

各向异性铁磁体的共振频率*

孙 鑫
(复 旦 大 学)

提 要

利用旋转坐标系的方法, 计算了各向异性铁磁体的磁化强度和共振频率, 求得了共振频率和交换作用张量之间的关系, 由这些关系式利用共振数据可以确定交换主轴的方向和交换作用主值.

对于 $S = \frac{1}{2}$ 的单轴各向异性铁磁体和反铁磁体的性质, 蒲富恪等人已作了详细研究^[1]. 更为一般的各向异性应该考虑交换作用张量 $I_{\mu\nu}$. 本文讨论了处理对称交换张量 (任意 S) 的一般方法, 并计算了铁磁系统的共振频率.

一、各向异性交换作用哈密顿量

各向异性磁性系统哈密顿量的一般表达式为

$$\mathcal{H} = -g\mu \sum_{i\nu} B'_\nu S_i^{\nu'} - \sum_{ij} \sum_{\mu\nu} I_{\mu\nu}(\mathbf{i} - \mathbf{j}) S_i^{\mu'} S_j^{\nu'}; \quad (1.1)$$

其中 $S_i^{\nu'}$ 是第 \mathbf{i} 个格点上自旋算符在 (x', y', z') 坐标系中 ν 轴上的分量, B'_ν 是外磁场在此坐标系中的 ν 分量, $I_{\mu\nu}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ 是对称的交换作用张量. 若只考虑近邻交换作用, 则有

$$I_{\mu\nu}(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = I_{\mu\nu} \Delta(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{a}), \quad I_{\mu\nu} = I_{\nu\mu}; \quad (1.2)$$

其中 \mathbf{a} 是相邻格点间的位矢量,

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

哈密顿量(1.1)的第二项是自旋算符的二次型, 利用么正变换可将它标准化:

$$S_j^{\mu'} = U^{-1} S_j^{\mu} U, \quad (1.3)$$

$$U = e^{i\gamma \sum_i S_i^z} e^{i\beta \sum_i S_i^x} e^{i\alpha \sum_i S_i^z}. \quad (1.4)$$

上述么正变换相当于将 (x', y', z') 坐标系旋转欧勒角 (α, β, γ) , 所以变换(1.3)就是如下线性变换:

$$S_j^{\mu'} = \sum_{\nu} \mathcal{D}_{\nu\mu}(\alpha, \beta, \gamma) S_j^{\nu}, \quad (1.5)$$

其中 $\mathcal{D}_{\nu\mu}$ 是正交变换矩阵, 具体形式是

* 1964 年 9 月 5 日收到, 1965 年 6 月 8 日收到修改稿.

$$\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \beta \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

将(1.5)的逆变换代入(1.1)可得

$$\mathcal{H} = -g\mu \sum_{i\nu} B_{\nu}^0 S_i^{\nu} - \sum_{\mathbf{ia}} \sum_{\rho\theta} \left(\sum_{\mu\nu} I_{\mu\nu} \mathcal{D}_{\mu\rho} \mathcal{D}_{\nu\theta} \right) S_i^{\rho} S_{i+\mathbf{a}}^{\theta}, \quad (1.6)$$

其中

$$B_{\nu}^0 = \sum_{\mu} \mathcal{D}_{\mu\nu}(\alpha, \beta, \gamma) B'_{\mu}.$$

选择欧勒角 (α, β, γ) , 使 $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ 满足条件

$$\sum_{\mu\nu} I_{\mu\nu} \mathcal{D}_{\mu\tau} \mathcal{D}_{\nu\theta} = I_{\tau} \Delta(\tau - \theta). \quad (1.7)$$

因为 $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ 是正交变换, 所以 I_{τ} 由如下久期方程决定:

$$\begin{vmatrix} I_{11} - I_{\tau} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I_{\tau} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I_{\tau} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.8)$$

因为 $I_{\mu\nu}$ 是实对称张量, 所以 I_{τ} 是实数. 同时, (x', y', z') 坐标系旋转的欧勒角由如下方程确定:

$$\sum_{\mu\nu} I_{\mu\nu} \mathcal{D}_{\mu\tau} \mathcal{D}_{\nu\theta} = 0, \quad (\tau \neq \theta). \quad (1.9)$$

将(1.7)代入(1.6)后, 哈密顿量简化成标准形式:

$$\mathcal{H} = -g\mu \sum_{i\nu} B_{\nu}^0 S_i^{\nu} - \sum_{\mathbf{ia}\tau} I_{\tau} S_i^{\tau} S_{i+\mathbf{a}}^{\tau}. \quad (1.10)$$

旋转后的坐标系称为交换主轴坐标系, S^{τ} 和 B_{τ}^0 是自旋算符和外磁场沿交换主轴的 τ 分量, I_{τ} 是交换作用张量的主值, 由(1.9)解得 (α, β, γ) , 确定了交换主轴坐标系的方位. (1.10) 是双轴各向异性形式, 因此一般的对称各向异性交换作用经坐标旋转后总可化为双轴各向异性形式. 若

$$I_{\mu\nu} = I\Delta(\mu - \nu) + \delta, \quad (1.11)$$

则交换主值为: $I, I, I + 3\delta$; 而三个欧勒角为

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}, \quad \beta = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \gamma = 0;$$

此时体系是单轴各向异性的, 异性轴沿象限对角线.

以上结果是一般的, 对铁磁和反铁磁系统都成立. 下面将具体讨论铁磁系统, 即交换作用主值 I_{τ} 中绝对值最大者为正的情况. 为了确定起见, 设

$$I_1 > |I_2| > |I_3|.$$

由于哈密顿量(1.10)是各向异性的, 所以, 磁化强度 \mathbf{M} 的方向不一定和外磁场 \mathbf{B} 平行. 设平衡的磁化强度 \mathbf{M} 在交换主轴坐标系中的极角为 (θ, φ) . 如果将交换主轴坐标系再旋转一次, 使新的 z 轴沿磁化强度 \mathbf{M} 的方向(称此新坐标系为 M 坐标系, 此坐标系中

自旋算符的分量表示为 σ_i^μ), 则有如下关系:

$$M = \langle \sigma^z \rangle, \quad \langle \sigma^x \rangle = \langle \sigma^y \rangle = 0. \quad (1.12)$$

这样的旋转可用下面的么正变换来实现:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_j^\mu &= e^{-i\theta(\mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i)} S_j^\mu e^{i\theta(\mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i)} \\ \mathbf{n} &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

在此么正变换下,

$$\sigma_j^\mu = \sum_\nu \mathfrak{U}_{\mu\nu}(\theta, \varphi) S_j^\nu, \quad (1.14)$$

$$\mathfrak{U}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

将(1.14)的逆变换代入(1.10)后,可得到

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{1}{2} g\mu \sum_{i^\mu} B_\mu \sigma_i^\mu - \sum_{i\mathbf{a}} (A_{zz} \sigma_i^z \sigma_{i+\mathbf{a}}^z + A_{+-} \sigma_i^+ \sigma_{i+\mathbf{a}}^- + \\ &+ A_{++} \sigma_i^+ \sigma_{i+\mathbf{a}}^+ + A_{+z} \sigma_i^+ \sigma_{i+\mathbf{a}}^z) + \text{c. c.}, \\ \sigma^+ &= \sigma^x + i\sigma^y, \quad \sigma^- = \sigma^x - i\sigma^y; \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{zz} &= \frac{1}{2} [I_1 + (I_2 - I_1) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + (I_3 - I_1) \cos^2 \theta], \\ A_{+-} &= \frac{1}{2} \left[I_1 + \frac{1}{2} (I_2 - I_1) (\cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \frac{1}{2} (I_3 - I_1) \sin^2 \theta \right], \\ A_{++} &= \frac{1}{4} (I_2 - I_1) \left(\cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi + \frac{2}{i} \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \right) + \\ &+ \frac{1}{4} (I_3 - I_1) \sin^2 \theta = A_{--}^*, \\ A_{+z} &= (I_2 - I_1) \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi - (I_3 - I_1) \sin \theta \cos \theta + \\ &+ \frac{1}{i} (I_2 - I_1) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi = A_{-z}^*, \\ B_\mu &= \sum_\nu \mathfrak{U}_{\mu\nu}(\theta, \varphi) B_\nu^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

当磁化达到平衡时,体系的自由能 $F = -\frac{1}{\beta} \ln \text{Sp} e^{-\beta \mathcal{H}}$ 应为极小,因此 M 坐标系的方位角 (θ, φ) 可由自由能的极值条件确定,其具体计算将在第三节中进行.

进一步可以将哈密顿量(1.15)分离成主要项和微扰项两部分,为此引进自旋偏离算符 $\Delta \sigma_i$:

$$\Delta \sigma_i = \sigma_i - \langle \sigma_i \rangle, \quad \langle \Delta \sigma_i \rangle = 0. \quad (1.17)$$

很明显,哈密顿量中含 $\Delta \sigma_i$ 的部分其系综平均值将是小量,利用这性质可将(1.15)分成两部分:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}', \quad (1.18)$$

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i \mathcal{H}_{0i}; \quad \mathcal{H}_{0i} = 2z M^2 A_{zz} - (g\mu B_z + 4Mz A_{zz}) \sigma_i^z, \quad (1.19)$$

$$\mathcal{H}' = - \sum_{\mathbf{ia}} \left[\frac{g\mu}{2z} (B_x \Delta\sigma_{\mathbf{i}}^x + B_y \Delta\sigma_{\mathbf{i}}^y) + MA_{+z} \Delta\sigma_{\mathbf{i}}^+ + A_{zz} \Delta\sigma_{\mathbf{i}}^z \Delta\sigma_{\mathbf{i+a}}^z + \right. \\ \left. + A_{+z} \Delta\sigma_{\mathbf{i}}^+ \Delta\sigma_{\mathbf{i+a}}^z + A_{+-} \Delta\sigma_{\mathbf{i}}^+ \Delta\sigma_{\mathbf{i+a}}^- + A_{++} \Delta\sigma_{\mathbf{i}}^+ \Delta\sigma_{\mathbf{i+a}}^+ \right] + \text{c. c.} \quad (1.20)$$

\mathcal{H}' 是由 $\Delta\sigma$ 组成的, 与 \mathcal{H}_0 相比可将它看成是微扰项, 为了表示它是微量, 在 \mathcal{H}' 前引进了因子 λ , 在计算结果中令 $\lambda = 1$. 很明显, 如果略去微扰项 \mathcal{H}' , 就可得到分子场近似. 应该注意到 \mathcal{H}_0 是迭加型的, 这一性质对下面计算零级近似格临函数和系综平均值很重要.

二、格临函数

为了求得磁化强度和共振频率, 定义两组双时温度格临函数^[2]:

$$\begin{aligned} \langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle &= -i\theta(t-t') \langle [\sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}(t); Q_{\mathbf{m}}^n(t')]_- \rangle, \\ Q_{\mathbf{m}}^n(t') &= (\sigma_{\mathbf{m}}^z(t'))^n \sigma_{\mathbf{m}}^-(t'), \quad n = 0, 1, \dots, (2S-1). \end{aligned} \quad (2.1)$$

格临函数的运动方程是

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle &= i\delta(t-t') \langle [\sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}; Q_{\mathbf{m}}^n]_- \rangle \pm \\ &\pm (g\mu B_z + 4MzA_{zz}) \langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle \mp \lambda g\mu (B_x \pm iB_y) \langle\langle \Delta\sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle \pm \\ &\pm \lambda \sum_{\mathbf{a}} \{ 4A_{zz} \langle\langle \Delta\sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}(t) \Delta\sigma_{\mathbf{l+a}}^z(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle - 4A_{+-} \langle\langle \Delta\sigma_{\mathbf{l+a}}^{\pm}(t) \Delta\sigma_{\mathbf{l}}^z(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle - \\ &- 4A_{\mp\mp} \langle\langle \Delta\sigma_{\mathbf{l}}^z(t) \Delta\sigma_{\mathbf{l+a}}^{\mp}(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle + A_{\pm z} \langle\langle \Delta\sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}(t) \Delta\sigma_{\mathbf{l+a}}^z(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle + \\ &+ A_{\mp z} \langle\langle (\Delta\sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}(t) \Delta\sigma_{\mathbf{l+a}}^{\mp}(t) - 2\Delta\sigma_{\mathbf{l}}^z(t) \Delta\sigma_{\mathbf{l+a}}^z(t)) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle - \\ &- 2M \langle\langle 2A_{+-} \Delta\sigma_{\mathbf{l+a}}^z(t) + 2A_{\mp\mp} \Delta\sigma_{\mathbf{l+a}}^{\mp}(t) + A_{\mp z} \Delta\sigma_{\mathbf{l}}^z(t) + \\ &+ A_{\mp z} \Delta\sigma_{\mathbf{l+a}}^z(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle \}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

在上方程的右端, 出现了新的格临函数

$$\langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^z(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle, \quad \langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\alpha}(t) \sigma_{\mathbf{l+a}}^{\beta}(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle,$$

在它们的前面都有因子 λ , 如果计算准确到 λ 的一级近似, 则这些格临函数只要准确到零级近似. 在零级近似下, 只须对 \mathcal{H}_0 取系综平均, 注意到 \mathcal{H}_0 的迭加性, 不难求得

$$\langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^z(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle_0 = 0, \quad (2.3)$$

$$\langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\alpha}(t) \sigma_{\mathbf{l+a}}^{\beta}(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle_0 = \begin{cases} \langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\alpha} \rangle_0 \langle \sigma_{\mathbf{l+a}}^{\beta}(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle_0, & \mathbf{l} \neq \mathbf{m}; \\ \langle \sigma_{\mathbf{l+a}}^{\beta} \rangle_0 \langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\alpha}(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle_0, & \mathbf{l} = \mathbf{m}. \end{cases} \quad (2.4)$$

(2.4) 相当于格临函数方法中所惯用的切断近似. 当把哈密顿量分离出微扰项后, 就可以明显地看到, 切断近似的根据是分子场近似. 利用条件(1.12)就得到

$$\left. \begin{aligned} \langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}(t) \sigma_{\mathbf{l+a}}^z(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle_0 &= M \langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle_0, \\ \langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}(t) \sigma_{\mathbf{l+a}}^{\pm}(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle_0 &= 0, \\ \langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^z(t) \sigma_{\mathbf{l+a}}^z(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle_0 &= M \langle\langle \sigma_{\mathbf{l+a}}^z(t) | Q_{\mathbf{m}}^n(t') \rangle\rangle_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

将(2.5)代入(2.2), 并对时间变数 $(t-t')$ 作傅里叶变换, 则得到谱表象中的运动方程(令 $\lambda = 1$)

$$\begin{aligned} E \langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\pm} | Q_{\mathbf{m}}^n \rangle\rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle [\sigma_{\mathbf{l}}^{\pm}; Q_{\mathbf{m}}^n]_- \rangle \pm (g\mu B_z + 4zMA_{zz}) \langle\langle \sigma_{\mathbf{l}}^{\pm} | Q_{\mathbf{m}}^n \rangle\rangle \mp \\ &\mp 4MA_{+-} \sum_{\mathbf{a}} \langle\langle \sigma_{\mathbf{l+a}}^z | Q_{\mathbf{m}}^n \rangle\rangle \mp 4MA_{\mp\mp} \sum_{\mathbf{a}} \langle\langle \sigma_{\mathbf{l+a}}^{\mp} | Q_{\mathbf{m}}^n \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (2.6)$$

对格点位矢作傅里叶变换:

$$\langle\langle \sigma_{\mathbf{f}}^{\pm} | Q_{\mathbf{m}}^n \rangle\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{k}}^{\pm}(E) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{m})}, \quad (2.7)$$

将它代入(2.6)后可解得

$$G_{\mathbf{k}}^{\pm}(E) = \frac{1}{2} \left[\frac{a^{\pm} + \frac{F_{\mathbf{k}}^{\pm}}{E_{\mathbf{k}}}}{E - E_{\mathbf{k}}} + \frac{a^{\pm} - \frac{F_{\mathbf{k}}^{\pm}}{E_{\mathbf{k}}}}{E + E_{\mathbf{k}}} \right], \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{\mathbf{k}} &= \{ [g\mu B_z + 4Mz(A_{zz} - A_{+-}\gamma_{\mathbf{k}})]^2 - 16M^2z^2 A_{++}^* A_{++} \gamma_{\mathbf{k}}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \\ F_{\mathbf{k}}^{\pm} &= \pm a^{\pm} [g\mu B_z + 4Mz(A_{zz} - A_{+-}\gamma_{\mathbf{k}})] \mp 4a^{\mp} Mz A_{\mp\mp} \gamma_{\mathbf{k}}, \\ \gamma_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{z} \sum_{\mathbf{a}} e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}, \quad a^{\pm} = \frac{1}{2\pi} \langle [\sigma^{\pm}; Q^n]_- \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

其中 $E_{\mathbf{k}}$ 是格临函数的极点, 在低温下表示元激发的能谱.

利用文献[3]所提供的方法, 可求得确定磁化强度 \mathbf{M} 的超越方程:

$$\left. \begin{aligned} S = \frac{1}{2}: \quad M &= \frac{1}{4P_{11}}, \\ S = 1: \quad M &= \frac{8P_{11}}{12P_{11}^2 - 4P_{12}^2 + 1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$P_{11} = \frac{1}{2} \frac{v}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{E_{\mathbf{k}}} [g\mu B_z + 4Mz(A_{zz} - A_{+-}\gamma_{\mathbf{k}})] \operatorname{cth} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2\theta},$$

$$P_{12} = -\frac{1}{2} \frac{v}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{E_{\mathbf{k}}} 4Mz A_{++}^* \gamma_{\mathbf{k}} \operatorname{cth} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2\theta}.$$

在低温下, 自旋偏离很小, 磁化接近饱和, M 近似等于 S .

三、共振频率

在上节格临函数中的 $Q_{\mathbf{m}}^n$ 取为 $Q_{\mathbf{m}}^0 = \sigma_{\mathbf{m}}^-$, 则可得到复数磁化率为^[4]

$$\left. \begin{aligned} \chi_{\pm}(\omega) &= \chi'_{\pm}(\omega) + i\chi''_{\pm}(\omega), \\ \chi'_{\pm}(\omega) &= \mp g^2 \mu^2 M P \frac{\omega \pm A_0}{\omega^2 - E_0^2}, \\ \chi''_{\pm}(\omega) &= \pm \frac{\pi M}{2} g^2 \mu^2 \left[\left(1 + \frac{A_0}{E_0}\right) \delta(\omega \mp E_0) - \left(1 - \frac{A_0}{E_0}\right) \delta(\omega \pm E_0) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中

$$A_0 = g\mu B_z + 4Mz(A_{zz} - A_{+-}).$$

利用(2.9)的第一式, 由(3.1)式可得到共振频率 Ω 为

$$\begin{aligned} \Omega = E_0 &= \left\{ \left\{ g\mu B_z + 2Mz \left[(I_2 - I_1) \left(\sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) + \right. \right. \right. \\ &+ (I_3 - I_1) \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \left. \right\}^2 - M^2 z^2 \{ [(I_2 - I_1) (\cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) + \\ &+ (I_3 - I_1) \sin^2 \theta]^2 + (I_2 - I_1)^2 \cos^2 \theta \sin^2 2\varphi \} \left. \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

为了明显地求出共振频率 Ω 和外磁场 B 的关系, 还需求出磁化强度 \mathbf{M} 的方位角 θ, φ 与外磁场的关系. 由自由能极小可得

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -\beta \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right\rangle = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\beta \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \quad (3.3)$$

将哈密顿(1.15)代入上式就得到

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} g\mu M \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \sum_a \left[\frac{\partial A_{zz}}{\partial \theta} \langle \sigma_i^z \sigma_{i+a}^z \rangle + \frac{\partial A_{+-}}{\partial \theta} \langle \sigma_i^+ \sigma_{i+a}^- \rangle + \frac{\partial A_{++}}{\partial \theta} \langle \sigma_i^+ \sigma_{i+a}^+ \rangle + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial A_{+-}}{\partial \theta} \langle \sigma_i^+ \sigma_{i+a}^z \rangle \right] + \text{c. c.} = 0, \\ & -\frac{1}{2} g\mu M \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \sum_a \left[\frac{\partial A_{zz}}{\partial \varphi} \langle \sigma_i^z \sigma_{i+a}^z \rangle + \frac{\partial A_{+-}}{\partial \varphi} \langle \sigma_i^+ \sigma_{i+a}^- \rangle + \frac{\partial A_{++}}{\partial \varphi} \langle \sigma_i^+ \sigma_{i+a}^+ \rangle + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial A_{+-}}{\partial \varphi} \langle \sigma_i^+ \sigma_{i+a}^z \rangle \right] + \text{c. c.} = 0. \end{aligned}$$

在零级近似下, 不同格点算符乘积的系综平均值等于各格点上算符系综平均值的乘积, 这样一来, 上方程组简化为

$$\left. \begin{aligned} & g\mu(B_x^0 \cos \theta \cos \varphi + B_y^0 \cos \theta \sin \varphi - B_z^0 \sin \theta) + \\ & \quad + zM[(I_2 - I_1) \sin^2 \varphi - (I_3 - I_1)] \sin 2\theta = 0, \\ & g\mu(B_y^0 \sin \theta \cos \varphi - B_x^0 \sin \theta \sin \varphi) + zM(I_2 - I_1) \sin^2 \theta \sin 2\varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

当外磁场不存在时, 由上式可求得 $\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0$. 此时磁化强度 \mathbf{M} 沿 x 主轴. 由(3.2)得到共振频率为

$$\Omega_0 = 2Mz \sqrt{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}. \quad (3.5)$$

所以, 当恒定的外磁场为零时, 仍有共振发生, 这是由于存在着各向异性场的缘故.

下面将分几种情况来讨论共振频率和交换作用张量之间的关系.

1. 外磁场比各向异性小得多 ($g\mu B \ll Mz(I_1 - I_2)$).

此时由(3.4)可近似求得

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0.$$

代入(3.2)得

$$\Omega(B) = \Omega_0 \left[1 + \frac{g\mu B_x^0}{4Mz} \left(\frac{1}{I_1 - I_3} + \frac{1}{I_1 - I_2} \right) \right], \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} B_x^0 &= (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma) B'_x + \\ & \quad + (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) B'_y + \sin \beta \sin \gamma B'_z. \end{aligned}$$

上面两式给出共振频率和外磁场分量 (B'_x, B'_y, B'_z) 之间的线性关系, 其系数与欧勒角有关. 因此, 若在实验上测得 Ω 与 B'_x, B'_y, B'_z 曲线的斜率, 就可得到确定交换主轴方位角 (α, β, γ) 的关系式.

2. 外磁场比各向异性大得多 ($g\mu B \gg Mz(I_1 - I_3)$).

此时,

$$\cos \theta = \frac{B_z^0}{B}, \quad \tan \varphi = \frac{B_y^0}{B_x^0},$$

所以磁化强度 \mathbf{M} 沿外磁场方向. 由(3.2)可得共振频率曲线的渐近线是

$$\Omega(B) = g\mu B + d, \quad (3.7)$$

$$d = 2Mz \left[(I_2 - I_1) \left(\sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) + (I_3 - I_1) \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \right].$$

如果在实验上测得不同方向外磁场下的渐近线截距 d , 利用上式, 及 φ, θ 与外磁场在实验室坐标系中的极角间的关系, 也能确定交换主轴的方位.

下面再讨论外磁场沿交换主轴的情况.

3. 外磁场沿 x 主轴 ($B_x^0 = B, B_y^0 = B_z^0 = 0$).

由(3.4)解得

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0.$$

这时磁化强度沿外磁场方向. 由(3.2)可得

$$\Omega(B) = \sqrt{[g\mu B + zM(2I_1 - I_2 - I_3)]^2 - z^2 M^2 (I_2 - I_3)^2}. \quad (3.8)$$

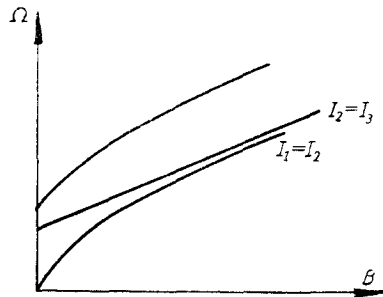


图1 磁场沿 x 主轴时 Ω 和 B 的关系图

4. 外磁场沿 y 主轴 ($B_y^0 = B, B_x^0 = B_z^0 = 0$).

此时由(3.4)解得

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } B < B_{12} \equiv \frac{2zM(I_1 - I_2)}{g\mu} \text{ 时, } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{g\mu B}{2zM(I_1 - I_2)}; \\ \text{当 } B \geq B_{12} \text{ 时, } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

这说明, 随着外磁场的增大, 磁化强度在 xy 平面内由 x 主轴逐渐向 y 主轴旋转, 并当 B 增大到 B_{12} 时, 磁化强度沿 y 主轴. 此后 B 的进一步增强将不再改变 \mathbf{M} 的方向. 将(3.9)代入(3.2)得到

$$\Omega(B) = \begin{cases} \left\{ \left\{ g\mu B \sin \varphi + 2zM \left[\frac{1}{2} (I_1 - I_3) + (I_1 - I_2) \left(\frac{1}{2} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \right) \right] \right\}^2 - M^2 z^2 [(I_1 - I_2) \cos^2 \varphi - (I_1 - I_3)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, & B < B_{12}; \\ \sqrt{\left\{ g\mu B - 2zM \left[I_1 - I_2 - \frac{1}{2} (I_1 - I_3) \right] \right\}^2 - M^2 z^2 (I_1 - I_3)^2}, & B \geq B_{12}. \end{cases} \quad (3.10)$$

特别是当 $B = B_{12}$ 时

$$\Omega(B_{12}) = 0, \tag{3.11}$$

这是由于外磁场抵消了各向异性场的缘故。

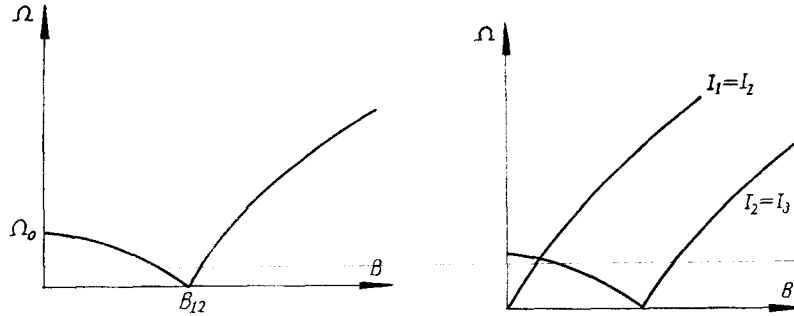


图2 磁场沿 y 主轴时 Ω 和 B 的关系图

5. 外磁场沿 z 主轴 ($B_z^0 = B, B_x^0 = B_y^0 = 0$).

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } B < B_{13} \equiv \frac{2zM(I_1 - I_3)}{g\mu} \text{ 时, } \cos\theta &= \frac{g\mu B}{2zM(I_1 - I_3)}, \quad \varphi = 0; \\ \text{当 } B \geq B_{13} \text{ 时, } \theta &= 0, \quad \varphi \text{ 任意.} \end{aligned} \right\} \tag{3.12}$$

此时 \mathbf{M} 随着 B 的增加由 x 主轴转向 z 主轴, 并在 $B = B_{13}$ 时, \mathbf{M} 沿 z 主轴. 当 B 再增强时, \mathbf{M} 方向不变. 将(3.12)代入(3.2)可得

$$\Omega(B) = \begin{cases} \left\{ \left\{ g\mu B \cos\theta + 2zM \left[\frac{3}{2}(I_3 - I_1) \cos^2\theta - \frac{1}{2}(I_2 - I_1) - \frac{1}{2}(I_3 - I_1) \right] \right\}^2 - z^2 M^2 [(I_1 - I_3) \cos^2\theta + (I_3 - I_2)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, & B < B_{13}; \\ \sqrt{\left\{ g\mu B + 2zM \left[(I_3 - I_1) - \frac{1}{2}(I_2 - I_1) \right] \right\}^2 - z^2 M^2 (I_2 - I_1)^2}, & B \geq B_{13}; \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\Omega(B_{13}) = 0. \tag{3.14}$$

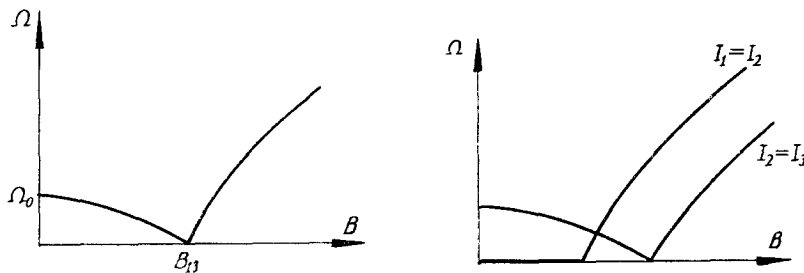


图3 磁场沿 z 主轴时 Ω 和 B 的关系图

在以上的结果中, 如果令 $I_1 = I_2$ 或 $I_2 = I_3$, 则得到单轴各向异性的情况, 此时本文的结果还原为文献[5]中所详细讨论的结果。

从上面计算结果看到, 如果在实验上测得 Ω_0 和 B_{12}, B_{13} 后, 就可求得交换作用主值之差, 在其他实验配合下 (例如自旋波共振), 可确定交换作用主值. 因此, 根据本文所得到

的共振频率和交换作用张量之间的关系,利用共振数据可确定 $I_{\mu\nu}$ 。

本文只对铁磁系统作了详细计算,但此方法可推广到其他磁性系统。在一般情况下, I_{τ} 可正可负,晶格结构也是多种多样的,此时磁性系统可具有各种不同的自旋位形分布。利用本文方法能够求出各种位形分布的共振频率,根据所求得的关系式,就可以用共振数据来确定磁性系统的自旋位形分布,这也是利用共振来研究磁对称性的一种方法。

本工作是在周世勋教授指导下完成的,在工作过程中曾得到教研组许多同志的帮助,在此向他们表示深切的谢意。

参 考 文 献

- [1] Пу Фу-чо, Тябликов, С. В., Шиклош, Т., *Acta Phys. Hung.*, **11** (1960), 323; **12** (1960), 35; Пу Фу-чо, *ФТТ*, **3** (1961), 476.
- [2] Зубарев, Д. Н., *УФН*, **71** (1960), 71.
- [3] R. A. Tahir-kheli, D. ter. Naar, *Phys. Rev.*, **127** (1962), 88; Тябликов, С. В., *ФММ*, **16** (1963), 312.
- [4] Тябликов, С. В., *ФТТ*, **2** (1960), 361.
- [5] Вонсовский, С. В., Ферромагнитный резонанс (1961).

THE RESONANT FREQUENCY OF THE ANISOTROPIC FERROMAGNET

SUEN SHIN

(Futan University)

ABSTRACT

The magnetization and the resonant frequency of the anisotropic ferromagnet are calculated by means of rotation of the coordinate system. On the basis of the relations between the resonant frequency and the tensor of the exchange interaction, which have been obtained in this paper, the principal values of the exchange interaction and the directions of the principal axes of the exchange interaction may be determined by using the experimental data of resonance.