

# 相对论层子模型中的介子和重子波函数\*

李 炳 安

(中国科学院高能物理研究所)

## 提 要

本文从层子模型<sup>[1]</sup>的基本假定出发,对介子和重子波函数进行了探讨.文中讨论了介子、重子这样的强耦合束缚态的物理特性,指出“层子对”的产生效应对波函数的贡献是重要的.文中给出了具有任意角动量的介子波函数的一般形式.在质心系中,假定介子波函数和重子波函数具有近似的  $SU_6$  对称性质,得到了在质心系具有  $SU_6$  对称性质的介子波函数和基态重子波函数的一般形式,禁戒了实验中不出现的介子态.在质心系假定了  $O_3 \otimes SU_6$  对称性,写下了在质心系具有这种对称性的几个低激发态重子的波函数.在每一个  $O_3 \otimes SU_6$  多重态中的介子和重子波函数都含有两个洛伦兹协变的空间函数,对强耦合的束缚态,由于“层子对”的产生效应是重要的,这两个不变函数一般是不相等的.由于只在质心系假定了  $SU_6$  和  $O_3 \otimes SU_6$  对称,因而可以使波函数具有洛伦兹协变性,即运动系中这种对称性是不存在的.

## 一、引 言

按照层子模型<sup>[1]</sup>,介子波函数可以写为

$$\chi_{\alpha\beta,\lambda}(x_1, x_2) = \langle 0 | T \{ \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) \} | a_\lambda(p) \rangle, \quad (1.1)$$

重子波函数可以写为

$$B_{\alpha\beta\gamma}(x_1, x_2, x_3)_\lambda = \langle 0 | T \{ \psi_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_2) \psi_\gamma(x_3) \} | B_\lambda(p) \rangle, \quad (1.2)$$

其中  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  是层子场,  $\lambda$  是介子或重子自旋在动量方向上的投影.移出质心坐标以后,介子和重子波函数分别可以写为

$$\chi_{\alpha\beta,\lambda}(x) = \langle 0 | T \left\{ \psi_\alpha \left( \frac{x}{2} \right) \bar{\psi}_\beta \left( -\frac{x}{2} \right) \right\} | a_\lambda(p) \rangle, \quad (1.3)$$
$$x = x_1 - x_2;$$

$$B_{\alpha\beta\gamma}(x, y)_\lambda = \langle 0 | T \left\{ \psi_\alpha \left( \frac{x}{2}, -\frac{y}{3} \right) \psi_\beta \left( -\frac{x}{2}, -\frac{y}{3} \right) \psi_\gamma \left( \frac{2}{3} y \right) \right\} | B_\lambda(p) \rangle, \quad (1.4)$$
$$x = x_1 - x_2, \quad y = x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

这些波函数都满足各自的 Bethe-Salpeter 方程(以下简称 B-S 方程).但是从这个方程求解波函数是十分困难的.本文将不从方程出发去探讨介子和重子波函数,而是利用在一定条件下实验所支持的对称性质,将波函数的一般形式写出来,对于波函数中不能从对称

\* 1974年3月18日收到.

性确定的部分,可以通过实验去探讨这些未知部分的性质.

这里首先讨论介子和重子这些束缚态的特性. 从层子模型的假定<sup>[1]</sup>知道,层子的质量  $M \geq 10 \text{ GeV}$ , 而实验上发现的介子、重子的静止质量远比这个数字小,这就使得介子、重子这样的层子的束缚态和以前量子力学所处理过的束缚态——氘、原子和原子核等有很大的不同. 介子和重子的束缚能和层子质量是同量级的,即层子的静止质量几乎结合光了. 氘、原子和原子核的束缚能远比构成它们的粒子(电子、核子)的静止质量小,如原子核的每个核子的平均结合能是  $8 \text{ MeV}$ , 远比核子的静止质量小. 下面我们称介子、重子为层子的强耦合的束缚态,称氘、原子和原子核为弱耦合的束缚态. 下面以一对正反费米子的束缚态的波函数为例,讨论强耦合束缚态和弱耦合束缚态的区别.

一对正反费米子构成的束缚态的波函数就是 (1.1) 和 (1.2) 式所示的形式. 这个波函数的谱表示可以写为

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta, \lambda}(x) = & \frac{\theta(x)}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E}} \int d^4 p_n dM_n^2 \delta(p_n^2 + M_n^2) \theta(p_{n0}) e^{i(p_n - \frac{p}{2})x} f_{\alpha\beta, \lambda}^+(p_n, p) \\ & - \frac{\theta(-x)}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E}} \int d^4 p_n dM_n^2 \delta(p_n^2 + M_n^2) \theta(p_{n0}) e^{-i(p_n - \frac{p}{2})x} f_{\alpha\beta, \lambda}^-(p_n, p). \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta, \lambda}^+(p_n, p) = & 2E_n \left\{ \sum_r \langle 0 | \psi_\alpha(0) | s_r(p_n) \rangle \langle s_r(p_n) | \bar{\psi}_\beta(0) | a_\lambda(p) \rangle \delta(M_n^2 - M^2) \right. \\ & \left. + \sum_n' \langle 0 | \psi_\alpha(0) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_\beta(0) | a_\lambda(p) \rangle \right\} \sqrt{\frac{E}{m}}, \\ f_{\alpha\beta, \lambda}^-(p_n, p) = & 2E_n \left\{ \sum_r \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(0) | \bar{s}_r(p_n) \rangle \langle \bar{s}_r(p_n) | \psi_\alpha(0) | a_\lambda(p) \rangle \delta(M_n^2 - M^2) \right. \\ & \left. + \sum_n' \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(0) | n \rangle \langle n | \psi_\alpha(0) | a_\lambda(p) \rangle \right\} \sqrt{\frac{E}{m}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

这里,  $m, E$  分别是介子的静止质量和能量;  $|s_r(p_n)\rangle, |\bar{s}_r(p_n)\rangle$  分别是动量为  $\mathbf{p}_n$ , 自旋投影为  $r$  的一个费米子和一个反费米子的态;  $\sum_n'$  是对  $|n\rangle$  中单粒子态外的状态的  $p_n, M_n$  以外的量子数求和;  $E_n$  是  $|n\rangle$  态的总能量. 在洛伦兹变换、电荷共轭变换和时空弱反演下,谱函数 (1.6) 式的变换性质如下:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta, \lambda}^\pm(p'_n, p') = & \Lambda_{\alpha\alpha'} f_{\alpha'\beta', \lambda}^\pm(p_n, p) \Lambda_{\beta'\beta}, \\ f_{\alpha\beta, \lambda}^+(p_n, p) = & -\eta_c C_{\alpha\alpha'} C_{\beta'\beta} f_{\beta'\alpha', \lambda}^-(p_n, p), \\ f_{\alpha\beta, \lambda}^\pm(p_n, p) = & (-1)^\lambda Z_{\beta\beta'} Z_{\alpha'\alpha} f_{\alpha'\beta', -\lambda}^\pm(p_n, p). \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中

$$\begin{aligned} C = i\gamma_2\gamma_4, \quad Z = i\gamma_1\gamma_3\gamma_4, \\ \Lambda = \frac{m - i\gamma_4\hat{p}}{\sqrt{2m(m+E)}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

$\eta_c$  是束缚态的电荷共轭宇称, (1.7) 式中的电荷共轭变换是对中性介子而言.

在动量表象中波函数 (1.3) 式变为

$$\chi_{\alpha\beta, \lambda}(q) = \int d^4x e^{iqx} \chi_{\alpha\beta, \lambda}(x) = -i \int dM_n^2 \left\{ \frac{f_{\alpha\beta, \lambda}^+(p_n, p) \mathbf{p}_n = \frac{\mathbf{P}}{2} - \mathbf{q}}{2E_n \left( q_0 + E_n - \frac{E}{2} - i\varepsilon \right)} + \frac{f_{\alpha\beta, \lambda}^-(p_n, p) \mathbf{p}_n = \frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{q}}{2E_n \left( q_0 - E_n + \frac{E}{2} + i\varepsilon \right)} \right\} \sqrt{\frac{m}{E}}. \quad (1.9)$$

为了方便, 下面都在质心系中讨论. 从 (1.9) 式可以看出, 波函数的最低中间态——一个费米子(或反费米子)中间态所贡献的波函数在  $q_0$  复平面上的割线的起点是

$$q_0 = \pm \left( M - \frac{m}{2} \right), \quad (1.10)$$

$M$  是费米子的静止质量.  $\left( M - \frac{m}{2} \right)$  就是束缚态的束缚能, 对于弱耦合的束缚态, 它比  $M$  小得多, 对于强耦合的束缚态, 它与  $M$  是同量级的. 下面讨论一个费米子(或反费米子)和一个一对正反费米子束缚态的中间态所造成的割线. 简单的计算得到这种中间态所造成的割线的起点是

$$q_0 = \pm \left( M + \frac{m}{2} \right). \quad (1.11)$$

这里, 我们取这一对费米子束缚态的静止质量为  $m$ . 对于弱耦合的束缚态, 这两条割线的起点和最低中间态割线的起点相距几乎  $2M$ , 对强耦合的束缚态, 这种中间态的割线和最低中间态的割线几乎是重合的. 对可以用量子力学描述的弱耦合束缚态, 在它的波函数中仅仅考虑最低中间态就可以了, 而对强耦合的束缚态的波函数, 这种高中间态的贡献则是不能忽略的.

从物理上看, 对弱耦合的束缚态, 由于束缚能远小于构成束缚态粒子的静止质量, 粒子的四动量接近质量壳, 正负能级离得远, 因而在相互作用能量较低的过程中, 正反费米子“对”就不易产生, 即这种“对”产生的效应是可以忽略的. 对强耦合的束缚态, 组成束缚态粒子的静止质量几乎结合光了, 粒子的四动量离质量壳很远, 正负能级相距很近, “对”激发就非常容易发生. 也就是说, “对”激发的贡献对强耦合态是重要的. 文献[2]认为这种“对”激发对轻子的深度非弹性散射的贡献是很重要的, 我们这里所强调的是这种“对”激发效应对低能领域中的现象的贡献也是重要的. 本文将从这种看法对介子和重子波函数进行讨论.

## 二、介子波函数的一般形式

本节讨论介子波函数的一般形式. 介子波函数的  $SU_3$  部分是清楚的, 因而我们只讨论波函数的旋量和时空部分. 介子波函数 (1.3) 式必须满足下面几个条件:

1.  $\sqrt{\frac{E}{m}} \chi_1(x)$  是洛仑兹变换下不变的标量函数;

2. 在质心系中有确定的自旋  $J$ ;
3. 有确定的空间宇称  $\pi$ ;
4. 波函数的旋量空间部分有确定的电荷共轭宇称  $C$ .

为了方便起见,下面都在质心系中讨论,做完之后再变到运动系中去.

在质心系中,介子波函数的旋量部分可以取下面几种形式:

标 量:  $1, \gamma_4$ ;

赝标量:  $\gamma_5, \gamma_4\gamma_5$ ;

$$j = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

矢 量:  $\gamma_i, \gamma_4\gamma_i$ ;

赝矢量:  $\gamma_i\gamma_5, \gamma_4\gamma_i\gamma_5$ ;

(2.1) 式中的量的名称是按照  $O_3$  群定义的.

在质心坐标系中,具有确定轨道角动量  $l$  的波函数的空间部分可以写成如下的形式:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x})\{x_{j_1}\cdots x_{j_l}\}, \\ j_1, \cdots, j_l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中  $\phi(\mathbf{x})$  是洛伦兹变换下的标量函数,  $\{x_{j_1}\cdots x_{j_l}\}$  对指标  $j_1\cdots j_l$  全对称,且迹为零,它构成  $O_3$  群角动量为  $l$  的不可约表示的基. 记

$$\begin{aligned} T_{i_1\cdots i_l} &= \{x_{i_1}\cdots x_{i_l}\}, \\ T'_{i_1\cdots i_l} &= x_{i_1}\cdots x_{i_l}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

$T_{i_1\cdots i_l}$  的一般形式可以写为<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} T_{i_1\cdots i_l} &= T'_{i_1\cdots i_l} + A_1 \sum_p \delta_{i_1 i_p} T'_{i_2\cdots i_l} + A_2 \sum_p \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_p} T'_{i_4\cdots i_l} + \cdots \\ &+ A_{[\frac{l}{2}]} \sum_p \delta_{i_1 i_2} \cdots \delta_{i_{l-1} i_p} T'. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\sum_p$  表示对  $j_1 j_2 \cdots j_l$  的各种排列求和, 符号  $[\frac{l}{2}]$  表示取  $\frac{l}{2}$  的整数部分, 当  $l$  为偶数时,

$$T = T'_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_{\frac{l}{2}} i_{\frac{l}{2}}}. \quad (2.5)$$

当  $l$  为奇数时,

$$T = T'_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_{\frac{l-1}{2}} i_{\frac{l-1}{2}}}, \quad (2.6)$$

$$A_n = -\frac{A_{n-1}}{2l - 2n + 1}, \quad A_0 = 1. \quad (2.7)$$

可以将 (2.2) 式中的脚标  $j_1 \cdots j_l$  以球坐标的形式写出来,

$$x_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ix_2), \quad x_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - ix_2), \quad x_0 = x_3. \quad (2.8)$$

(2.2) 式的球坐标形式如下:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x})\{x_{\lambda_1}\cdots x_{\lambda_l}\} \\ \lambda_1 \cdots \lambda_l = +, -, 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

1) (2.4) 式是洗鼎昌同志告诉作者的.

(2.9) 式表示轨道角动量为  $l$ , 第三分量为

$$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l \quad (2.10)$$

的轨道波函数.  $\{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l}\}$  是  $T_{j_1, \dots, j_l}$  的线性组合.

将轨道波函数 (2.9) 式和旋量 (2.1) 式耦合起来, 满足上述四个条件的介子波函数有如下的四种形式:

$$\begin{aligned} J = l, \pi = (-1)^{l+1}, C = (-1)^l, \\ \chi_{l\lambda}(x) = [\phi_1(x) + \gamma_4 \phi_2(x)] \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l}\} \gamma_5 \\ + [\phi_3(x) p \cdot x + \gamma_4 \phi_4(x)] \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l} x_k\} \gamma_k \gamma_5 \\ + [\phi_5(x) p \cdot x + \gamma_4 \phi_6(x)] \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_{l-1}} \gamma_{\lambda_l}\} \gamma_5 \\ + [\phi_7(x) + \gamma_4 \phi_8(x)] p \cdot x \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_{l-1}} x_k \sigma_{k\lambda_l}\} \gamma_5; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} J = l, \pi = (-1)^{l+1}, C = (-1)^{l+1}, \\ \chi_{l\lambda}(x) = [\phi_1(x) + \gamma_4 \phi_2(x)] p \cdot x \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l}\} \gamma_5 \\ + [\phi_3(x) + \gamma_4 \phi_4(x)] p \cdot x \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l} x_k\} \gamma_k \gamma_5 \\ + [\phi_5(x) + \gamma_4 \phi_6(x)] p \cdot x \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_{l-1}} \gamma_{\lambda_l}\} \gamma_5 \\ + [\phi_7(x) + \gamma_4 \phi_8(x)] \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_{l-1}} x_k \sigma_{k\lambda_l}\} \gamma_5; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} J = l, \pi = (-1)^l, C = (-1)^{l+1}, \\ \chi_{l\lambda}(x) = [f_1(x) p \cdot x + \gamma_4 f_2(x)] \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l}\} \\ + [f_3(x) + \gamma_4 f_4(x)] p \cdot x \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l} x_k\} \gamma_k \\ + [f_5(x) + \gamma_4 f_6(x)] p \cdot x \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_{l-1}} \gamma_{\lambda_l}\} \\ + [f_7(x) + \gamma_4 f_8(x)] p \cdot x \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_{l-1}} x_k \sigma_{k\lambda_l}\}; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} J = l, \pi = (-1)^l, C = (-1)^l, \\ \chi_{l\lambda}(x) = [g_1(x) + \gamma_4 g_2(x)] p \cdot x \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l}\} \\ + [g_3(x) + \gamma_4 g_4(x)] \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l} x_k\} \gamma_k \\ + [g_5(x) + \gamma_4 g_6(x)] \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_{l-1}} \gamma_{\lambda_l}\} \\ + [g_7(x) p \cdot x + \gamma_4 g_8(x)] \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_{l-1}} x_k \sigma_{k\lambda_l}\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中  $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$ ,  $\phi_1(x) \cdots \phi_8(x)$ ;  $\psi_1(x) \cdots \psi_8(x)$ ;  $f_1(x) \cdots f_8(x)$ ;  $g_1(x) \cdots g_8(x)$  是  $x$  和  $p$  (介子的四维动量) 的洛仑兹标量函数, 且是  $x$  的偶函数, 它的宗量可以有如下的三种形式:

$$x^2, (p \cdot x)^2, \epsilon(\epsilon) \theta(-x^2) p \cdot x. \quad (2.15)$$

四个波函数的脚标  $\lambda_1 \cdots \lambda_l$  取  $+, -, 0$ ;  $k$  取  $1, 2, 3$ , 相同指标求和.  $\{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_{l-1}} x_k \sigma_{k\lambda_l}\}$  表示对  $x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l} x_k$  的脚标和  $\sigma_{k\lambda_l}$  的脚标  $\lambda_l$  全对称且去迹.

从 (2.11) — (2.14) 式看到, 介子波函数的一般表示式中含 8 个标量函数. 一对正反层子的总自旋  $S$  有 0 和 1 两种, 耦合成总角动量  $l$  的方式有四种:

$$\begin{aligned} J = l, S = 0, \text{ 轨道角动量为 } l, \\ S = 1, \text{ 轨道角动量为 } l + 1, l, l - 1; \end{aligned}$$

而表示相同自旋宇称的  $\gamma$  矩阵有两种, 因而波函数的一般形式有 8 项. 如波函数 (2.11) 式, 第一项  $S = 0$ , 轨道角动量为  $l$ ; 第二项  $S = 1$ , 轨道角动量为  $l + 1$ ; 第三项  $S = 1$ , 轨道角动量为  $l - 1$ ; 第四项  $S = 1$ , 轨道角动量为  $l$ .

现在讨论波函数在运动坐标系的形式。从波函数的协变性得到运动系的介子波函数  $\chi_\lambda(x)_p$  和质心系波函数  $\chi_\lambda(x)$  的关系如下:

$$\chi_\lambda(x') = \Lambda \chi_\lambda(x) \Lambda^{-1} \sqrt{\frac{m}{E}}. \quad (2.16)$$

在洛伦兹变换下,  $\chi_\lambda, \gamma_\lambda, \gamma_4$  作如下的变换:

$$\begin{aligned} \chi_\lambda &\rightarrow \chi' \cdot e^\lambda(p), \quad \gamma_\lambda \rightarrow \gamma \cdot e^\lambda(p), \\ \gamma_4 &\rightarrow -\frac{i}{m} \hat{p}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

$e_\mu^\lambda(p)$  是球极化矢量,有如下的关系式:

$$e_\mu^\lambda(p) e_\nu^\lambda(p) = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} p_\mu p_\nu. \quad (2.18)$$

定义

$$K_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\lambda_1 \dots \lambda_l}(p) = \{e_{\mu_1}^{\lambda_1}(p) \cdots e_{\mu_l}^{\lambda_l}(p)\}, \quad (2.19)$$

利用关系式

$$\begin{aligned} e_\mu^{\prime\lambda}(p) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \{f_\mu^\lambda(p) + i f_\mu^{\prime\lambda}(p)\}, \\ e_\mu^{-\lambda}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{f_\mu^\lambda(p) - i f_\mu^{\prime\lambda}(p)\}, \\ e_\mu^0(p) &= f_\mu^0(p). \end{aligned} \quad (2.20)$$

( $f_\mu^\lambda(p)$  是线极化矢量), 可以将  $K_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\lambda_1 \dots \lambda_l}(p)$  表示成

$$\{f_{\mu_1}^{\lambda_1}(p) \cdots f_{\mu_l}^{\lambda_l}(p)\} \quad (2.21)$$

的线性组合, 而 (2.21) 式表示对  $j_1 \cdots j_l$  全对称且去迹, 就是 (2.4) 式所表示的形式。利用 (2.19) 式和 (2.17) 式, 可以将上述四个波函数在运动坐标系的形式写在下面:

$$J = l, \quad \pi = (-1)^{l+1}, \quad C = (-1)^l,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{E}{m}} \chi_{l\lambda}(x) &= K_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\lambda_1 \dots \lambda_l}(p) \left\{ \left[ \phi_1(x) - \frac{i}{m} \hat{p} \phi_2(x) \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_l} \gamma_5 \right. \\ &\quad + \left[ \phi_3(x) p \cdot x - \frac{i}{m} \hat{p} \phi_4(x) \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_l} \left( \hat{x} + \frac{1}{m^2} p \cdot x \hat{p} \right) \gamma_5 \\ &\quad + \left[ \phi_5(x) p \cdot x - \frac{i}{m} \hat{p} \phi_6(x) \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_{l-1}} \gamma_{\mu_l} \gamma_5 \\ &\quad \left. + \left[ \phi_7(x) - \frac{i}{m} \hat{p} \phi_8(x) \right] p \cdot x x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_{l-1}} \left( x_\mu + \frac{1}{m^2} p \cdot x p_\mu \right) \cdot \sigma_{\mu\mu_l} \gamma_5 \right\}; \quad (2.22) \end{aligned}$$

$$J = l, \quad \pi = (-1)^{l+1}, \quad C = (-1)^{l+1},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{E}{m}} \chi_{l\lambda}(x) &= K_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\lambda_1 \dots \lambda_l}(p) \left\{ \left[ \phi_1(x) - \frac{i}{m} \hat{p} \phi_2(x) \right] p \cdot x x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_l} \gamma_5 \right. \\ &\quad + \left[ \phi_3(x) - \frac{i}{m} \hat{p} \phi_4(x) p \cdot x \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_l} \left( \hat{x} + \frac{1}{m^2} x \cdot p \hat{p} \right) \gamma_5 \\ &\quad \left. + \left[ \phi_5(x) - \frac{i}{m} \hat{p} \phi_6(x) p \cdot x \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_{l-1}} \gamma_{\mu_l} \gamma_5 \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left[ \phi_7(x) - \frac{i}{m} \hat{p} \phi_8(x) \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_{l-1}} \left( x_{\mu} + \frac{1}{m^2} p \cdot x p_{\mu} \right) \sigma_{\mu\mu_l} \gamma_5 \}; \quad (2.23)$$

$$J = l, \pi = (-1)^l, C = (-1)^{l+1},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{E}{m}} \chi_{l\lambda}(x) = & K_{\mu_1 \cdots \mu_l}^{l\lambda}(p) \left\{ \left[ f_1(x) p \cdot x - \frac{i}{m} \hat{p} f_2(x) \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_l} \right. \\ & + \left[ f_3(x) - \frac{i}{m} \hat{p} f_4(x) \right] p \cdot x x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_l} \left( \hat{x} + \frac{1}{m^2} p \cdot x \hat{p} \right) \\ & + \left[ f_5(x) - \frac{i}{m} \hat{p} f_6(x) \right] p \cdot x x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_{l-1}} \gamma_{\mu_l} \\ & \left. + \left[ f_7(x) - \frac{i}{m} \hat{p} f_8(x) p \cdot x \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_{l-1}} \left( x_{\mu} + \frac{1}{m^2} p \cdot x p_{\mu} \right) \sigma_{\mu\mu_l} \right\}; \quad (2.24) \end{aligned}$$

$$J = l, \pi = (-1)^l, C = (-1)^l,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{E}{m}} \chi_{l\lambda}(x) = & K_{\mu_1 \cdots \mu_l}^{l\lambda}(p) \left\{ \left[ g_1(x) - \frac{i}{m} \hat{p} g_2(x) p \cdot x \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_l} \right. \\ & + \left[ g_3(x) - \frac{i}{m} \hat{p} g_4(x) \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_l} \left( \hat{x} + \frac{1}{m^2} p \cdot x \hat{p} \right) \\ & + \left[ g_5(x) - \frac{i}{m} \hat{p} g_6(x) \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_{l-1}} \gamma_{\mu_l} \\ & \left. + \left[ g_7(x) p \cdot x - \frac{i}{m} \hat{p} g_8(x) \right] x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_{l-1}} \left( x_{\mu} + \frac{1}{m^2} p \cdot x p_{\mu} \right) \sigma_{\mu\mu_l} \right\}. \quad (2.25) \end{aligned}$$

在这四种波函数中, (2.24)式所表示的介子态在实验上是禁戒的. 另外, (2.23)式中的  $J^{\pi} = 0^{-}$  介子态也是实验上所禁戒的. 仅仅从上述的一般性讨论还不能从理论上禁戒这些介子态, 在下一节中将讨论如何从理论上禁戒它们.

### 三、具有 $SU_6$ 对称性质的介子波函数

我们知道, 用  $SU_6$  对称研究  $0^{-+}$ ,  $1^{-}$  介子和  $\frac{1}{2}^{+}$ ,  $\frac{3}{2}^{+}$  重子的分类和静态性质, 取得了和实验相符合的结果. 考虑到这一事实, 并保证理论的洛伦兹协变性, 假定介子波函数在质心系中具有近似的  $SU_6$  对称性. 现在, 从场论观点对这一假定进行讨论. 层子的自由拉氏函数为

$$\mathcal{L}_0 = - \left\{ \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \psi(x) + M \bar{\psi}(x) \psi(x) \right\}. \quad (3.1)$$

在  $\mathcal{L}_0$  中, 只有动能项

$$\bar{\psi}(x) \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(x) \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

是破坏  $SU_6$  对称的. 介子的半径如果取为  $10^{-13}$  cm, 那么层子的平均动量  $|\mathbf{p}| \sim 200$  MeV, 而层子的静止质量  $M \geqslant$  几十 GeV, 因而  $\mathcal{L}_0$  中的动能项与质量项相比是  $\frac{|\mathbf{p}|}{M}$  级的小量,  $SU_6$  对称是近似成立的. 以上的讨论只有质心系才成立. 这是层子模型要求层子静止质量很大的理论上的原因. 为使整个拉氏函数具有近似的  $SU_6$  不变性, 还要求超强相互作用

在层子速度很低时, 具有近似  $SU_6$  不变性. 因而, 在波函数中(质心系)忽略  $\frac{v}{c}$  级的小量以后, 波函数就具有  $SU_6$  对称性. 下面讨论具有  $SU_6$  对称的介子波函数的一般形式.

$SU_6$  群的元素可以写为

$$u^{ie_j^a \lambda_a \sigma_j} \quad \alpha = 1, \dots, 8, 0; j = 1, 2, 3, 0. \quad (3.3)$$

其中  $\lambda_a$  包括  $SU_3$  群的 8 个无穷小算符和单位算符

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  是自旋算符, 是四行四列的矩阵,

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

由于  $SU_6$  群的无穷小算符中不包含单位算符, 因而

$$e_0^0 = 0. \quad (3.6)$$

在  $SU_6$  的无穷小转动下, 介子波函数做如下的变换:

$$\chi'(x) \cong \chi(x) + ie_j^a [\lambda_a \sigma_j, \chi(x)]. \quad (3.7)$$

介子波函数(2.11)–(2.14)式和它的  $SU_3$  波函数一起, 它的每一项都可以写成下面的形式:

$$\mathcal{A} \cdot \Sigma \cdot \psi. \quad (3.8)$$

$\mathcal{A}$  是  $SU_3$  波函数,  $\Sigma$  是波函数的旋量部分,  $\psi$  是波函数的时空部分. 现在讨论这一项波函数(3.8)式在  $SU_6$  无穷小转动下的变换性质,

$$[\lambda_a \sigma_j, \mathcal{A} \Sigma] = \frac{1}{2} \{ \lambda_a, \mathcal{A} \} [\sigma_j, \Sigma] + \frac{1}{2} [\lambda_a, \mathcal{A}] \{ \sigma_j, \Sigma \}. \quad (3.9)$$

显然,  $[\sigma_j, \Sigma]$  是自旋的转动, 不改变  $\Sigma$  的自旋性质;  $[\lambda_a, \mathcal{A}]$  是  $SU_3$  的转动, 只包含  $SU_3$  的 8 个无穷小算符;  $\{ \lambda_a, \mathcal{A} \}$  中除 8 个  $SU_3$  的无穷小算符外, 还包含单位算符;  $\{ \sigma_j, \Sigma \}$  可以改变  $\Sigma$  的自旋性质, 即把自旋三单态变成单态, 把单态变成三重态. (3.8) 式中的  $\Sigma$  可以取(2.1)式中的四种形式, 利用自旋算符  $\sigma_j$  和  $\Sigma$  的对易和反对易关系, 可以将(2.1)式中的旋量分成下面四组:

$$\begin{aligned} 1, & \quad \gamma_j \gamma_4 \gamma_5; \\ \gamma_4, & \quad -\gamma_j \gamma_5; \quad j = 1, 2, 3, \\ \gamma_5, & \quad \gamma_j \gamma_4; \\ \gamma_4 \gamma_5, & \quad -\gamma_j; \end{aligned} \quad (3.10)$$

自旋算符  $\sigma_j$  只能在同一组的两种旋量之间进行交换, 它不改变轨道波函数的性质, 考虑到波函数的电荷共轭宇称, 由(3.10)式的四组旋量, 可以得到四组具有确定角动量、空间宇称、电荷共轭宇称和  $SU_6$  对称性质的波函数(在质心系):

$$\begin{aligned} 1) J = l, \pi = (-1)^l, C = (-1)^l, \\ \chi_{l\lambda}(x) = \{ a_1(x) + \gamma_4 a_2(x) p \cdot x \} \{ x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l} \}, \\ J = l + 1, l, l - 1, \pi = (-1)^l, C = (-1)^{l+1}, \\ \chi_{l\lambda}(x) = \sum_{\lambda'} C_{l\lambda, l\lambda'}^{l\lambda} \{ x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l} \} \{ a_2(x) p \cdot x + a_1(x) \gamma_4 \} \gamma_{\lambda'} \gamma_5, \end{aligned} \quad (3.11)$$



$a_1(x)$ ,  $a_2(x)$  是  $x$  的偶函数.

$$2) J = l, \pi = (-1)^l, C = (-1)^{l+1},$$

$$\chi_{il}(x) = \{a_3(x)p \cdot x + \gamma_4 a_4(x)\} \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l}\}.$$

$$J = l + 1, l, l - 1, \pi = (-1)^l, C = (-1)^l,$$

$$\chi_{Jl}(x) = \sum_{\lambda'} C_{i\lambda', l\lambda_1+\cdots+\lambda_l}^{Jl} \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l}\} \{a_4(x) + a_3(x)p \cdot x \gamma_4\} \gamma_{\lambda'} \gamma_5, \quad (3.12)$$

$a_3(x)$ ,  $a_4(x)$  是  $x$  的偶函数.

$$3) J = l, \pi = (-1)^{l+1}, C = (-1)^l,$$

$$\chi_{il}(x) = \{a_5(x) + a_6(x)\gamma_4\} \gamma_5 \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l}\}.$$

$$J = l + 1, l, l - 1, \pi = (-1)^{l+1}, C = (-1)^{l+1},$$

$$\chi_{Jl}(x) = \sum_{\lambda'} C_{i\lambda', l\lambda_1+\cdots+\lambda_l}^{Jl} \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l}\} \{a_6(x) + \gamma_4 a_5(x)\} \gamma_{\lambda'}, \quad (3.13)$$

$a_5(x)$ ,  $a_6(x)$  是  $x$  的偶函数.

$$4) J = l, \pi = (-1)^{l+1}, C = (-1)^{l+1},$$

$$\chi_{il}(x) = \{a_7(x) + \gamma_4 a_8(x)\} p \cdot x \gamma_5 \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l}\}.$$

$$J = l + 1, l, l - 1, \pi = (-1)^{l+1}, C = (-1)^l,$$

$$\chi_{Jl}(x) = \sum_{\lambda'} C_{i\lambda', l\lambda_1+\cdots+\lambda_l}^{Jl} \{x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_l}\} \{a_8(x) + \gamma_4 a_7(x)\} p \cdot x \gamma_{\lambda'}, \quad (3.14)$$

$a_7(x)$ ,  $a_8(x)$  是  $x$  的偶函数.

在上面四个  $SU_6$  的多重态波函数中, 可以看到, 在 (3.11) 式中禁戒了 (2.12) 式型的波函数; 在 (3.12) 式中禁戒了 (2.11) 式型的波函数; 在 (3.13) 式中禁戒了 (2.13) 式型的波函数; 在 (3.14) 式中禁戒了 (2.14) 式型的波函数. (在上面四组波函数中, 仍然略去了  $SU_3$  波函数.)

正如前面讨论的, 同一  $SU_6$  多重态的介子波函数可以用自旋算符的作用相互联系起来. 利用自旋算符对波函数 (2.11) — (2.14) 式作用, 就可以知道, 具有  $SU_6$  对称性质的波函数, 只能取 (3.11) — (3.14) 式中的一种, 不能取 (3.11) — (3.14) 式中相同量子数波函数的迭加.

现在, 我们判断 (3.11) — (3.14) 式这四个  $SU_6$  多重态, 哪一个是物理上需要的. 在以上的讨论中, 没有涉及束缚态是强耦合还是弱耦合. 所用到的对称性, 对两种情况都成立, 因而波函数在弱耦合极限下, 应回到波函数的非相对论极限. 在非相对论情况, 一对正反费米子的束缚态波函数可以写为

$$f(x) \sum_{r_1, r_2} c_{\frac{1}{2}r_1, \frac{1}{2}r_2}^{i\lambda} u_{r_1} \bar{v}_{r_2}. \quad (3.15)$$

对  $S = 0$ , 旋量是

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + \gamma_4) \gamma_5, \quad (3.16)$$

对  $S = 1$ , 旋量是

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + \gamma_4) \gamma_{\lambda}, \quad (3.17)$$

$f(x)$  是相对时间  $t$  的偶函数。可以看到, 只有(3.13)式具有这种极限, 其它三种都不具有这种极限。因而, 只有 (3.13) 式所示波函数是物理的, 其它三种都是非物理的。实际上, 在这四个  $SU_6$  多重态中, 除 (3.13) 式外, 其它三种都禁戒了实验上所观察到的介子, 而包含了实验上禁戒了的介子。只有 (3.13) 式包含了实验所观测到的介子, 禁戒了实验所禁戒的介子。这说明上面用的判别方法是正确的。

利用波函数的洛伦兹协变性质, 可以得到物理多重态 (3.13) 式在运动坐标系中的形式:

$$\begin{aligned}
 J = l, \pi = (-1)^{l+1}, C = (-1)^l, \\
 \chi_{l\lambda}(x) = \sqrt{\frac{m}{E}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \chi_{\mu_1} \cdots \chi_{\mu_l} K_{\mu_1, \dots, \mu_l}^{l\lambda}(p) \left\{ a(x) - \frac{i}{m} \not{p} b(x) \right\} \gamma_5; \\
 J = l + 1, l, l - 1, \pi = (-1)^{l+1}, C = (-1)^{l+1}, \\
 \chi_{J\lambda}(x) = \sqrt{\frac{m}{E}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \chi_{\mu_1} \cdots \chi_{\mu_l} \sum_{\lambda'} C_{l\lambda' l \lambda}^{J\lambda} K_{\mu_1, \dots, \mu_l}^{l\lambda'}(p) \\
 \cdot \left\{ b(x) - \frac{i}{m} \not{p} a(x) \right\} \not{e}^{\lambda'}(p). \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

在 (3.18) 式中, 用不变函数  $a(x)$ ,  $b(x)$  代替了 (3.13) 式中的  $a_s(x)$ ,  $a_v(x)$ 。同一介子态的另一种波函数:

$$\bar{\chi}_\lambda(x) = \langle a_\lambda | T \left\{ \phi\left(\frac{x}{2}\right) \bar{\psi}\left(-\frac{x}{2}\right) \right\} | 0 \rangle \quad (3.19)$$

可以用文献 [3] 中给出的关系式

$$\bar{\chi}_\lambda(x) = (-1)^\lambda \gamma_5 C \bar{\chi}_{-\lambda}(x) \gamma_5 C \quad (3.20)$$

得到  $\bar{\chi}_\lambda(x)$  的表达式如下:

$$\begin{aligned}
 J = l, \pi = (-1)^{l+1}, C = (-1)^l, \\
 \bar{\chi}_{l\lambda}(x) = \sqrt{\frac{m}{E}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \chi_{\mu_1} \cdots \chi_{\mu_l} K_{\mu_1, \dots, \mu_l}^{l\lambda*}(p) \left\{ a(x) + \frac{i}{m} \not{p} b(x) \right\} \gamma_5; \\
 J = l + 1, l, l - 1, \pi = (-1)^{l+1}, C = (-1)^{l+1}, \\
 \bar{\chi}_{J\lambda}(x) = \sqrt{\frac{m}{E}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \chi_{\mu_1} \cdots \chi_{\mu_l} \sum_{\lambda'} C_{l\lambda' l \lambda}^{J\lambda} K_{\mu_1, \dots, \mu_l}^{l\lambda'*}(p) \\
 \cdot \left\{ b(x) + \frac{i}{m} \not{p} a(x) \right\} \not{e}^{\lambda'*}(p), \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 e_\mu^{1*}(p) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \{ f_\mu^1(p) - i f_\mu^2(p) \}, \\
 e_\mu^{-1*}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ f_\mu^1(p) + i f_\mu^2(p) \}, \\
 e_\mu^{0*}(p) &= f_\mu^3(p), \\
 K_{\mu_1, \dots, \mu_l}^{l\lambda*}(p) &= \{ e_{\mu_1}^{\lambda_1*}(p) \cdots e_{\mu_l}^{\lambda_l*}(p) \}. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

现在讨论  $a(x)$  和  $b(x)$  之间的关系, 仍然在质心系中讨论。将波函数 (3.18) 式写成

谱表示的形式 (1.5), 谱函数  $f_{\alpha\beta, \lambda}^{\pm}(p_n, p)$  的旋量展开如下:

$$f_{\alpha\beta, \lambda}^{\pm}(p_n, p) = f_{1, \lambda}^{\pm}(p_n, p)\gamma_{5, \alpha\beta} + f_{2, \lambda}^{\pm}(p_n, p)(\gamma_4\gamma_5)_{\alpha\beta}. \quad (3.23)$$

利用谱函数的电荷共轭变换 (1.7) 式, 可以得到:

$$\begin{aligned} f_{1, \lambda}^+(p_n, p) &= -\eta_c f_{1, \lambda}^-(p_n, p), \\ f_{2, \lambda}^+(p_n, p) &= -\eta_c f_{2, \lambda}^-(p_n, p). \end{aligned} \quad (3.24)$$

因而只要讨论  $f_{1, \lambda}^{\pm}(p_n, p)$  与  $f_{2, \lambda}^{\pm}(p_n, p)$  的关系就可以了. 利用 (1.6) 式得到:

$$\begin{aligned} 4f_{1, \lambda}^+(p_n, p) &= 2E_n \sum_r \langle 0 | \{ \gamma_5 \phi(0) \}_\alpha | S_r(p_n) \rangle \langle S_r(p_n) | \bar{\phi}_\alpha(0) | a_\lambda \rangle \delta(M_n^2 - M^2) \\ &\quad + 2E_n \sum_n' \langle 0 | \{ \gamma_5 \phi(0) \}_\alpha | n \rangle \langle n | \bar{\phi}_\alpha(0) | a_\lambda \rangle, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} 4f_{2, \lambda}^+(p_n, p) &= 2E_n \sum_r \langle 0 | \{ \gamma_5 \gamma_4 \phi(0) \}_\alpha | S_r(p_n) \rangle \langle S_r(p_n) | \bar{\phi}_\alpha(0) | a_\lambda \rangle \delta(M_n^2 - M^2) \\ &\quad + 2E_n \sum_n' \langle 0 | \{ \gamma_5 \gamma_4 \phi(0) \}_\alpha | n \rangle \langle n | \bar{\phi}_\alpha(0) | a_\lambda \rangle. \end{aligned} \quad (3.26)$$

而

$$\langle 0 | \gamma_5 \gamma_4 \phi(0) | n(\mathbf{p}_n) \rangle = \eta_{p_0} \langle 0 | \gamma_5 \phi(0) | n'(-\mathbf{p}_n) \rangle, \quad (3.27)$$

$\eta_p$  是  $|n(\mathbf{p}_n)\rangle$  态在空间反射下的相因子,  $|n'(-\mathbf{p}_n)\rangle$  是  $|n(-\mathbf{p}_n)\rangle$  的自旋在动量方向投影反号, 这种状态都含在  $\sum_{r'}$  和  $\sum_n'$  中. 如果在谱函数中, 只取单粒子态, 忽略高中间态的贡献, 而且忽略  $\frac{v}{c}$  量级的项, 得到

$$f_{1, \lambda}^+(p_n, p) = f_{2, \lambda}^+(p_n, p), \quad (3.28)$$

在  $a(x)$  和  $b(x)$  之间有关系:

$$a(x) = b(x). \quad (3.29)$$

可是, 正如引言中所讨论的, 介子是一对正反层子的强耦合的束缚态, 高中间态对波函数的贡献是重要的. 在这种情况下, 即使忽略  $\frac{v}{c}$  级的小分量,

$$\langle 0 | \gamma_5 \gamma_4 \phi(0) | n(\mathbf{p}_n) \rangle \approx \langle 0 | \gamma_5 \phi(0) | n'(\mathbf{p}_n) \rangle, \quad (3.30)$$

如  $|n\rangle$  态取一个层子加一个赝标介子, 此时

$$\eta_p = -1 \quad (3.31)$$

(3.30) 不等式成立. 因而, 对强耦合束缚态——介子, 一般地, 即使忽略  $\frac{v}{c}$  级的小分量,

$$f_{1, \lambda}^+(p_n, p) \approx f_{2, \lambda}^+(p_n, p), \quad (3.32)$$

由 (3.24) 式,

$$f_{1, \lambda}^-(p_n, p) \approx f_{2, \lambda}^-(p_n, p), \quad (3.33)$$

所以

$$a(x) \approx b(x). \quad (3.34)$$

(3.34) 不等式的存在, 是介子作为一对正反层子的强耦合态的特点.  $a(x)$  与  $b(x)$  的差别是束缚态内“对”激发效应的反映.

#### 四、重子波函数的一般形式

重子是三个层子构成的强耦合的束缚态,对层子场采用费米统计,即层子取三色夸克或三个 3 重态模型<sup>[4]</sup>. 按照通常的看法,目前实验所发现的重子填充第二个  $SU_3$  的单态,重子波函数可以写为

$$B_{\alpha\beta\gamma,ijk}^{i'j'k'}(x,y)_{\lambda U} = \langle 0 | T \left\{ \psi_{\alpha i}^{i'} \left( \frac{x}{2}, -\frac{y}{3} \right) \psi_{\beta j}^{j'} \left( -\frac{x}{2}, -\frac{y}{3} \right) \psi_{\gamma k}^{k'} \left( \frac{2}{3} y \right) \right\} | B_{\lambda U}(p) \rangle$$

$$= \varepsilon_{i'j'k'} B_{\alpha\beta\gamma,ijk}(x,y)_{\lambda U}, \quad (4.1)$$

$i', j', k'$  和  $i, j, k$  分别是第二与第一个  $SU_3$  指标,  $U$  表示重子的第一个  $SU_3$  状态,它可以是  $SU_3$  的 10 重态、8 重态和单态. 10 重态重子的  $SU_3$  波函数可以写为

$$d_{ijk}^{lmn}. \quad (4.2)$$

$(lmn)$  表示 10 重态重子  $|B\rangle$  的  $SU_3$  状态,  $d_{ijk}^{lmn}$  的上下三个指标全对称,只有上下指标都相同时不为零,三个指标(上或下)都不相同时为  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ , 有两个指标相同,为  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , 全相同时为 1. 8 重态重子的  $SU_3$  波函数取如下的三种形式:

$$\varepsilon_{ijm}\delta_{kl}, \varepsilon_{ikm}\delta_{il}, \varepsilon_{kim}\delta_{jl}. \quad (4.3)$$

$\binom{m}{l}$  表示 8 重态重子的  $SU_3$  状态, (4.3) 式满足下面的等式:

$$\varepsilon_{ijm}\delta_{kl} + \varepsilon_{ikm}\delta_{il} + \varepsilon_{kim}\delta_{jl} = 0. \quad (4.4)$$

单态重子的  $SU_3$  波函数是

$$\varepsilon_{ijk}. \quad (4.5)$$

利用 (4.2)–(4.3) 式和 (4.5) 式可以将各个  $SU_3$  多重态的重子波函数写为

10 重态:

$$B_{\alpha\beta\gamma,ijk}^{lmn}(x,y)_{\lambda} = d_{ijk}^{lmn} \Gamma_{(\alpha\beta\gamma)}(x,y)_{\lambda} \sqrt{\frac{m}{E}}, \quad (4.6)$$

$\Gamma_{(\alpha\beta\gamma)}(x,y)_{\lambda}$  是对  $(x_1\alpha), (x_2\beta), (x_3\gamma)$  全对称的.

8 重态:

$$B_{\alpha\beta\gamma,ijk}(x,y)_{\lambda}^m = \{ (\varepsilon_{ijm}\delta_{kl} + \varepsilon_{ikm}\delta_{il}) \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{(12)}(x,y)_{\lambda} + (\varepsilon_{ikm}\delta_{il} + \varepsilon_{kim}\delta_{jl}) \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^{(23)}(x,y)_{\lambda} \} \sqrt{\frac{m}{E}}, \quad (4.7)$$

上标 (12), (23) 分别表示对  $(x_1\alpha), (x_2\beta)$ ;  $(x_2\beta), (x_3\gamma)$  进行反对称,由波函数的全对称性得到这样的函数满足下面的等式:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{(12)}(x,y)_{\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^{(23)}(x,y)_{\lambda} + \Gamma_{\gamma\alpha,\beta}^{(31)}(x,y)_{\lambda} = 0. \quad (4.8)$$

即  $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{(12)}(x,y)_{\lambda}, \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^{(23)}(x,y)_{\lambda}, \Gamma_{\gamma\alpha,\beta}^{(31)}(x,y)_{\lambda}$  对指标  $(x_1\alpha), (x_2\beta), (x_3\gamma)$  是  $O_2$  型的混合对称.  $O_2$  是混合对称的投影算子.

单态重子波函数

$$B_{\alpha\beta\gamma,ijk}(x,y)_{\lambda} = \varepsilon_{ijk} \Gamma'_{(\alpha\beta\gamma)}(x,y)_{\lambda} \sqrt{\frac{m}{E}}, \quad (4.9)$$

$\Gamma'_{[\alpha\beta\gamma]}(x, y)_\lambda$  是对  $(x_1\alpha)$ ,  $(x_2\beta)$  和  $(x_3\gamma)$  全反对称.

重子波函数的旋量和时空部分, 即(4.6), (4.7) 和(4.9)式中的  $\Gamma_{[\alpha\beta\gamma]}(x, y)_\lambda$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma}^{(12)}(x, y)_\lambda$  和  $\Gamma'_{[\alpha\beta\gamma]}(x, y)_\lambda$  必须满足下面三个条件:

1. 具有洛仑兹变换的不变性;
2. 在质心系中有确定的角动量;
3. 有确定的空间宇称.

为了方便, 下面都在质心坐标系中进行讨论. 以  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x, y)_\lambda$  为例. 在不失普遍性下,  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x, y)_\lambda$  可以写为

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x, y)_\lambda = \sum_c C_{\frac{1}{2}c, \lambda-\gamma}^{j\lambda} \{A_{\alpha\beta}(x, y)D_{\gamma\gamma'}(x, y)\}_{\lambda-\lambda-c, \gamma'}, \quad (4.10)$$

$\{A_{\alpha\beta}(x, y)D_{\gamma\gamma'}(x, y)\}_{\lambda-\lambda-c}$  是一个角动量为  $l$ , 第三分量为  $(\lambda - c)$  的函数, 由重子波函数在洛仑兹变换下的性质, 得到  $A$  和  $D$  按如下方式变换:

$$\begin{aligned} (AC)' &= \Lambda(AC)\Lambda^{-1}, \\ D' &= \Lambda D \Lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

$C$  是(1.8)式中的电荷共轭算符.  $AC, D$  按(2.1)式中的各种  $\gamma$  矩阵展开, 由于

$$\gamma_4 u_c = u_c, \quad (4.12)$$

所以,  $D$  取(2.1)式中不含  $\gamma_4$  的矩阵.

重子是由三个层子构成的束缚态, 有两种相对轨道运动: 一种是 1, 2 层子之间的相对轨道运动; 另一种是第 3 个层子相对 1, 2 层子质心的轨道运动. 相对坐标  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  描述这两种相对运动, 由它们耦合成轨道角动量为  $l$  的张量的方式有两种: 一种是空间宇称为  $(-1)^l$  的杨氏图(见图 1).

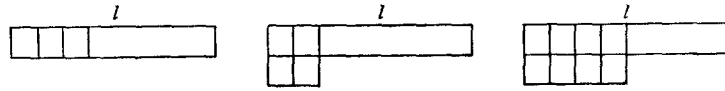


图 1

在这些图中, 由于只有两个相对坐标, 因而每列最多有两个格子. 这类杨氏图有两个格子的列数一定是偶数. 所以, 当  $l$  为奇数时, 这类图有  $\frac{1}{2}(l+1)$  个; 而当  $l$  为偶数时, 这类图有  $\frac{l}{2} + 1$  个. 另一类是空间宇称为  $(-1)^{l+1}$  的杨氏图(见图 2).

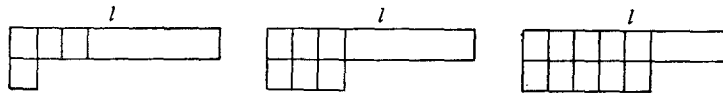


图 2

这类图有两个格子的列数为奇数. 因此, 当  $l$  为奇数时, 有  $\frac{1}{2}(l+1)$  个图; 而当  $l$  为偶数时, 有  $\frac{l}{2}$  个图.

这样, 可以用这些杨氏图所表示的空间波函数和旋量(2.1)式耦合成具有角动量  $(l, m)$  和确定空间宇称的  $\{A_{\alpha\beta}D_{\gamma\gamma'}\}_{lm}$  函数, 再与  $u_c$  耦合成具有确定总角动量的  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x, y)_\lambda$

函数。下面写出自旋  $\frac{1}{2}$  正宇称重子的  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x, y)_\lambda$  (取质心系):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x, y)_\lambda = & \{ (f_1 + f_2\gamma_4 + f_3\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma} + f_4\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\gamma} + f_5x_i\sigma_{i4} + f_6y_j\sigma_{j4} \\ & + f_7x_iy_j\sigma_{ij} + f_8x_iy_j\gamma_k\epsilon_{ijk}\gamma_5)\gamma_5 C \}_{\alpha\beta} \\ & \cdot \{ 1 + f_9\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma} + f_{10}\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\gamma} + f_{11}x_iy_j\sigma_{ij} \}_{\gamma\gamma'} u_{\lambda, \gamma'} \\ & + \{ (g_1 + g_2\gamma_4 + g_3\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma} + g_4\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\gamma} + g_5x_i\sigma_{i4} + g_6y_j\sigma_{j4} \\ & + g_7x_iy_j\sigma_{ij} + g_8x_iy_j\gamma_k\epsilon_{ijk}\gamma_5) C \}_{\alpha\beta} \\ & \cdot \{ (1 + g_9\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma} + g_{10}\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\gamma} + g_{11}x_iy_j\sigma_{ij}) \gamma_5 \}_{\gamma\gamma'} u_{\lambda, \gamma'} \\ & + \{ (h_1\gamma_k + h_2\gamma_4\gamma_k + h_3x_i\sigma_{ik} + h_4y_j\sigma_{jk} + h_5x_i\gamma_j\epsilon_{ijk}\gamma_5 \\ & + h_6y_i\gamma_j\epsilon_{ijk}\gamma_5 + h_7x_iy_j\epsilon_{ijk}\gamma_5 + h_8x_iy_j\epsilon_{ijk}\gamma_4\gamma_5) C \}_{\alpha\beta} \\ & \cdot \{ (\gamma_k + h_9x_i\sigma_{jk} + h_{10}y_j\sigma_{ik}) \gamma_5 \}_{\gamma\gamma'} u_{\lambda, \gamma'} \\ & + \{ (k_1\gamma_k + k_2\gamma_4\gamma_k + k_3x_i\sigma_{ik} + k_4y_j\sigma_{jk} + k_5x_i\gamma_j\epsilon_{ijk}\gamma_5 \\ & + k_6y_i\gamma_j\epsilon_{ijk}\gamma_5 + k_7x_iy_j\epsilon_{ijk}\gamma_5 + k_8x_iy_j\epsilon_{ijk}\gamma_4\gamma_5) \gamma_5 C \}_{\alpha\beta} \\ & \cdot \{ \gamma_k + k_9x_i\sigma_{jk} + k_{10}y_j\sigma_{ik} \}_{\gamma\gamma'} u_{\lambda, \gamma'} \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中  $f_1 \cdots f_{11}, g_1 \cdots g_{11}, h_1 \cdots h_{10}, k_1 \cdots k_{10}$  都是  $x, y$  和  $p$  的洛伦兹标量函数。

利用投影算符  $Y_s, O_2, Y_a$  对  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x, y)_\lambda$  的作用, 得到  $\Gamma_{\{\alpha\beta\gamma\}}(x, y)_\lambda, \Gamma_{\alpha\beta, \gamma}^{(12)}(x, y)_\lambda$  和  $\Gamma_{\beta\gamma, \alpha}^{(23)}(x, y)_\lambda, \Gamma_{\{\alpha\beta\gamma\}}(x, y)_\lambda$  的表达式, 当然在这三组函数中的不变函数一般是不相同的。

将这些函数代入 (4.6), (4.7) 和 (4.9) 式中, 得到在质心系中  $\frac{1}{2}^+$  重子的  $SU_3$  的 10, 8 和 1 三个多重态波函数, 利用洛伦兹变换, 即得到运动系中的波函数。

## 五、具有 $SU_6$ 对称性质的 $\frac{1}{2}^+, \frac{3}{2}^+$ 重子波函数

从第四节的讨论可见, 重子波函数是复杂的。与介子的情况相同, 我们也用质心系中的  $SU_6$  对称, 确定重子波函数中哪些项是大分量。在  $SU_6$  群的无穷小转动下, 重子波函数作如下的变换(在下面的讨论中略去第二个  $SU_3$  指标):

$$\begin{aligned} B'_{\alpha\beta\gamma, ijk}(x, y)_{\lambda U} = & \langle 0 | T \left\{ \psi_{\alpha i} \left( \frac{x}{2}, -\frac{y}{3} \right) \psi_{\beta j} \left( -\frac{x}{2}, -\frac{y}{3} \right) \psi_{\gamma k} \left( \frac{2}{3} y \right) \right\} | B'_{\lambda U} \rangle \\ = & B_{\alpha\beta\gamma, ijk}(x, y)_{\lambda U} \\ & + ie_i^a (\lambda_a \sigma_1)_{i, \alpha\alpha'}^{\prime} B_{\alpha'\beta\gamma, i'jk}(x, y)_{\lambda U} \\ & + ie_j^a (\lambda_a \sigma_1)_{j, \beta\beta'}^{\prime} B_{\alpha\beta'\gamma, ij'k}(x, y)_{\lambda U} \\ & + ie_k^a (\lambda_a \sigma_1)_{k, \gamma\gamma'}^{\prime} B_{\alpha\beta\gamma', ijk'}(x, y)_{\lambda U}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

在  $SU_6$  无穷小算符的作用下, (5.1) 式右边应含有  $SU_6$  同一多重态中各种重子波函数。从 (4.6), (4.7) 和 (4.9) 式可以看到, 重子波函数中的  $SU_3$  部分是完全确定的, 只要讨论重子波函数中的旋量和时空部分如何变换就可以了。下面分别讨论 8 重态重子和 10 重态重子如何交换的。取  $i = 1, j = 1, k = 2, U = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 利用 (4.7) 式, 得

$$\begin{aligned} B'_{\alpha\beta\gamma, 112}(x, y)_{\lambda U} = & ie_i^a \sigma_{1, \alpha\alpha'} \{ \Gamma_{\alpha'\beta, \gamma}^{(12)}(x, y)_\lambda + \Gamma_{\beta\gamma, \alpha'}^{(23)}(x, y)_\lambda \} \\ & + ie_j^a \sigma_{1, \beta\beta'} \{ \Gamma_{\alpha\beta', \gamma}^{(12)}(x, y)_\lambda - \Gamma_{\gamma\alpha, \beta'}^{(31)}(x, y)_\lambda \}, \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

在同一  $SU_6$  多重态中的波函数的旋量部分, 可以用自旋算符的作用联系起来. 从(5.2)式可以看到, 在自旋算符作用下, 8重态的旋量时空波函数应该变为 10重态、8重态重子波函数、单态重子波函数的迭加. 对  $SU_6$  的 56重态, 只是变为 10重态和 8重态的旋量时空波函数的混合. 对 10重态重子波函数, 取  $U = (122)$ ,

$$B'_{\alpha\beta\gamma, 112}(x, y)_{\lambda U} = \frac{i}{\sqrt{3}} e_i^2 \sigma_{l, \alpha\alpha'} \Gamma_{\{\alpha'\beta\gamma\}}(x, y)_{\lambda} + \frac{i}{\sqrt{3}} e_i^2 \sigma_{l, \beta\beta'} \Gamma_{\{\alpha\beta'\gamma\}}(x, y)_{\lambda}. \quad (5.3)$$

在自旋算符的作用下, 10重态的旋量时空波函数应变为 10重态、8重态和单态重子波函数的混合. 对  $SU_6$  的 56重态, 只变为 10重态和 8重态重子波函数的混合. 在这一节中, 只讨论基态的  $SU_6$  的 56重态重子波函数的  $SU_6$  变换, 也就是研究  $\Gamma_{\{\alpha\beta\gamma\}}(x, y)_{\lambda}$  和  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(12)}(x, y)_{\lambda}$ ,  $\Gamma_{\beta\gamma, \alpha}^{(23)}(x, y)_{\lambda}$ ,  $\Gamma_{\gamma\alpha, \beta}^{(31)}(x, y)_{\lambda}$  之间在自旋算符下的变换关系. 由于  $\sigma_0$  是单位算符, 它不会引起波函数的变换. 因而, 只研究自旋算符

$$\sigma_l = i\gamma_l \gamma_4 \gamma_5, \quad l = 1, 2, 3 \quad (5.4)$$

对波函数的作用就可以了. 在基态的  $SU_6$  的 56重态中, 含有  $SU_3$  的 8重态的  $\frac{1}{2}^+$  重子和  $SU_3$  的 10重态的  $\frac{3}{2}^+$  重子,  $SU_6$  的无穷小算符就在这两种波函数之间进行变换. 现在讨论  $\frac{1}{2}^+$  重子的旋量时空波函数(4.13)式的变换. 从(4.13)式可以看到, 在波函数中含有  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ ,  $\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ ,  $x_i y_j \sigma_{ij}$  等类型项. 以  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma}$  为例, 它在自旋算符作用下的变换如下:

$$\sigma_l \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \{ix_k + \sigma_{jk} x_j\} \gamma_4 \gamma_5. \quad (5.5)$$

在自旋算符的作用下, 波函数(4.10)式的  $A$ ,  $D$  中都会出现(5.5)式所表示的项, 经过角动量耦合以后, 就会产生角动量高于  $\frac{3}{2}$  的重子波函数, 而在基态的 56重态中, 不含有这种高角动量状态. 因而, 为保证  $SU_6$  对称的成立, 在基态的 56重态重子波函数中, 只能含有  $S$  波. 在(4.13)式中的高次分波都是小分量 ( $\frac{\nu}{c}$  级的), 忽略这些小分量以后, 得

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma}^{\frac{1}{2}}(x, y)_{\lambda} = \{(f_1 + f_2 \gamma_4) \gamma_5 C\}_{\alpha\beta} u_{\lambda, \gamma} + \{(g_1 + g_2 \gamma_4) C\}_{\alpha\beta} \{\gamma_5 u_{\lambda}\}_{\gamma} \\ + \{(h_1 + h_2 \gamma_4) \gamma_k C\}_{\alpha\beta} \{\gamma_k \gamma_5 u_{\lambda}\}_{\gamma} + \{(k_1 + k_2 \gamma_4) \gamma_k \gamma_5 C\}_{\alpha\beta} \{\gamma_k u_{\lambda}\}_{\gamma}, \quad (5.6)$$

$f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2, k_1, k_2$  是  $x_1, x_2, x_3$  全对称的洛仑兹标量函数. 在  $SU_6$  的 56重态中,  $\frac{1}{2}^+$  重子填充  $SU_3$  的 8重态. 由(4.7)式知道,  $\frac{1}{2}^+$  重子的旋量时空波函数具有  $O_2$  型的混合对称, 由此得

$$g_2 = h_1 = h_2 = k_2 = 0, \quad (5.7)$$

$$f_1 - f_2 - g_1 - 3k_1 = 0. \quad (5.8)$$

$\frac{3}{2}^+$  重子的  $S$  波的旋量时空波函数可以写为

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\frac{3}{2}}(x, y)_{\lambda} = \{(f'_1 + f'_2 \gamma_4) \gamma_k C\}_{\alpha\beta} \phi_{k, \gamma}^{\lambda} + \{(g'_1 + g'_2 \gamma_4) \gamma_k \gamma_5 C\}_{\alpha\beta} \{\gamma_5 \phi_{k, \gamma}^{\lambda}\}_{\gamma}, \quad (5.9)$$

$f'_1, f'_2, g'_1, g'_2$  是  $x, y, p$  的洛伦兹标量函数, 而且对  $x_1, x_2, x_3$  全对称的.  $\phi_k^1$  是静止系中的 Rarita-Shiwenger 旋量. 56 重态的  $\frac{3^+}{2}$  重子填充  $SU_3$  的 10 重态. 由 (4.6) 式知道,  $\frac{3^+}{2}$  重子的旋量时空波函数是全对称的. 对 S 波, 要求 (5.9) 式中  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(xy)_\lambda$  的  $\alpha\beta\gamma$  全对称, 且要求

$$O_1 \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\frac{3}{2}}(x, y)_\lambda = 0. \quad (5.10)$$

$O_1$  是对  $\alpha\beta$  对称的另一种混合对称算子. 由条件 (5.10) 式得

$$g'_1 = 0, g'_2 = f'_2 - f'_1. \quad (5.11)$$

现在讨论自旋算符  $\sigma_i$  对  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma}^{\frac{1}{2}}(x, y)_\lambda$  和  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\frac{3}{2}}(x, y)_\lambda$  的作用.

$$\begin{aligned} (\sigma_i)_{\alpha\alpha'} \Gamma_{\alpha'\beta, \gamma}^{\frac{1}{2}}(x, y)_\lambda = & -i\{(f_2 + f_1\gamma_4)\gamma_i C\}_{\alpha\beta} u_{\lambda, \gamma} + ig_1(\gamma_i\gamma_4\gamma_5 C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 u_\lambda)_\gamma \\ & + ik_1\{\delta_{ki}\gamma_4 C + i\gamma_4\sigma_{ik} C\}_{\alpha\beta}(\gamma_k u_\lambda)_\gamma. \end{aligned} \quad (5.12)$$

(5.12) 式可以分解成自旋为  $\frac{1}{2}$  及  $\frac{3}{2}$  的两部分. 自旋  $\frac{3}{2}$  的部分可以写为

$$\{(f_2 + f_1\gamma_4)\gamma_k C\}_{\alpha\beta} \phi_k^1_{\lambda, \gamma} + g_1(\gamma_4\gamma_k\gamma_5 C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 \phi_k^1)_\gamma - ik_1(\gamma_4\sigma_{ki} C)_{\alpha\beta}(\gamma_i \phi_k^1)_\gamma. \quad (5.13)$$

要求 (5.13) 式对  $\alpha\beta\gamma$  全对称, 由于  $\gamma_4\sigma_{ki} C$  是反对称的, 得

$$k_1 = 0. \quad (5.14)$$

把 (5.14) 式代入 (5.8) 式中, 得到下面关系式:

$$g_1 = f_1 - f_2. \quad (5.15)$$

(5.14) 和 (5.15) 式保证了 (5.13) 式对  $\alpha\beta\gamma$  全对称. 将 (5.14), (5.15) 式代入 (5.13) 式中, 与 (5.9) 式比较, 得到

$$f'_1 = f_2, f'_2 = f_1, g'_2 = f_1 - f_2. \quad (5.16)$$

这样, 在基态的 56 重态中, 只有两个不变函数  $f_1$  和  $f_2$ .

(5.12) 式中取  $k_1 = 0$ ; 其自旋  $\frac{1}{2}$  的部分可以写为

$$\sum_{\lambda, r_3} c_{\frac{1}{2}^+}^{\frac{1}{2}^+} \{[(f_2 + f_1\gamma_4)\gamma_i C]_{\alpha\beta} e_i^1 u_{r_3, \gamma} + (f_1 - f_2)(\gamma_4\gamma_i\gamma_5 C)_{\alpha\beta} e_i^1(\gamma_5 u_{r_3})_\gamma\}. \quad (5.17)$$

现在证明 (5.17) 式与满足 (5.7), (5.8) 和 (5.14) 式的  $\frac{1^+}{2}$  重子波函数是相同的. 为此, 将 (5.17) 式用四种静止系的狄拉克旋量波函数表示出来, 取  $c = \frac{1}{2}$ . (5.17) 式可以写为

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{2} \sum_{r_1, r_2, r_3} c_{\frac{1}{2}^+}^{\frac{1}{2}^+} c_{\frac{1}{2}^+}^{\frac{1}{2}^+} \{f_+ u_{r_1, \alpha} u_{r_2, \beta} u_{r_3, \gamma} - f_- \epsilon_{r_1 r_1' r_2 r_2'} \epsilon_{r_3 r_3'} u_{r_1', \alpha} u_{r_2', \beta} u_{r_3', \gamma} \\ & \quad - f_- (\epsilon_{r_1 r_1' r_2 r_2'} u_{r_1, \alpha} u_{r_2, \beta} + \epsilon_{r_2 r_2' r_1 r_1'} u_{r_2, \alpha} u_{r_1, \beta}) \epsilon_{r_3 r_3'} u_{r_3, \gamma}\} \\ & = \frac{i}{\sqrt{3}} \{[(f_1 + f_2\gamma_4)\gamma_5 C]_{\beta\gamma} u_{\frac{1}{2}, \alpha} + (f_1 - f_2) C_{\beta\gamma}(\gamma_5 u_{\frac{1}{2}})_\alpha \\ & \quad + [(f_1 + f_2\gamma_4)\gamma_5 C]_{\alpha\gamma} u_{\frac{1}{2}, \beta} + (f_1 - f_2) C_{\alpha\gamma}(\gamma_5 u_{\frac{1}{2}})_\beta\}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

其中

$$f_+ = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f_- = \frac{1}{2}(f_1 - f_2),$$



$$\varepsilon_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = 1, \varepsilon_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = -1, \varepsilon_{r_1 r_2} = -\varepsilon_{r_2 r_1}, \quad (5.19)$$

$$u_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, v_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

将 (5.18) 式乘以相应的  $SU_3$  波函数

$$\varepsilon_{ikm}\delta_{il} + \varepsilon_{ikm}\delta_{il}, \quad (5.20)$$

然后, 对  $ai, \beta j, \gamma k$  全对称化, 得到  $\frac{1^+}{2}$  重子的波函数. 把 (5.6) 式代入 (4.7) 式也可得到相同的结果.

另外, 自旋算符作用在  $\Gamma_{a\beta, \gamma}^{\frac{1}{2}}(xy)_\lambda$  的  $\gamma$  分量上, 不会改变波函数的总自旋, 只改变角动量的第三分量的值.

自旋算符作用到  $\frac{3^+}{2}$  重子的旋量时空波函数 (5.9) 式上, 利用克莱布施-高登系数, 可以得到下面的表达式:

$$1) \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{\frac{1}{2}\lambda_1, \frac{1}{2}\lambda_2}^{\frac{3}{2}\lambda} e^{i\frac{1}{2}(\sigma_l)_{\gamma\gamma'}} \Gamma_{a\beta\gamma'}^{\frac{3}{2}}(x, y)_\lambda = \frac{2\sqrt{2}}{3} i \{ \Gamma_{a\gamma, \beta}^{\frac{1}{2}}(xy)_\lambda + \Gamma_{\beta\gamma, a}^{\frac{1}{2}}(x, y)_\lambda \}. \quad (5.21)$$

(5.21) 式对  $\alpha\beta$  是对称的, 将它乘以  $\varepsilon_{ikm}\delta_{il} + \varepsilon_{ikm}\delta_{il}$ , 然后对  $\alpha i, \beta j, \gamma k$  全对称化, 就得到前面的  $\frac{1^+}{2}$  重子波函数.

$$2) \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{\frac{3}{2}\lambda_1, \frac{1}{2}\lambda_2}^{\frac{3}{2}\lambda} e^{i\frac{1}{2}(\sigma_l)_{\gamma\gamma'}} \Gamma_{a\beta\gamma'}^{\frac{3}{2}}(x, y)_\lambda = -\sqrt{\frac{5}{3}} \Gamma_{a\beta\gamma}^{\frac{3}{2}}(x, y)_\lambda, \quad (5.22)$$

这就是  $\frac{3^+}{2}$  重子的旋量时空波函数.

从上面的讨论可以看到, 自旋算符对  $\frac{1^+}{2}, \frac{3^+}{2}$  重子波函数的作用是封闭的. 这一点正是  $\frac{1^+}{2}, \frac{3^+}{2}$  重子填充 56 维不可约表示所必须满足的.

现在, 把  $\frac{1^+}{2}, \frac{3^+}{2}$  重子波函数在质心系中的形式写在下面:

$$\begin{aligned} \frac{1^+}{2} B_{a\beta\gamma, ijk}^{i'j'k'}(x, y)_{i, \lambda}^m &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \varepsilon_{i'j'k'} \{ \Gamma_{a\beta, \gamma}^{\frac{1}{2}}(x, y)_\lambda (\varepsilon_{ijm}\delta_{kl} + \varepsilon_{ikm}\delta_{jl}) \\ &\quad + \Gamma_{\beta\gamma, a}^{\frac{1}{2}}(x, y)_\lambda (\varepsilon_{ikm}\delta_{il} + \varepsilon_{ikm}\delta_{jl}) \}; \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\frac{3^+}{2} B_{a\beta\gamma, ijk}^{i'j'k', lmn}(x, y)_\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}} \varepsilon_{i'j'k'} d_{ijk}^{lmn} \Gamma_{a\beta\gamma}^{\frac{3}{2}}(x, y)_\lambda, \quad (5.24)$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_{a\beta, \gamma}^{\frac{1}{2}}(x, y)_\lambda &= \{ (f_1 + f_2\gamma_4)\gamma_5 C \}_{\alpha\beta} u_{\lambda, \gamma} + (f_1 - f_2) C_{\alpha\beta} \{ \gamma_5 u_\lambda \}_\gamma, \\ \Gamma_{a\beta\gamma}^{\frac{3}{2}}(x, y)_\lambda &= \{ (f_2 + f_1\gamma_4)\gamma_k C \}_{\alpha\beta} \phi_{k, \gamma}^{\lambda} + (f_1 - f_2) (\gamma_4 \gamma_k \gamma_5 C)_{\alpha\beta} \{ \gamma_5 \phi_k^{\lambda} \}_\gamma. \end{aligned} \quad (5.25)$$

现在讨论不变函数  $f_1(x, y)$  和  $f_2(x, y)$  之间的关系. 为此写出重子波函数 (4.1) 式的

谱表示如下:

$$\begin{aligned}
 B_{\alpha\beta\gamma}^{\prime\prime\prime k'}{}_{ijk}(x, y)_{\lambda\nu} &= 6Y_a\theta(x_0)\theta\left(-\frac{x_0}{2}, -y_0\right)\frac{1}{(2\pi)^6}\int d^4p_n d^4p_l dM_n^2 dM_l^2 \\
 &\cdot \delta(p_n^2 + M_n^2)\delta(p_l^2 + M_l^2)\theta(p_{n0})\theta(p_{l0})\exp\left[i\left(p_n - \frac{1}{2}p_l\right)x - i\left(p_l - \frac{2}{3}p\right)y\right] \\
 &\cdot f_{\alpha\beta\gamma}^{\prime\prime\prime k'}{}_{ijk}(p_n, p_l, p, M_n^2, M_l^2)_{\lambda\nu}\sqrt{\frac{m}{E}}, \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha\beta\gamma}^{\prime\prime\prime k'}{}_{ijk}(p_n, p_l, p, M_n^2, M_l^2)_{\lambda\nu} \\
 = \sqrt{\frac{E}{m}}\sum'_{n,l}\langle 0|\phi_{\alpha i}^{\prime\prime}(0)|n\rangle\langle n|\phi_{\beta j}^{\prime\prime}(0)|l\rangle\langle l|\phi_{\gamma k}^{\prime\prime}(0)|B_{\lambda\nu}(p)\rangle, \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

$m, E$  分别是重子的静止质量和能量,  $p_n, p_l$  分别是状态  $|n\rangle, |l\rangle$  总的四动量.  $\sum'_{n,l}$  表示从  $\sum_{n,l}$  中抽出  $\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{d^3p_n}{2E_n}\frac{d^3p_l}{2E_l}dM_n^2 dM_l^2$  以后, 对余下的量子数求和.  $Y_a$  是  $(x_1\alpha ii')$ ,  $(x_2\beta jj')$  和  $(x_3\gamma kk')$  的全反对称算子.

在 (5.27) 式的左边(取静止系)代入  $\frac{1}{2}^+$  重子波函数 (5.23) 式, 通过计算得到  $f_1(x, y)$  的表达式如下:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2}}f_1(x, y)\varepsilon_{i'j'k'}\varepsilon_{ijm'}\delta_{kl\nu}u_{\lambda, \tau} &= \frac{1}{(2\pi)^6}\int d^4p_n d^4p_l dM_n^2 dM_l^2 \\
 &\cdot \delta(p_n^2 + M_n^2)\delta(p_l^2 + M_l^2)\theta(p_{n0})\theta(p_{l0}) \\
 \sum'_{n,l}\left\{\theta(x_0)\theta\left(-\frac{x_0}{2}, +y_0\right)\exp\left[i\left(p_n - \frac{1}{2}p_l\right)x + i\left(p_l - \frac{2}{3}p\right)y\right]\right. \\
 &\cdot \langle 0|\{\gamma_5 C\phi_i^{\prime\prime}\}_{\beta}|n\rangle\langle n|\phi_{\beta, i}^{\prime\prime}|l\rangle\langle l|\phi_{\gamma, k}^{\prime\prime}|B_{\lambda, \nu}^{\prime\prime}\rangle \\
 &- \theta\left(\frac{x_0}{2}, +y_0\right)\theta\left(\frac{x_0}{2}, -y_0\right)\exp\left[\frac{i}{2}(p_n + p_l - p)x + i\left(p_n - p_l + \frac{1}{3}p\right)y\right] \\
 &\cdot \langle 0|\{\gamma_5 C\phi_i^{\prime\prime}\}_{\beta}|n\rangle\langle n|\phi_{\gamma, k}^{\prime\prime}|l\rangle\langle l|\phi_{\beta, i}^{\prime\prime}|B_{\lambda, \nu}^{\prime\prime}\rangle \\
 &- \theta\left(-\frac{x_0}{2}, +y_0\right)\theta\left(-\frac{x_0}{2}, -y_0\right)\exp\left[-\frac{i}{2}(p_n + p_l - p)x + i\left(p_n - p_l + \frac{1}{3}p\right)y\right] \\
 &\cdot \langle 0|\{\gamma_5 C\phi_i^{\prime\prime}\}_{\beta}|n\rangle\langle n|\phi_{\gamma, k}^{\prime\prime}|l\rangle\langle l|\phi_{\beta, i}^{\prime\prime}|B_{\lambda, \nu}^{\prime\prime}\rangle \\
 &+ \theta(-x_0)\theta\left(\frac{x_0}{2}, +y_0\right)\exp\left[-i\left(p_n - \frac{1}{2}p_l\right)x + i\left(p_l - \frac{2}{3}p\right)y\right] \\
 &\cdot \langle 0|\{\gamma_5 C\phi_j^{\prime\prime}\}_{\beta}|n\rangle\langle n|\phi_{\beta, i}^{\prime\prime}|l\rangle\langle l|\phi_{\gamma, k}^{\prime\prime}|B_{\lambda, \nu}^{\prime\prime}\rangle \\
 &+ \theta\left(-\frac{x_0}{2}, -y_0\right)\theta(x_0)\exp\left[-\frac{i}{2}(p_n + p - 2p_l)x - i\left(p_n - \frac{1}{3}p\right)y\right] \\
 &\cdot \langle 0|\phi_{\gamma, k}^{\prime\prime}|n\rangle\langle n|\{\gamma_5 C\phi_i^{\prime\prime}\}_{\beta}|l\rangle\langle l|\phi_{\beta, i}^{\prime\prime}|B_{\lambda, \nu}^{\prime\prime}\rangle \\
 &- \theta\left(\frac{x_0}{2}, -y_0\right)\theta(-x_0)\exp\left[\frac{i}{2}(p_n + p - 2p_l)x - i\left(p_n - \frac{1}{3}p\right)y\right] \\
 &\cdot \langle 0|\phi_{\gamma, k}^{\prime\prime}|n\rangle\langle n|\{\gamma_5 C\phi_j^{\prime\prime}\}_{\beta}|l\rangle\langle l|\phi_{\beta, i}^{\prime\prime}|B_{\lambda, \nu}^{\prime\prime}\rangle\left.\right\}. \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

(5.28) 式中的场量都是取零点的值. 将 (5.28) 式中的矩阵元

$$\langle f_1 | \gamma_5 C \phi | f_2 \rangle \quad (5.29)$$

换为

$$\langle f_1 | \gamma_5 C \gamma_4 \phi | f_2 \rangle, \quad (5.30)$$

就得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}} f_2(x, y) \varepsilon_{i'j'k'} \varepsilon_{ijm'} \delta_{klr} u_{\lambda, r} \quad (5.31)$$

的表达式. 矩阵元 (5.29) 和 (5.30) 式之间存在下面的关系式:

$$\langle f_1(\mathbf{p}_1) | \gamma_5 C \gamma_4 \phi | f_2(\mathbf{p}_2) \rangle = \eta_{i_1} \eta_{i_2} \langle f_1(-\mathbf{p}_{i_1}) | \gamma_5 C \phi | f_2(-\mathbf{p}_{i_2}) \rangle, \quad (5.32)$$

其中  $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}$  分别是状态  $|f_2(\mathbf{p}_2)\rangle, |f_1(\mathbf{p}_1)\rangle$  在空间反射下出现的相因子,  $|f_1(-\mathbf{p}_1)\rangle, |f_2(-\mathbf{p}_2)\rangle$  表示自旋在动量方向上的投影反号. 当状态  $|n\rangle, |l\rangle$  分别取一个层子和二个层子态时, 忽略  $\frac{v}{c}$  级的小量 (由于层子质量  $M \geq 10 \text{ GeV}$ , 重子半径  $\sim 10^{-13} \text{ cm}$ ;  $\frac{v}{c} \ll 1$ ), 式 (5.29) 和 (5.30) 近似相等. 因而, 当波函数只取最低中间态, 忽略高中间态贡献时,

$$f_1(x, y) \approx f_2(x, y). \quad (5.33)$$

这对于可用量子力学描述的弱耦合的束缚态是成立的. 可是, 重子是三个层子的强耦合的束缚态, “对”激发的贡献是重要的. 也就是说, 高中间态的贡献是重要的, 由 (5.32) 式知道, 即使忽略  $\frac{v}{c}$  级的项, 矩阵元 (5.29) 和 (5.30) 式也难于近似相等 (如  $|n\rangle$  态取一个层子和一个赝标介子). 所以, 一般地

$$f_1(x, y) \neq f_2(x, y). \quad (5.34)$$

不等式 (5.34) 的存在, 是强耦合态的特点.

由文献[3]知道, 另一种重子波函数

$$\bar{B}_{a\beta\gamma, ijk}^{i'j'k'}(x_1, x_2, x_3)_{\lambda U} = \langle B_{\lambda U}(p) | T\{\bar{\psi}_{a, i}(x_1) \bar{\psi}_{\beta, j}(x_2) \bar{\psi}_{\gamma, k}(x_3)\} | 0 \rangle \quad (5.35)$$

和波函数 (1.2) 式的关系是

$$\begin{aligned} & \bar{B}_{a\beta\gamma, ijk}^{i'j'k'}(x_1, x_2, x_3)_{\lambda U} \\ &= \eta(-1)^{J+\lambda} \{\gamma_5 C\}_{aa'} \{\gamma_5 C\}_{\beta\beta'} \{\gamma_5 C\}_{\gamma\gamma'} B_{\gamma' \beta' a', kji}^{i'j'k'}(-x_3, -x_2, -x_1)_{-\lambda U}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$\eta$  是由时空弱反演产生的相因子. 它与束缚态是强耦合态或弱耦合态没有关系. 因而, 可以在弱耦合的极限下 (非相对论极限) 讨论  $\eta$  的数值, 在波函数 (5.23) 和 (5.24) 式中取

$$f_1(x, y) = f_2(x, y). \quad (5.37)$$

由电荷归一化条件<sup>[5]</sup>定出:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}, \eta = -i; \\ J &= \frac{3}{2}, \eta = i. \end{aligned} \quad (5.38)$$

两者相差一个负号. 当然, 正个波函数仍可差一个相因子.

最后, 利用波函数的洛伦兹变换, 得到运动系中的波函数如下:

$$\frac{1^+}{2} B_{a\beta r, ij k}^{i'j'k'}(x, y)_{\lambda, l}^m = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \{ \Gamma_{a\beta, r}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_{\lambda} (\varepsilon_{ijm} \delta_{kl} + \varepsilon_{ikm} \delta_{jl}) + \Gamma_{\beta r, a}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_{\lambda} (\varepsilon_{ikm} \delta_{il} + \varepsilon_{ikm} \delta_{jl}) \}, \quad (5.39)$$

$$\bar{B}_{a\beta r, ij k}^{i'j'k'}(x, y)_{\lambda, l}^m = \frac{-1}{6\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \{ \bar{\Gamma}_{a\beta, r}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_{\lambda} (\varepsilon_{ijm} \delta_{kl} + \varepsilon_{ikm} \delta_{jl}) + \bar{\Gamma}_{\beta r, a}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_{\lambda} (\varepsilon_{ikm} \delta_{il} + \varepsilon_{ikm} \delta_{jl}) \}, \quad (5.40)$$

其中

$$\Gamma_{a\beta, r}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_{\lambda} = \left\{ \left[ f_1(x, y) - \frac{i}{m} \hat{p} f_2(x, y) \right] \gamma_5 C \right\}_{a\beta} u_{\lambda}(p)_{\tau} + \{ f_1(x, y) - f_2(x, y) \} C_{a\beta} \{ \gamma_5 u_{\lambda}(p) \}_{\tau}, \quad (5.41)$$

$$\bar{\Gamma}_{a\beta, r}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_{\lambda} = \left\{ C \left[ f_1(-x, -y) + \frac{i}{m} \hat{p} f_2(-x, -y) \right] \gamma_5 \right\}_{a\beta} \bar{u}_{\lambda}(p)_{\tau} + \{ f_1(-x, -y) - f_2(-x, -y) \} C_{a\beta} \{ \bar{u}_{\lambda}(p) \gamma_5 \}_{\tau}, \quad (5.42)$$

$$\frac{3^+}{2} B_{a\beta r, ij k}^{i'j'k', lmn}(x, y)_{\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} d_{ijk}^{lmn} \Gamma_{a\beta r}^{\frac{3}{2}}(x, y, p)_{\lambda}, \quad (5.43)$$

$$\bar{B}_{a\beta r, ij k}^{i'j'k', lmn}(x, y)_{\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} d_{ijk}^{lmn} \bar{\Gamma}_{a\beta r}^{\frac{3}{2}}(x, y, p)_{\lambda}, \quad (5.44)$$

其中

$$\Gamma_{a\beta r}^{\frac{3}{2}}(x, y, p)_{\lambda} = \left\{ \left[ f_2(x, y) - \frac{i}{m} \hat{p} f_1(x, y) \right] \gamma_{\mu} C \right\}_{a\beta} \phi_{\mu}^{\lambda}(p)_{\tau} + \frac{i}{m} \{ f_2(x, y) - f_1(x, y) \} \{ \hat{p} \gamma_{\mu} \gamma_5 C \}_{a\beta} \{ \gamma_5 \phi_{\mu}^{\lambda}(p) \}_{\tau}, \quad (5.45)$$

$$\bar{\Gamma}_{a\beta r}^{\frac{3}{2}}(x, y, p)_{\lambda} = \left\{ C \left[ f_2(-x, -y) + \frac{i}{m} \hat{p} f_1(-x, -y) \right] \gamma_{\mu} \right\}_{a\beta} \phi_{\mu}^{\lambda}(p)_{\tau} + \frac{i}{m} \{ f_2(-x, -y) - f_1(-x, -y) \} \{ C \gamma_{\mu} \hat{p} \gamma_5 \}_{a\beta} \{ \bar{\psi}_{\mu}^{\lambda}(p) \gamma_5 \}_{\tau}. \quad (5.46)$$

## 六、重子的几个低激发态的波函数

从第五节的讨论知道,  $SU_6$  对称使基态的  $\frac{1^+}{2}, \frac{3^+}{2}$  重子波函数取  $S$  波, 其它分波是小分量, 这是  $O_3 \otimes SU_6$  对称. 利用  $O_3 \otimes SU_6$  群的不可约表示, 对目前实验发现的重子进行分类是比较好的. 我们假定, 在质心系的重子波函数具有  $O_3 \otimes SU_6$  对称. 在本节中, 按照这种对称性, 构造几个低激发态重子的波函数. 实际上, 在第五节中写出了具有  $SU_6$  对称性(在质心系)的重子的自旋波函数, 只要按照第四节的方法, 将某一分波的轨道波函数、自旋波函数、 $SU_3$  波函数耦合成全对称的波函数就可以了. 按照  $SU_6$  对称性, 重子可以填充  $SU_6$  的  $\underline{56}, \underline{70}, \underline{20}$  维不可约表示, 这些不可约表示的  $SU_2 \otimes SU_3$  分解是:

$$\underline{56} = (4, 10) + (2, 8), \quad (6.1)$$

$$\underline{70} = (4, 8) + (2, 8) + (2, 10) + (2, 1), \quad (6.2)$$

$$\underline{20} = (2, 8) + (4, 1). \quad (6.3)$$

在(6.1)–(6.3)式中,  $(m, n)$  中的  $m$  表示  $SU_2$  的不可约表示的维数  $2S + 1$ ,  $n$  表示  $SU_3$  的不可约表示的维数. 下面分别讨论  $P$  波、 $D$  波重子波函数.

### 1. $(1s1p)$ 态的重子波函数

这种状态的空间波函数有两种形式(质心系):

$$f(x, y)x_j, f(x, y)y_j, j = 1, 2, 3, \quad (6.4)$$

$f(x, y)$  是洛仑兹变换下不变的  $x_1, x_2$  和  $x_3$  的全对称函数.  $x_j, y_j$  分别只具有  $O_2, O_1$  型混合对称性, 即

$$O_2 x_j = x_j, O_1 y_j = y_j. \quad (6.5)$$

要构成全对称的  $P$  波重子波函数, 要求波函数的旋量和  $SU_3$  部分填充  $SU_3$  的  $\underline{70}$  维表示. 下面给出运动系中的各个  $SU_3$  多重态的波函数:

1)  $S = \frac{1}{2}$  的  $SU_3$  的  $\underline{8}$  重态波函数

$$\begin{aligned} B_{a\beta r, ijk}^{JM} (x, y)_I^m &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \sum_{\lambda, c} C_{1\lambda \frac{1}{2}c}^{JM} x \cdot e^\lambda(p) \{ \Gamma_{\gamma\beta, a}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c \varepsilon_{ikm} \delta_{il} \\ &+ \Gamma_{\alpha r, \beta}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c \varepsilon_{ikm} \delta_{jl} \} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \sum_{\lambda, c} C_{1\lambda \frac{1}{2}c}^{JM} y \cdot e^\lambda(p) \\ &\cdot \{ \Gamma_{\gamma\beta, a}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c (\varepsilon_{ijm} \delta_{kl} + \varepsilon_{kim} \delta_{il}) + \Gamma_{\alpha r, \beta}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c (\varepsilon_{ijm} \delta_{kl} + \varepsilon_{jkm} \delta_{il}) \}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

2)  $S = \frac{3}{2}$  的  $\underline{8}$  重态波函数

$$\begin{aligned} B_{a\beta r, ijk}^{JM} (x, y)_I^m &= \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \sum_{\lambda, c} C_{1\lambda \frac{3}{2}c}^{JM} \Gamma_{a\beta r}^{\frac{3}{2}}(x, y, p)_c \left\{ \frac{1}{2} x \cdot e^\lambda(p) \right. \\ &\left. \cdot \varepsilon_{ijm} \delta_{kl} + \frac{1}{3} y \cdot e^\lambda(p) (\varepsilon_{kim} \delta_{il} + \varepsilon_{kim} \delta_{jl}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

3)  $S = \frac{1}{2}$  的  $\underline{10}$  重态波函数

$$\begin{aligned} B_{a\beta r, ijk}^{JM, lmn} (x, y) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} d_{ijk}^{lmn} \sum_{\lambda, c} C_{1\lambda \frac{1}{2}c}^{JM} \left\{ x \cdot e^\lambda(p) \Gamma_{a\beta, r}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c \right. \\ &\left. + \frac{2}{3} y \cdot e^\lambda(p) [\Gamma_{\alpha r, \beta}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c + \Gamma_{\gamma\beta, a}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c] \right\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

4)  $S = \frac{1}{2}$  的单态波函数

$$\begin{aligned} B_{a\beta r}^{JM} (x, y) &= \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \varepsilon_{ijk} \sum_{\lambda, c} C_{1\lambda \frac{1}{2}c}^{JM} \left\{ \frac{1}{2} x \cdot e^\lambda(p) [\Gamma_{\beta\gamma, a}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c \right. \\ &\left. + \Gamma_{\alpha r, \beta}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c] + y \cdot e^\lambda(p) \Gamma_{a\beta, r}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c \right\}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

很显然, 这是一个负宇称的多重态, 含有两个不变函数.

### 2. $(1p1p)$ 和 $(1s1d)$ 态的波函数

双  $P$  波的  $(1p1p)$  态, 可以耦合出轨道角动量  $L = 2, 1, 0$  的态, 它们的空间波函数和

对称性质如下:

$$\begin{aligned}
 L = 2 & \quad f(x, y) \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{2\lambda} x \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} & O_2, \\
 L = 1 & \quad f(x, y) \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{1\lambda} x \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} & Y_a, \\
 L = 0 & \quad f(x, y) \left\{ x \cdot y + \frac{1}{m^2} p \cdot xp \cdot y \right\} & O_2.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

D 波的 (1s1d) 态的空间波函数和对称性质如下:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{2\lambda} x \cdot e^{\lambda_1(p)} x \cdot e^{\lambda_2(p)} & \quad Y_s, O_1, \\
 f(x, y) \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{2\lambda} y \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} & \quad Y_s, O_1.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

这些分波的  $SU_6$  填充如下:

(1s1d) 可以填充 56 重态;

(1s1d) 和 (1p1p) 的  $L = 2$  分波填充 70 重态;

(1p1p) 的  $L = 1$  分波填充 20 重态;

(1p1p) 的  $L = 0$  分波填充 70 重态.

它们的各  $SU_3$  多重态的波函数如下:

1)  $L = 2$  的 56 重态波函数

8 重态:

$$\begin{aligned}
 B_{a\beta\gamma, ijk}^{JM} (x, y)_I^m &= \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{2\lambda\frac{1}{2}c}^{JM} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{2\lambda} \left\{ x \cdot e^{\lambda_1(p)} x \cdot e^{\lambda_2(p)} \right. \\
 &+ \left. \frac{4}{3} y \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} \right\} \left\{ \Gamma_{a\beta, \gamma}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c (\varepsilon_{ijm} \delta_{kl} + \varepsilon_{ikm} \delta_{jl}) \right. \\
 &+ \left. \Gamma_{\beta\gamma, a}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c (\varepsilon_{ikm} \delta_{il} + \varepsilon_{ikm} \delta_{jl}) \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

10 重态:

$$\begin{aligned}
 B_{a\beta\gamma, ijk}^{JM, lmn} (x, y) &= \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} d_{i'j'k}^{lmn} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{2\lambda\frac{3}{2}c}^{JM} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{2\lambda} \left\{ x \cdot e^{\lambda_1(p)} x \cdot e^{\lambda_2(p)} \right. \\
 &+ \left. \frac{4}{3} y \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} \right\} \Gamma_{a\beta\gamma}^{\frac{3}{2}}(x, y, p)_c.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

2)  $L = 0$  的 56 重态波函数

$$\text{将 (6.12) 和 (6.13) 式中的 } \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{2\lambda} \left\{ x \cdot e^{\lambda_1(p)} x \cdot e^{\lambda_2(p)} + \frac{4}{3} y \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} \right\}$$

换为

$$x^2 + \frac{4}{3} y^2 + \frac{1}{m^2} \left\{ (p \cdot x)^2 + \frac{4}{3} (p \cdot y)^2 \right\}, \tag{6.14}$$

就得到  $L = 0$  的 56 重态的各  $SU_3$  多重态的波函数. 这个 56 重态是基态的 56 重态的径向激发.

3)  $L = 0$  的 70 重态波函数

$S = \frac{1}{2}$  的  $SU_3$  的 8 重态波函数:

$$\begin{aligned}
B_{a\beta\gamma,ijk}^{\frac{1}{2}\lambda}(x,y)_I^m &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \left( x \cdot y + \frac{1}{m^2} p \cdot x p \cdot y \right) \\
&\cdot \left\{ \Gamma_{a\gamma,\beta}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_\lambda \varepsilon_{ikm} \delta_{jl} + \Gamma_{\gamma\beta,a}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_\lambda \varepsilon_{jkm} \delta_{il} \right\} \\
&+ \frac{1}{8} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \left\{ x^2 - \frac{4}{3} y^2 + \frac{1}{m^2} \left[ (p \cdot x)^2 - \frac{4}{3} (p \cdot y)^2 \right] \right\} \\
&\cdot \left\{ \Gamma_{\gamma\beta,a}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_\lambda (\varepsilon_{ijm} \delta_{kl} + \varepsilon_{kim} \delta_{jl}) \right. \\
&\left. + \Gamma_{\gamma a,\beta}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_\lambda (\varepsilon_{ijm} \delta_{il} + \varepsilon_{ijm} \delta_{kl}) \right\}. \tag{6.15}
\end{aligned}$$

$S = \frac{3}{2}$  的  $SU_3$  的 8 重态波函数:

$$\begin{aligned}
B_{a\beta\gamma,ijk}^{\frac{3}{2}\lambda}(x,y)_I^m &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \Gamma_{a\beta\gamma}^{\frac{3}{2}}(x,y,p)_\lambda \left\{ \left( x \cdot y + \frac{1}{m^2} p \cdot x p \cdot y \right) \varepsilon_{ijm} \delta_{kl} \right. \\
&\left. + \frac{1}{4} \left[ x^2 - \frac{4}{3} y^2 + \frac{1}{m^2} (p \cdot x)^2 - \frac{4}{3} \frac{1}{m^2} (p \cdot y)^2 \right] (\varepsilon_{kim} \delta_{il} + \varepsilon_{kim} \delta_{jl}) \right\}. \tag{6.16}
\end{aligned}$$

$S = \frac{1}{2}$  的  $SU_3$  的 10 重态波函数:

$$\begin{aligned}
B_{a\beta\gamma,ijk}^{\frac{1}{2}\lambda mn}(x,y) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} d_{ijk}^{lmn} \left( x \cdot y + \frac{1}{m^2} p \cdot x p \cdot y \right) \Gamma_{a\beta,\gamma}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_\lambda \\
&+ \frac{1}{8} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} d_{ijk}^{lmn} \left\{ x^2 - \frac{4}{3} y^2 + \frac{1}{m^2} \left[ (p \cdot x)^2 - \frac{4}{3} (p \cdot y)^2 \right] \right\} \\
&\cdot \left\{ \Gamma_{\gamma\beta,a}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_\lambda + \Gamma_{\gamma a,\beta}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_\lambda \right\}. \tag{6.17}
\end{aligned}$$

$S = \frac{1}{2}$  的  $SU_3$  单态波函数:

$$\begin{aligned}
B_{a\beta\gamma}^{\frac{1}{2}\lambda}(x,y) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \varepsilon_{ijk} \left( x \cdot y + \frac{1}{m^2} p \cdot x p \cdot y \right) \left\{ \Gamma_{\beta\gamma,a}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_\lambda \right. \\
&+ \Gamma_{a\gamma,\beta}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_\lambda \left. \right\} + \frac{3}{8} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \varepsilon_{ijk} \left\{ x^2 - \frac{4}{3} y^2 + \frac{1}{m^2} (p \cdot x)^2 \right. \\
&\left. - \frac{4}{3} (p \cdot y)^2 \right\} \Gamma_{a\beta,\gamma}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_\lambda. \tag{6.18}
\end{aligned}$$

4)  $L = 2$  的 70 重态波函数

$S = \frac{1}{2}$  的 8 重态:

$$\begin{aligned}
B_{a\beta\gamma,ijk}^{JM}(x,y)_I^m &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{2\lambda_1 \frac{1}{2} \lambda_2}^{JM} C_{1\lambda_1 1\lambda_2}^{2\lambda} \left\{ x \cdot e^{\lambda_1}(p) y \cdot e^{\lambda_2}(p) \right. \\
&\left. \cdot \left[ \Gamma_{a\gamma,\beta}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_c \varepsilon_{ikm} \delta_{jl} + \Gamma_{\gamma\beta,a}^{\frac{1}{2}}(x,y,p)_c \varepsilon_{jkm} \delta_{il} \right] + \frac{1}{4} [x \cdot e^{\lambda_1}(p) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot x \cdot e^{\lambda_2(p)} - \frac{4}{3} y \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)}] \cdot [(\varepsilon_{ijm}\delta_{kl} + \varepsilon_{kim}\delta_{il}) \\ & + \Gamma_{\gamma a, \beta}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c(\varepsilon_{kim}\delta_{il} + \varepsilon_{ijm}\delta_{kl})] \}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

$S = \frac{3}{2}$  的 8 重态:

$$\begin{aligned} B_{a\beta r, ijk}^{JM}(x, y)_l^m &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{2\lambda_1 \frac{3}{2}c}^{JM} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{2\lambda_1} \Gamma_{a\beta r}^{\frac{3}{2}}(x, y, p)_c \\ & \cdot \left\{ x \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} \varepsilon_{ijm}\delta_{kl} + \frac{1}{4} \left[ x \cdot e^{\lambda_1(p)} x \cdot e^{\lambda_2(p)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4}{3} y \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} \right] \cdot (\varepsilon_{kim}\delta_{il} + \varepsilon_{ijm}\delta_{kl}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

$S = \frac{1}{2}$  的 10 重态:

$$\begin{aligned} B_{a\beta r, ijk}^{JM, lmn}(x, y) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} d_{ijk}^{lmn} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{2\lambda_1 \frac{1}{2}c}^{JM} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{2\lambda_1} \\ & \cdot \left\{ x \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} \Gamma_{a\beta, r}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c + \frac{1}{4} \left[ x \cdot e^{\lambda_1(p)} x \cdot e^{\lambda_2(p)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4}{3} y \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} \right] \left[ \Gamma_{\gamma\beta, a}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c + \Gamma_{\gamma a, \beta}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

$S = \frac{1}{2}$  的单态波函数:

$$\begin{aligned} B_{a\beta r, ijk}^{JM}(x, y) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \varepsilon_{ijk} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{2\lambda_1 \frac{1}{2}c}^{JM} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{2\lambda_1} x \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} \\ & \cdot \left\{ \Gamma_{\beta r, a}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c + \Gamma_{a r, \beta}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c \right\} \\ & + \frac{3}{8} \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \varepsilon_{ijk} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{2\lambda_1 \frac{1}{2}c}^{JM} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{2\lambda_1} \left\{ x \cdot e^{\lambda_1(p)} x \cdot e^{\lambda_2(p)} \right. \\ & \left. - \frac{4}{3} y \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} \right\} \Gamma_{a\beta, r}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c. \end{aligned} \quad (6.22)$$

5)  $L = 1$  的 20 重态波函数

$S = \frac{1}{2}$  的 8 重态波函数:

$$\begin{aligned} B_{a\beta r, ijk}^{JM}(x, y)_l^m &= \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{1\lambda_1 \frac{1}{2}c}^{JM} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{1\lambda_1} x \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} \\ & \cdot \left\{ \Gamma_{\beta r, a}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c \varepsilon_{kim}\delta_{il} + \Gamma_{\gamma a, \beta}^{\frac{1}{2}}(x, y, p)_c \varepsilon_{kim}\delta_{il} \right\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

$S = \frac{3}{2}$  的单态波函数:

$$B_{a\beta r, ijk}^{JM}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{E}} \varepsilon_{i'j'k'} \varepsilon_{ijk} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{1\lambda_1 \frac{3}{2}c}^{JM} C_{1\lambda_1, 1\lambda_2}^{1\lambda_1} x \cdot e^{\lambda_1(p)} y \cdot e^{\lambda_2(p)} \Gamma_{a\beta r}^{\frac{3}{2}}(x, y, p)_c. \quad (6.24)$$



更高激发态的波函数可以照样做。利用(5.35)式可以得到另一种波函数(5.36)式的表达式。

最后,作者感谢朱洪元、汪容、何祚麻、冼鼎昌等同志的讨论和帮助。

### 参 考 文 献

- [1] 1966年北京暑期物理讨论会上北京基本粒子理论组的论文。
- [2] Julius Kuti and Victor F. Weisskopf, *Phys. Rev.*, **D4** (1971), 3418.
- [3] 中国科学院数学研究所理论物理研究室、北京大学理论物理研究室基本粒子理论组, *北京大学学报*, **2** (1966), 113.
- [4] M. Y. Han and Y. Nambu, *Phys. Rev.*, **139** (4B) (1965), 1006.
- [5] S. Mandelstam, *Proc. Roy. Soc.*, **A233** (1955), 248.