

π-π 共 振 态*

葛 墨 林 段 一 士

(兰州大学物理系)

本文目的在于从解析性、么正性和交叉对称性出发,利用色散关系理论对具有共振行为的分波振幅的形式作一些讨论,并计算 P, D 波共振参数. 在讨论中包含了一个标志与 Breit-Wigner 共振公式偏离的函数 $F_{(l)}(\nu)$, 当 $F_{(l)}(\nu) = 1$ 时, 振幅具有 Breit-Wigner 共振形式. 通过以后的计算表明, 这个函数与 1 有一定的偏离, 但在共振点附近的一个较大区域内该偏离不大, 因此看来 Breit-Wigner 形式还是个较好的近似. 计算结果给出 ρ 和 f^0 粒子的共振参数为

$$m_\rho \simeq 777 \text{ MeV}, \quad m_{f^0} \simeq 1265 \text{ MeV}, \\ \rho \text{ 粒子半谱宽} \simeq 67 \text{ MeV}.$$

通过分析与计算表明, 非弹性过程与交叉道中 D 波的贡献对 P 波解的影响是比较大的.

利用固定主变元 $S = 4(\nu + 1)$ 的色散关系, 按照[1]可以得到下列分波振幅的表示式:

$$A_{(l)} = \frac{4}{\pi\nu} \int_0^\infty d\nu' \text{Im} \tilde{A}^l\left(\nu', 1 + 2\frac{\nu+1}{\nu'}\right) Q_l\left(1 + 2\frac{\nu'+1}{\nu}\right). \quad (1)$$

式中

$$\text{Im} \tilde{A}^l\left(\nu', 1 + 2\frac{\nu+1}{\nu'}\right) = \sum_{l'} \beta_{ll'} \text{Im} \tilde{A}^{l'}(\nu') P_{l'}\left(1 + 2\frac{\nu+1}{\nu'}\right), \text{ 当 } -9 < \nu < 0; \quad (2)$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

其中 l, l' 分别表示同位旋与角动量子数. 对于 $l = 1$ 的 P 波与 $l = 0$ 的 D 波, 积分是收敛的. 如所周知, 从(1)式可得

$$\text{Im} A_{(l)}(\nu) = \frac{2}{\nu} \int_0^{-\nu-1} d\nu' \text{Im} A_{(l')}^l(\nu', 1 + 2\frac{\nu+1}{\nu'}) P_l\left(1 + 2\frac{\nu'+1}{\nu}\right), \nu < -1. \quad (4)$$

这里特别需要指出的是(2)式在 $\nu \rightarrow 0$ 处仍然收敛, 在[2]中已用到这个性质. 事实上, 利用么正条件并设 A_l 当 $t \rightarrow \infty$ 时为 t 的幂次所界, 并且谱函数在交叉道交换四个和六个 π 介子时所相应的 Ландау 曲线之间为正的性质^[3], 我们不难利用梅林变换证明这一点.

* 1964年12月31日收到.

由 Moffat^[4], 引入函数

$$\Phi_{(l)l}(v) = \frac{[A_{(l)l}(v)]^{-1}}{(v - v_0)(v - z)}$$

后, 可得

$$A_{(l)l}(v) = v^l \left\{ v^l \left[\frac{1}{a_{(l)l}} + L_{(l)l}(v, v_0) + N_{(l)l}(v, v_0) \right] - (v - v_0) \sum_{n=1}^l \frac{\xi_n^{(l)l}}{v^{n-l}} - iv^l T_{(l)l}(v) \right\}^{-1}, \quad (5)$$

其中

$$L_{(l)l}(v, v_0) = -\frac{v - v_0}{\pi} P \int_0^\infty \sqrt{\frac{v'}{v' + 1}} \frac{R_{(l)l}(v') dv'}{(v' - v_0)(v' - v)},$$

$$N_{(l)l}(v, v_0) = -\frac{v - v_0}{\pi} P \int_{-\infty}^{-1} \frac{K_{(l)l}(v') dv'}{(v' - v_0)(v' - v)},$$

$$K_{(l)l} = \frac{\text{Im } A_{(l)l}(v)}{|A_{(l)l}(v)|^2}, \quad \text{当 } v < -1;$$

$$T_{(l)l}(v) = \begin{cases} R_{(l)l}(v) \sqrt{\frac{v}{v+1}}, & \text{当 } v > 0; \\ K_{(l)l}(v), & \text{当 } v < -1. \end{cases}$$

如果假定某一 l, l 状态有共振行为, 其共振点为 v_{Rl} , 则可将(5)写为

$$A_{(l)l}(v) = \frac{v^l}{(v_{Rl} - v)f_{(l)l}(v) - iv^l T_{(l)l}(v)}. \quad (6)$$

定义

$$F_{(l)l}(v) = f_{(l)l}(v)/f_{(l)l}(v_{Rl}), \quad \Gamma_l^l = [f_{(l)l}(v_{Rl})]^{-1}, \quad (7)$$

则(6)式改写为

$$A_{(l)l}(v) = \frac{v^l \Gamma_l^l}{(v_{Rl} - v)F_{(l)l}(v) - iv^l \Gamma_l^l T_{(l)l}(v)}, \quad F_{(l)l}(v_{Rl}) = 1, \quad (8)$$

式中

$$F_{(l)l}(v) = \frac{\Gamma_l^l}{v_{Rl} - v} \left\{ v^l \left[\frac{1}{a_{(l)l}} + L_{(l)l} + N_{(l)l} \right] - (v - v_0) \sum_{n=1}^l v^{l-n} \xi_n^{(l)l} \right\}. \quad (9)$$

当 $v > 0$ 时, (8)式可写为

$$A_{(l)l}(v) = \frac{v^l \Gamma_l^l}{(v_{Rl} - v)F_{(l)l}(v) - iR_{(l)l}(v) \sqrt{\frac{v^2 + 1}{v + 1}}}, \quad v > 0. \quad (10)$$

从上式可看出, 当 v 离开共振点时, 函数 $F_{(l)l}$ 对 1 偏离的大小表示着振幅对 Breit-Wigner 形式的偏离程度. 如在(10)中取 $\Gamma_l^l \rightarrow 0$, 则有

$$\text{Im } A_{(l)l}(v) = \pi v^l \Gamma_l^l \delta(v - v_{Rl}), \quad v > 0. \quad (11)$$

即如上面所定义的决定谱宽的量 Γ_l^l 与形式(8), 在零谱宽极限下仍具有通常的 δ 形式.

如果引入共振条件并引入记号 $F_{(l)l} = F_1$, $A_{(l)l} = A_1$, $\Gamma_l^l = \Gamma_1 = \gamma^{-1}$, 并利用关系式

$$\frac{1}{a_1} = \frac{v_{Rl} - v_0}{v_0} \gamma F_1(v_0), \quad \xi_1 = \frac{v_{Rl}}{v_0} \gamma F_1(0)$$

(注意上式中所有 $l = 1$ 的记号均略去), 则可将 $l = 1, l = 1$ 的 P 波的 F_1 函数写为

$$\begin{aligned} \gamma F_1(\nu) = & \frac{\nu_0}{\nu_{R_1} - \nu_0} \frac{1}{a_1} + (\nu - \nu_0) \left\{ \frac{\nu_0}{\pi} P \int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu'}{\nu' + 1}} \frac{R_1(\nu') d\nu'}{(\nu' - \nu_0)(\nu' - \nu_{R_1})(\nu' - \nu)} + \right. \\ & \left. + \frac{\nu_0}{\pi} P \int_{-\infty}^{-1} \frac{K_1(\nu') d\nu'}{(\nu' - \nu_0)(\nu' - \nu_{R_1})(\nu' - \nu)} + \frac{1}{\nu_{R_1} - \nu_0} \frac{1}{a_1} - \frac{\xi_1}{\nu_{R_1}} \right\} + \\ & + (\nu - \nu_0)^2 \left\{ \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu'}{\nu' + 1}} \frac{R_1(\nu') d\nu'}{(\nu' - \nu_0)(\nu' - \nu_{R_1})(\nu' - \nu)} + \right. \\ & \left. + \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{K_1(\nu') d\nu'}{(\nu' - \nu_0)(\nu' - \nu_{R_1})(\nu' - \nu)} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

上式也可用 $\Phi_{(1)l}$ 除以 $\nu - \nu_{R_1}$ 作哥西积分得到。它的意义等价于允许当 $\nu \rightarrow \infty$ 时 $A_1(\nu) \sim \frac{1}{\nu}$ 行为的可能性的存在。上述作法也在正半轴积分中削弱了非弹性的贡献。对 P 波振幅, 以后我们便将以(12)定义振幅(8)。上面(12)式对以后利用内插法求 T_1 的值有用。

如果在 l 道仅有强共振态贡献为主导, 则由(1)并利用(11)便有

$$\begin{aligned} A_{(l)l}(\nu) = & \frac{4}{\nu} \sum_{l'l'} (2l' + 1) \beta_{ll'}(\nu_{R_{l'l'}})^{l'} \Gamma_{l'}^{l'} \times \\ & \times P_l \left(1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu_{R_{l'l'}}} \right) Q_l \left(1 + 2 \frac{\nu_{R_{l'l'}} + 1}{\nu} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

由上式易知, 当 $0 > \nu > -\nu_m - 1$ (ν_m 为 $\nu_{R_{l'l'}}$ 中最小者) 时, $T_{(l)l}(\nu) = 0$ 。如果认为仅 P, D 波 (分别为 $l = 1$ 与 $l = 0$) 强共振态为主导, 则可得到以下方程, 它们在区间 $0 > \nu > -\nu_{R_1} - 1$ 处近似成立:

$$\frac{\nu}{(\nu_{R_1} - \nu) F_1(\nu)} = A(\nu) + \eta B(\nu), \quad (14)$$

$$\frac{\nu^2}{(\nu_{R_2} - \nu) F_2(\nu)} = \frac{1}{\eta} C(\nu) + D(\nu), \quad (15)$$

$$\eta = \Gamma_2 / \Gamma_1,$$

$$\left. \begin{aligned} A(\nu) &= \frac{6\nu_{R_1}}{\nu} P_1 \left(1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu_{R_1}} \right) Q_1 \left(1 + 2 \frac{\nu_{R_1} + 1}{\nu} \right), \\ B(\nu) &= \frac{20}{3} \frac{(\nu_{R_2})^2}{\nu} P_2 \left(1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu_{R_2}} \right) Q_1 \left(1 + 2 \frac{\nu_{R_2} + 1}{\nu} \right), \\ C(\nu) &= \frac{12\nu_{R_1}}{\nu} P_1 \left(1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu_{R_1}} \right) Q_2 \left(1 + 2 \frac{\nu_{R_1} + 1}{\nu} \right), \\ D(\nu) &= \frac{20}{3} \frac{(\nu_{R_2})^2}{\nu} P_2 \left(1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu_{R_2}} \right) Q_2 \left(1 + 2 \frac{\nu_{R_2} + 1}{\nu} \right). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

为了避免由于在(14), (15)式左端分母中忽略了虚部 (这是零谱宽近似的结果) 所造成的误差, 我们可以把 ν 选在 $0 > \nu > -7$ 中很靠近 -1 的一方, 这样在两端进行比较时, 由(4)可知虚部影响是很小的。于是(14), (16)式可大致认为是在 $0 \geq \nu > -2$ 范围内较好地成立。同时, 因为在 $|\nu - \nu_0| \lesssim 0.2$ 和 $-2 < \nu_0 < -1$ 间 $F_1(\nu)$ 与 $F_2(\nu)$ 随

ν 变化几乎平直, 故如把 ν_0 选在 -1 与 -2 之间时 $F_1(\nu)$ 表示式大括号内积分项可近似认为是常数, 因之在上述区间内 $F_1(\nu)$ 可用二项式逼近, 同理对 $F_2(\nu)$ 也如此. 于是可以表为

$$\left. \begin{aligned} F_1(\nu) &\simeq a + b(\nu - \nu_0) + c(\nu - \nu_0)^2, \\ F_2(\nu) &\simeq a' + b'(\nu - \nu_0) + c'(\nu - \nu_0)^2; \end{aligned} \right\} \text{当 } -2 < \nu_0 < -1, |\nu - \nu_0| \lesssim 0.2. \quad (17)$$

将(17)式代入(14)与(15)式, 便可以利用固定于 ν_0 左右的五个比较点的两端相等而求解 ν_{R_1} , ν_{R_2} , η , a , b , c , a' , b' , c' 九个参数. 由于参数多, 我们不用高阶微商办法. 在具体计算中, 我们在 $\nu_0 = -1.6$ 附近选五个比较点 -1.4 , -1.5 , -1.6 , -1.7 , -1.8 , 对(14)仅用其中四点, 计算表明结果对这些比较点选择关系不大.

较繁的计算给出

$$\begin{aligned} \nu_{R_1} &\simeq 6.7, \quad \nu_{R_2} \simeq 19.4, \quad \eta \simeq 0.405, \\ a &\simeq 0.503, \quad b \simeq -0.0796, \quad c \simeq 0.0324, \\ a' &\simeq 3.686, \quad b' \simeq -0.499, \quad c' \simeq 0.305. \end{aligned}$$

a , b , c 的数值, 与(12)式中诸积分以 $\nu \rightarrow \nu_0$ 的常数代替后的值是很相近的.

对应上组解, (14), (15)式两端符合程度如下表:

ν	$\frac{\nu}{(\nu_{R_1} - \nu)F_1(\nu)}$	$A + \eta B$	$\frac{\eta \nu^2}{(\nu_{R_2} - \nu)F_2(\nu)}$	$C + \eta D$
-1.4	-0.3535	-0.3537	0.01062	0.01062
-1.5	-0.3690	-0.3690	0.01199	0.01199
-1.6	-0.3829	-0.3829	0.01341	0.01341
-1.7	-0.3955	-0.3955	0.01485	0.01485
-1.8	-0.4068	-0.4067	0.01631	0.01632

计算中没有发现其他解. 同时计算表明, 对应上组解的参数能使(14), (15)式两端在 $0 \geq \nu > -2$ 内其它点很好地符合.

利用上述方法仅能求出 Γ_2 与 Γ_1 的比值 η 来, 由(12)出发可将其改写为

$$\begin{aligned} F_1(\nu) = F_1(0) + \nu &\left\{ \frac{F_1(\nu_0) - F_1(0)}{\nu_0} + \right. \\ &+ \Gamma_1 \left[\frac{\nu - \nu_0}{\pi} P \int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu'}{\nu' + 1}} \frac{R_1(\nu') d\nu'}{(\nu' - \nu_0)(\nu' - \nu_{R_1})(\nu' - \nu)} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\nu - \nu_0}{\pi} P \int_{-\infty}^{-1} \frac{K_1(\nu') d\nu'}{(\nu' - \nu_0)(\nu' - \nu_{R_1})(\nu' - \nu)} \right] \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

因为 $\nu > -\nu_{R_1} - 1 \approx -7$ 时 $K_1(\nu) = 0$, 故在作代换 $\nu' = -x^{-1}$ 后, 与[1]相仿可对负半轴积分作内插近似, 即将(18)中最后一项积分用 $(\nu - \nu_0) \sum_i \frac{K_i}{\nu + \omega_i}$ 代替, 由于现在 $0 < x \lesssim 0.14$, 故在 $-2 \lesssim \nu < 7$ 内, 用两个内插点足够. 可以定出 $\omega_1 \simeq 8$, $\omega_2 \simeq 90$, 由(18)式利用在 ν_{R_1} , ν_0 一阶微商等所造成的三个联立方程, 可以解出

$$\Gamma_1 \simeq 0.194, \quad K_1 \simeq 0.738, \quad K_2 \simeq 2.833, \quad \Gamma_2 \simeq 0.0786.$$

以上解对 ω 变动的依赖关系不大. 例如当取 $\omega_1 = 8$, $\omega_2 = 75$ 时 $\Gamma_1 \simeq 0.196$, 而当 $\omega_1 = 6$,

$\omega_2 = 90$ 时 $\Gamma_1 \approx 0.134$, 将上解代入(18)并利用

$$\sigma_{(1)1}(\nu) = \frac{12\pi}{\nu} \frac{(\Gamma_1)^2 \frac{\nu^3}{\nu+1}}{[(\nu_{R_1} - \nu)F_1(\nu)]^2 + (\Gamma_1)^2 \frac{\nu^3}{\nu+1}}, \quad (19)$$

可绘出 $F_1(\nu)$ 及 $\sigma_{(1)1}$ 的图形, 如图 1、图 2 所示. 从截面图上可量得半宽度约为 67 MeV, 而 $F_1(\nu)$ 在 ν_{R_1} 附近时比较接近于 1. 同时, 由此解得 $F_1(\nu)$ 的过程只用到 $\nu_0 = 1.6$ 处的关系, $F_1(\nu)$ 曲线在 $0 > \nu > -2$ 时能使由(18)式或由(16)式代入(14)式后所得的值在二位数字内全同. 以上结果也说明多作一次削减的确削弱了大部分非弹性过程的贡献.

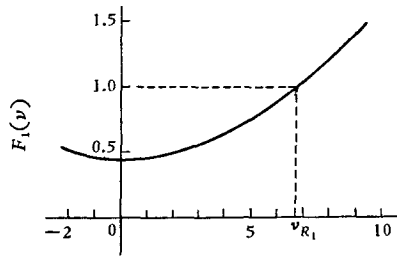


图 1

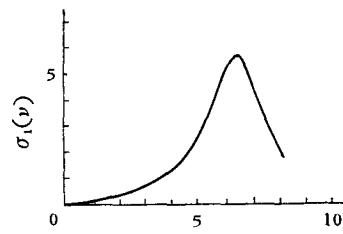


图 2

由于 $F_2(\nu)$ 的具体形状尚为未知, 所以真实的 D 波宽度尚无法确定.

从上述解看来, 考虑 D 波贡献与等效地考虑非弹性过程的贡献, 可能是使 P 波共振参数与实验比较符合的一个重要因素.

此外, 我们还利用 ND^{-1} 方法和朱洪元等提出的向前散射振幅的形式作比较, 独立地计算了 P, D 波共振解, 获得了大致同于本文的结果, 这些都已在另一篇文章中讨论^[5].

参 考 文 献

- [1] Bálazs, L., *Phys. Rev.*, **128** (1962), 1939.
- [2] Bálazs, L., *Phys. Rev.*, **134** (1964), 1315.
- [3] Mahoux, G. and Martin, A., *Nuovo Cimento*, **33** (1964), 883.
- [4] Moffat, J., *Phys. Rev.*, **121** (1961), 926.
- [5] 葛墨林、段一士, 物理学报, **21** (1965), 1903.