

## 关于核子的电形状因子\*

郑希特 汪克林 王明中

### 一、

近年来,核子结构的问题引起了人们极大的兴趣。目前一般都认为核子外围为 $\pi$ 介子云所环绕( $P$ 波为主),中心情况则不清楚。泡利(Pauli),Dancoff<sup>[1]</sup>曾试图用强耦合介子理论来解决核子反常磁矩的问题,他们认为,核子是裸核子与外围介子云所组成的系统。把裸核子处理成一个一定分布的核源,而对介子云以场论处理。由于通常的微扰论不能应用,他们采取了一系列的变换,而把哈密顿量按耦合常数的倒数展开。随后,Pais和Serber<sup>[2]</sup>进行了更一般的变换,其结果可利用来解决核子结构问题。Morita<sup>[3]</sup>曾用这样的方法进行了计算,所得的电形状因子在较小的动量传递时能解释实验结果,这说明了这样的方法是有一定道理的。不过,文献[3]中采用的核源形式在物理上不一定很有根据,并且,以此计算出的质子均方半径 $\langle r^2 \rangle^p$ 与实验结果符合不太好。本文将选取另外一种核源分布,计算结果表明,不论是 $\langle r^2 \rangle^p$ 的计算或是电形状因子的计算都与实验很好地符合。

### 二、

我们假定核子外围是 $\pi$ 介子云,中间是一个静止的核源,其分布函数为 $U(r)$ (球对称),并认为外围介子是 $P$ 波介子。在强耦合对称赝标介子理论中完成Pais-Serber变换后,介子的径向波函数 $\chi$ 满足方程<sup>[3]</sup>

$$\left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} + 1\right)\chi - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{g}{\kappa} \frac{dU}{d\rho} \rho = 0, \quad (1)$$

这里 $\kappa$ 表示介子质量; $g$ 为耦合常数; $r$ 为距核心的距离; $\rho = \kappa r$ 为无量纲距离<sup>1)</sup>;  $U$ 为核源函数,它满足归一条件

$$\int U d\mathbf{x} = 1. \quad (2)$$

核子系统的电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 为<sup>[3]</sup>

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{\eta}{2} \cdot \frac{\chi^2/r^2}{\int \frac{\chi^2}{r^2} d\mathbf{x}} + \frac{1}{2} U, \quad (3)$$

$\eta$ 对质子而言是+1,对 neutron 是-1。显然从(3)式可以看出,核子的电荷分布是球对称的,在“静止源近似”中,核子的电形状因子可表示为<sup>2)</sup>

\* 1964年4月25日收到;1964年8月27日收到修改稿。

1) 本文采用自然单位  $\hbar = c = 1$ 。

2) 按定义<sup>[6]</sup>,  $G_E(q^2) = F_1(q^2) - \frac{q^2}{4M^2} \kappa F_2(q^2)$ 。在“静止源近似”中,  $M \rightarrow \infty$ , 故  $G_E(q^2)$  和  $F_1(q^2)$  趋于一致。

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) = \int \rho(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{q}$  是传递动量。

核子的低能散射实验表明, 核子可能具有一个半径为  $0.2F$  的“硬核心”<sup>[4]</sup>。因此, 我们选择这样的核源模型: 其绝大部分集中在半径为  $0.21F$  的范围内(称为核心), 超出这个范围则迅速减小。在核心内, 核源的分布情况取决于很多因素, 如各种虚的介子, 超子、核子对的产生过程等。这里假定它们的所有效果可用一个平均的均匀分布来描述, 这样,  $U(r)$  就取如下的形式<sup>1)</sup>:

$$U(\rho) = \begin{cases} A & 0 \leq \rho \leq R, \\ B \cdot \frac{e^{-\rho/a}}{\rho} & \rho \geq R. \end{cases} \quad (5)$$

这里  $R = \kappa r_0$ ,  $r_0$  是核心的半径;  $a$  是参量, 它表征核心外核源减少的快慢。因为  $U(\rho)$  必须满足(2)式的归一条件以及  $U(\rho)$  在  $R$  处应当连续, 所以

$$B = AR e^{R/a}, \quad A = \frac{3}{4\pi} \frac{\kappa^3}{[(R+a)^3 - a^3]}. \quad (6)$$

将(5)式代入(1)式可解出  $\chi$  来。同时, 考虑到  $\chi$  的两部分应在  $R$  处接合, 并满足当  $\rho \rightarrow \infty$  时  $\chi$  应有限的条件, 就得到介子的径向波函数  $\chi$ :

$$\chi = \begin{cases} \chi_1 = -\frac{\pi}{3} \frac{gAR}{\kappa^3} \alpha e^{-R} \left\{ \left( \frac{1}{\rho} + 1 \right) e^{-\rho} + \left( -\frac{1}{\rho} + 1 \right) e^{\rho} \right\} & 0 \leq \rho \leq R, \\ \chi_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{gAR}{\kappa^3} \left\{ D e^{R/a} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{a} \right) e^{-\rho/a} + G e^R \left( \frac{1}{\rho} + 1 \right) e^{-\rho} \right\} & \rho \geq R. \end{cases} \quad (7)$$

这里  $\alpha = \frac{1}{R} + \frac{1}{1+a}$ ,  $D = \frac{2a^2}{1-a^2}$ ,  $G = \alpha(1 - e^{-2R}) - \frac{2}{1-a^2}$ 。下面我们根据得到的  $\chi$  来求出  $G_E$ ,  $\langle R^2 \rangle^p$  及介子云的分布。

### 1. $G_E$ 的计算

将(7)代入(3)式再代入(4), 最后得到

$$\begin{aligned} G_E(q^2) = & \eta \frac{N}{q} \left\{ 2\alpha^2 e^{-2R} I_1 + \left[ \frac{1}{2R^2} (D+G)^2 + \left( \frac{D}{a} + G \right) \left( \frac{D}{R} + 2G \right) \right] \sin\left(\frac{q}{\kappa} R\right) + \right. \\ & + \frac{1}{2R} (D+G)^2 \frac{q}{\kappa} \cos\left(\frac{q}{\kappa} R\right) - \left[ D^2 e^{2R/a} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{q^2}{2\kappa^2} \right) I_2 + \right. \\ & + D G e^{(1+\frac{1}{a})R} \left( 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{q^2}{\kappa^2} \right) I_3 + G^2 e^{2R} \left( 1 + \frac{q^2}{2\kappa^2} \right) I_4 \left. \right\} + \\ & + \frac{3}{2} \frac{1}{R^2 + 3Ra + a^2} \left\{ \left[ \frac{1}{R} \left( \frac{\kappa}{q} \right)^3 + \frac{\kappa}{aq} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{q^2}{\kappa^2}} \right] \sin\left(\frac{q}{\kappa} R\right) - \right. \\ & \left. - \left[ \left( \frac{\kappa}{q} \right)^2 - \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{q^2}{\kappa^2}} \right] \cos\left(\frac{q}{\kappa} R\right) \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

1) 文献[3]中取成汤川型分布。

这里

$$N = \frac{\kappa}{2} \left\{ \alpha^2 \left[ -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\right) e^{-4R} + 2\left(R + \frac{1}{R}\right) e^{-2R} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{R}\right) \right] + D^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2a}\right) + 2DG\alpha + G^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1}, \quad (9)$$

$$I_1 = \int_0^R \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} \frac{2^n}{(2n)!} \rho^{2n-1} \right) \sin\left(\frac{q}{\kappa} \rho\right) d\rho, \quad (10)$$

$$I_2 = \int_R^{\infty} \frac{1}{\rho} e^{-2\rho/a} \sin\left(\frac{q}{\kappa} \rho\right) d\rho, \quad (11)$$

$$I_3 = \int_R^{\infty} \frac{1}{\rho} e^{-(1+\frac{1}{a})\rho} \sin\left(\frac{q}{\kappa} \rho\right) d\rho, \quad (12)$$

$$I_4 = \int_R^{\infty} \frac{1}{\rho} e^{-2\rho} \sin\left(\frac{q}{\kappa} \rho\right) d\rho, \quad (13)$$

$\eta = 1(-1)$ 时,(8)式给出质子(中子)的电形状因子.

## 2. 质子电荷分布的均方半径

按定义有

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (14)$$

它的实验值在文献[3,5]中已举出. 在(3)式中取  $\eta = +1$  代入(14)式,得

$$\langle r^2 \rangle^p = \frac{1}{2} \langle r^2 \rangle_{\pi} + \frac{1}{2} \langle r^2 \rangle_0, \quad (15)$$

这里

$$\langle r^2 \rangle_{\pi} = \int \chi^2 \rho^2 d\rho / \kappa^2 \int \chi^2 d\rho, \quad (16)$$

$$\langle r^2 \rangle_0 = \frac{4\pi}{\kappa^5} \left\{ \int_0^R A \rho^4 d\rho + \int_R^{\infty} B \frac{e^{-\rho/a}}{\rho} \rho^4 d\rho \right\}, \quad (17)$$

分别表示  $\pi$  介子和核源的电荷分布的均方半径. 把  $\chi$  代入,完成积分运算后得到

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_{\pi} = & \frac{N}{\kappa^3} \left\{ \alpha^2 e^{-2R} \left[ -\frac{1}{2} \left( R^2 + 3R + \frac{5}{2} \right) e^{-2R} + 2 \left( \frac{1}{3} R^3 - R \right) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} \left( R^2 - 3R + \frac{5}{2} \right) e^{2R} \left. \right] + D^2 \frac{1}{2a} \left( R^2 + 3Ra + \frac{5}{2} a^2 \right) + \\ & + 2DG \frac{1}{1+a} \left( R^2 + \frac{1+4a+a^2}{1+a} R + \frac{2a(1+3a+a^2)}{(1+a)^2} + \right. \\ & \left. + G^2 \frac{1}{2} \left( R^2 + 3R + \frac{5}{2} \right) \right\}, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\langle r^2 \rangle_0 = \frac{3}{5\kappa^3} \frac{R^4 + 5a(R^3 + 3aR^2 + 6a^2R + 6a^3)}{R^2 + 3Ra + 3a^2}. \quad (19)$$

从以上可以看出: 为了要与实验的  $\langle r^2 \rangle^p$  值吻合, 在  $R$  确定的情况下, 从(15)式就应当确定出  $a$  值来. 考虑到实验的误差,  $a$  值只能确定在一个很小的范围内. 当  $a$  值选取得使  $\langle r^2 \rangle^p$  的理论值与实验值符合后, 这里就再没有什么待定的参量了, 因此电形状因子的整个行为就直接反映了我们取定的核源模型是否正确.

### 3. 介子云的分布

介子云的分布是球对称的, 我们只考虑它的径向分布函数, 对(3)的第一项完成对角度变量的积分:

$$\rho_{\pi}(r) = \frac{\frac{\eta}{2} \int \frac{\chi^2}{r^2} d\Omega}{\int \frac{\chi^2}{r^2} d\mathbf{r}}, \quad (20)$$

将已知的  $\chi$  代入上式, 得

$$\rho_{\pi}(r) = \begin{cases} \frac{\eta}{2} \kappa N \alpha^2 e^{-2R} \left\{ \left( \frac{1}{\rho} + 1 \right) e^{-\rho} + \left( -\frac{1}{\rho} + 1 \right) e^{\rho} \right\}^2 & 0 \leq \rho \leq R, \\ \frac{\eta}{2} \kappa N \left\{ D e^{R/a} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{a} \right) e^{-\rho/a} + G e^R \left( \frac{1}{\rho} + 1 \right) e^{-\rho} \right\}^2 & 0 \leq \rho. \end{cases} \quad (21)$$

### 三、

1. 根据(8)式, 对(10)–(13)进行了数字计算. 图1给出质子的电形状因子理论和实验的结果. 曲线 I 的  $r_0 = 0.21F$ ,  $a = R = 0.1491$ ,  $\kappa = 0.71F^{-1}$ ; 曲线 II 的  $r_0 = 0.21$ ,  $R = 0.0882$ ,  $a = 0.135$ ,  $\kappa = 0.42$ , 其所以变动  $\kappa$  是想比较一下, 按文献[3]将介子质量 ( $\kappa = 0.71F^{-1}$ ) 变为有效质量 ( $\kappa < 0.71F^{-1}$ ) 以等效于考虑  $\pi$ - $\pi$  相互作用的影响时, 会得到什么样的结果. 从图1中可以看出, 曲线 I 和实验符合得较好. 曲线 II 符合得差一些. 虚线是文献[3]考虑了  $\pi$ - $\pi$  相互作用后得出的结果. 在低动量传递时的符合正是理论所期待的. 由于理论本身是基于“静止源近似”, 它只适用于小  $q^2$  的范围. 我们并未期望在大  $q^2$  处理论与实验值有好的符合. 图1显示出的大  $q^2$  处的符合也许是一种偶合, 也许, 作为一种模型, 这理论可以外推到较大的  $q^2$  值来说明电形状因子.

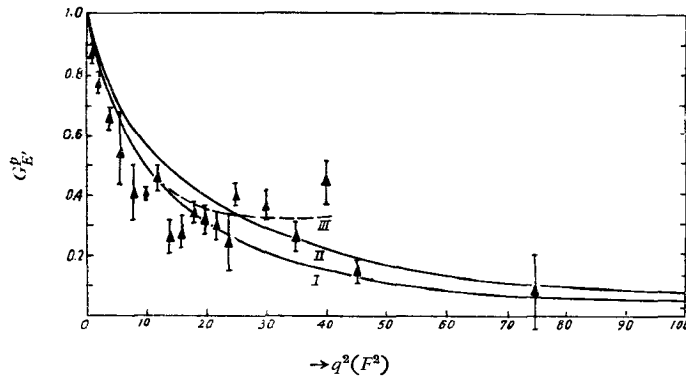


图1 质子的电形状因子实验点取自文献[5,6].

用两组参量(曲线 I, II)分别计算  $\langle r^2 \rangle^p$ , 得到  $\langle r^2 \rangle_I^p = 0.66F^2$  和  $\langle r^2 \rangle_{II}^p = 0.72F^2$ . 这与实验值<sup>[3,5]</sup>  $\langle r^2 \rangle_{\text{实验}}^p = 0.64 \sim 0.72F^2$  和  $\langle r^2 \rangle_{\text{实验}}^p = 0.64 \sim 0.67F^2$  是符合的.

2. 图2给出了中子的电形状因子(两组参量和图1中所选的不同). 由于中子电形状因子的实验数据都是间接测得的, 数据本身误差很大, 所以我们的结果可认为与实验基本上符合. 虚线仍是文献[3]的结果, 画出以资比较.

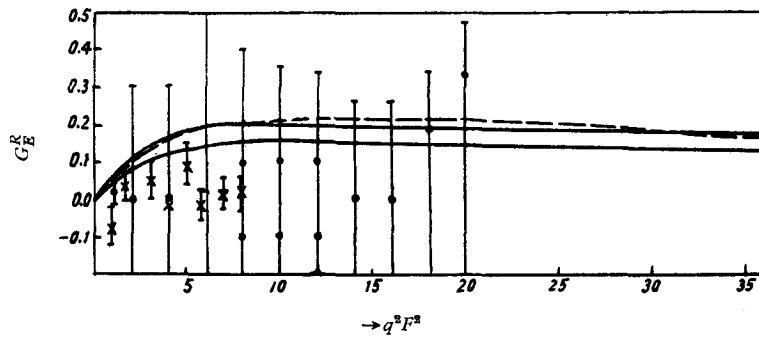


图2 中子的电形状因子实验点取自文献[5]

3. 在图3中给出了 $\pi$ 介子云分布(所取的两组参量同图1)。可以看出分布的极大位置

$r_{\max}$  分别为  $0.49F$  和  $0.41F$ 。虚线是根据 Hofstadter<sup>[7]</sup> 的质子与中子的电荷分布取差值而算得的, 因为根据(3)式, 质子与中子的电荷分布正给出 $\pi$ 介子云分布。我们的 $r_{\max}$  和他们的结果大致相符, 所不同的是我们的分布在核心范围内( $r < 0.21F$ )介子出现的几率极小, 这是比较自然的, 可能是 $U(r)$ 在 $r = 0$ 处为有限值的特点。

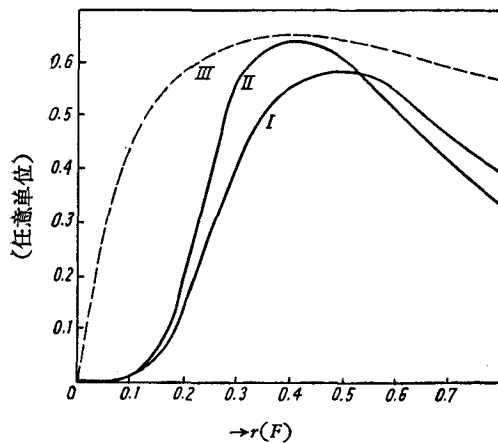


图3 介子云的径向分布

\* \* \*

本文利用这一模型得到了符合实验的 $G_E(q^2)$ 曲线和 $\langle r^2 \rangle^p$ 值。核源形式(5)式是许多复杂物理过程的总的平均效果。对核子结构的进一步实验和理论研究将有助于最后阐明

核心的复杂结构。我们知道, 只靠 $\pi$ 介子云的贡献是难于解释质子和中子的反常磁矩的, 只有在详细研究了核子结构后才能解决磁形状因子问题。

在文献[3]中还考虑了 $\pi$ - $\pi$ 相互作用, 其结果是把介子质量从 $0.71F^{-1}$ 改为有效质量 $0.35F^{-1}$ , 但这时算出的 $\langle r^2 \rangle^p$ 与实验值符合得不太好, 要想使 $\langle r^2 \rangle^p$ 最好地符合实验值却需要将 $\kappa$ 取为 $0.46 \sim 0.55F^{-1}$ 。从本文的结果看,  $\kappa$ 不必改动。换言之, 虽然 $\pi$ - $\pi$ 相互作用是肯定存在的, 但利用本文的核源模型, 可以不必直接考虑 $\pi$ - $\pi$ 相互作用的修正。因为 $\pi$ - $\pi$ 相互作用可能已间接地包含在核源的选取中去了, 正如某种自洽场方法一样。

### 参 考 文 献

- [1] Pauli, W., Dancoff, M., *Phys. Rev.*, **62** (1942), 85.
- [2] Pais, A. and Serber, R., *Phys. Rev.*, **105** (1957), 1636; *Phys. Rev.*, **113** (1959), 955.
- [3] Morita, R., *Phys. Rev.*, **130** (1963), 833.
- [4] Olson, D. N., Schopper, H. F. and Wilson, R. R., *Phys. Rev. Letters*, **6** (1961), 286.
- [5] Hand, L. N., Miller, D. G. and Richard Wilson, *Rev. Mod. Phys.*, **35** (1963), 335.
- [6] Berkelman, K., Foldman, M., Littauer, R. M., Rouse, G. and Wilson, R. R., *Phys. Rev.*, **130** (1963), 2061; Chen, K. W., Cone, A. A., Dunning, J. R., Jr., Frank, S. G. F., Ramsey, N. F., Walker, J. K. and Richard Wilson, *Phys. Rev. Letters*, **11** (1963), 561.
- [7] Hofstadter, R. and Herman, R., *Phys. Rev. Letters*, **6** (1961), 293.