} P - \frac{(R'_2 Q')}{\Omega - \Omega'_{02}} P \right\}, \quad (65)$$

$$f''_+ = A'\pi \{ (R'_1 Q')\delta(\Omega - \Omega'_{01}) - (R'_2 Q')\delta(\Omega - \Omega'_{02}) \}, \quad (66)$$

以及

$$f'_-(\Omega) = f'_+(-\Omega), \quad f''_-(\Omega) = -f''_+(-\Omega). \quad (67)$$

首先我們指出, 方程(55)或(55')的某些根相對於負吸收, 就是說, 在相應的共振下自旋系統從射頻磁場中吸收的能量為負。的確, 由於(14), (62)或(64), 我們看到, 只有當以下條件滿足時

$$\frac{\Omega_{01}}{\Omega_{01} - \Omega_{02}} > 0, \quad (68)$$

( $\Omega_{01}$  是共振頻率, 而  $\Omega_{02}$  是同一磁場  $\mathcal{H}$  下滿足同一方程(55)或(55')的另一個共振頻率), 自旋系統共振吸收的能量  $Q$  方為正, 否則即為負。負吸收事實上並不可能產生, 因此這些根應予拋棄。條件(68)表示, 如果  $\Omega_{01}, \Omega_{02}$  為異號(一正一負), 則此兩根所相應的共振都能發生; 如果  $\Omega_{01}, \Omega_{02}$  為同號, 則二者之中絕對值較小者不滿足(68)而應予拋棄。

由(61)–(67)可看到, 在不同的雙曲綫 I(55) 或 II(55') 上, 不同各點的共振條件并

不相同:双曲线 I 上  $\Omega_0 < 0$  以及 II 上  $\Omega_0 > 0$  的各点对应于右旋共振(“正常”情形),而其余部分对应于左旋共振(“反常”情形):

	$\Omega_0 > 0$	$\Omega_0 < 0$
双曲线 I	左	右
双曲线 II	右	左

自然,通过原点的那一支(“铁磁共振”支)(57)对应于右旋共振,而同时也可看到,不通过原点的那一支(“交换共振”支)(58)对应于左旋共振.在补偿点附近,在普通磁场中,两支都处在超高频范围.

在铁磁共振实验中往往固定射频磁场的频率  $\omega$  (操作频率),而改变恒定磁场  $\mathcal{H}$  之值以求达到共振.在这情形中,一般说来,有四个共振磁场值,对应于直线  $\Omega = \text{恒量}$  与双曲线的四个交点  $R_1, R_2, R'_1, R'_2$ .但是这四点中之两点必须抛弃,因为它们不满足条件(68);而所剩两点中,一个对应于右旋共振,另一个对应于左旋共振.

如果射频磁场为线偏振,则在上述两个磁场中都能发生共振.这是因为如所周知,线偏振场中同时包含左、右两个圆偏振场.可是两个共振的线强却远不相同.因为以上已曾指出,线强与共振点  $R$  至切线  $CL$  之垂直距离成比例,所以一般说来,“铁磁共振”远强于“交换共振”.

我们看到,铁磁共振的经典理论<sup>[4,9]</sup>中所得之结果与本文所述的量子理论的结果在所作的近似中是相同的.量子理论的长处在于它适合于任何温度,并且自然地给出了跃迁几率(共振线强度),而后者在经典理论中,严格说来是不明确的.

在上述理论中未曾考虑线宽问题,因此磁化率的虚数部分具有  $\delta$  函数的形式,如果考虑有限的衰减,则格林函数的极点就不在实轴上,而具有以下形式<sup>[5]</sup>:

$$\sim \frac{1}{\Omega - \Omega_0 + i\Gamma},$$

而损耗就不是  $\delta$  函数,而具有劳伦茨形式:

$$\sim \frac{\Gamma}{(\Omega - \Omega_0)^2 + \Gamma^2}.$$

## § 6. 讨 论

1. 应该指出,以上所作之计算只在“弱场”范围内正确,即: a) 每个次晶格磁矩在外磁场中的磁能远小于次晶格之间的交换能,因而可认为  $\eta \cong -1$ ; b) 外磁场小于铁氧体总磁矩的“外斯(Weiss)分子场”

$$\mathcal{H} < 2 \frac{\sqrt{J_{12}J_{21}}}{\mu_0 \sqrt{g_1 g_2}} \frac{|M_1 - M_2|}{\sqrt{M_1 M_2}},$$

或

$$h < \frac{2|g_1 S_1 - g_2 S_2|}{g_1 g_2}, \quad (69)$$

因而可认为  $\gamma_1 \cong -\gamma_2 \cong \pm 1$  (参见[9]).

观察方程(55)或(55')可見,如果  $h$  之值使得以下不等式成立

$$[2(S_1 - S_2) + (g_1 - g_2)h]^2 - 4[g_1g_2h + 2(g_1S_1 - g_2S_2)]h < 0, \quad (70)$$

則  $\Omega_0$  之值將为复数(这相应于双曲綫兩翼之間的空隙部分)。德累富(Dreyfus)<sup>[6]</sup>用經典方法也得到了这个結果,他把这个情况解释成为在一定的磁場范围内沒有共振現象出現。可是从物理的观点看来,这个解释很难令人信服。我們看到,满足不等式(70)的  $h$  值处在以下范围:

$$2 \frac{(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})^2}{g_1 - g_2} < h < 2 \frac{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}{g_1 - g_2}. \quad (g_1 > g_2) \quad (71)$$

可是

$$\frac{(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})^2}{g_1 - g_2} - \frac{g_2S_2 - g_1S_1}{g_1g_2} = \frac{(g_1\sqrt{S_1} - g_2\sqrt{S_2})^2}{g_1g_2(g_1 - g_2)} > 0, \quad (72)$$

即在不等式(71)所决定的范围中,条件(69)已不能滿足,因此方程(55)或(55')事实上已不复成立。

2. 在补偿点附近,

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &\cong 0, \\ g_1S_1 - g_2S_2 &\cong 0. \end{aligned}$$

因此,式(44)已不复正确。只要补偿点并不很靠近居里点(这在大部分鉄氧体中确是如此),本节之初所指出的条件 a) 仍然滿足,而条件 b) 已不滿足。在这情形中,  $\gamma_1, \gamma_2, \eta$  都与外磁場有关。在“磁补偿点”  $T_0(g_1S_1 - g_2S_2 = 0)$  上,可以认为

$$\gamma_1 \cong \gamma_2 = -ah, \quad \eta = -1 + 2\alpha^2h^2, \quad (73)$$

其中  $\alpha > 0$ , 数量級为 1, 并且近似与  $h$  无关(参見文献[8])。将(73)代入(36)后可以看到,一般說来,所得之共振頻率曲綫已不再能被分解成为两对双曲綫。在平面  $(\Omega, h)$  上,这是一条高次代数曲綫,其中  $h$  与  $\Omega_0$  均以偶次項出現,而且看来并不存在着  $h$  值的某一范围,其中  $\Omega_0$  不具有实根。

因此,我們看到,經典理論的結果(它对应于我們的  $\gamma_1 = -\gamma_2 = \pm 1$  的情形)只是在离补偿点較远,外磁場并不很強的情形中才与較普遍的量子理論的結果相重合。在补偿点附近經典理論的誤差較大,而且它所給出的共振磁場数值在补偿点附近一般偏高。波立佛(Paulevé)<sup>[7]</sup>曾將經典理論的結果与 Li-Cr 鉄氧体及 Gd 鉄氧体的实验数据作了比較。在补偿点附近,經典理論的共振磁場曲綫处处高于实验曲綫,很可能这是由于以上我們指出的誤差所致(参見文献[10])。

### 参 考 文 献

- [1] Wangness, R. K., *Phys. Rev.*, **91** (1953), 1085; **95** (1954), 339.
- [2] Гуревич, А. Г., Ферриты на сверхвысоких частотах, Москва, (1960).
- [3] 論文集: Ферромагнитный резонанс, Москва, (1952).
- [4] Боголюбов, Н. Н., Тябликов, С. В., *ДАН СССР*, **126** (1959), 53.
- [5] Тябликов, С. В., *ФТТ*, **2** (1960), 361; 2009.
- [6] Dreyfus, V., *Compt. Rend.*, **241** (1955), 552; 1270.
- [7] Paulevé, J. J., *Appl. Phys.*, **29** (1958), 259.
- [8] Пу Фу-чо (蒲富格), *ДАН СССР*, **130** (1960), 1244.
- [9] Тябликов, С. В., *ФММ*, **3** (1956) 3; **8** (1959), 152.

[10] Geschwind, S. Walker, L. R., *J. Appl. Phys., Suppl. to* **30** (1959), 163 S.

## КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ФЕРРИМАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА— УСЛОВИЯ РЕЗОНАНСА В ИЗОТРОПНОМ ФЕРРИТЕ

Ян Ши

Резюме

В настоящей статье методом двухвременных функций Грина исследованы вопросы ферримагнитного резонанса в изотропном феррите с двумя магнитными под-решетками. Формулы для магнитной восприимчивости и условия резонанса в первом приближении совпадают с соответствующими результатами классической теории. Предлагаемая квантовая теория пригодна в широком интервале температур и естественным образом даёт вероятности резонансного перехода спиновой системы, пропорциональные интенсивности резонансной кривой. Обсуждаются вопросы области применения теории и необходимых поправок в окрестности точки компенсации.