

关于层子模型中的电磁形式因子与 结构波函数的积分表示*

曹 昌 祺

(北京大学物理系)

提 要

虽然从 B-S 方程出发, 用谐振子位势来讨论介子的质谱, 可以得到较好的结果, 但是当用这样得到的近似波函数来计算电磁形式因子时, 却给出形式因子对类空的 q^2 为复数. 本文指出, 出现上述不合理结果的原因, 在于所得的近似波函数不具有正确的对 p_0 的解析性. 为了保证这种解析性同时又使波函数保持协变形式, 比较适当的方法是, 利用戴逊证明的定理将波函数写成积分表示. 另外, 根据波函数在 $x = 0$ 点为有限的物理要求, 我们还给出了积分表示中的谱函数所应满足的一些求和条件.

在协变场论的层子模型中, 结构波函数具有十分重要的地位. 但是, 精确地求解波函数是目前的数学所达不到的. 因此, 对波函数作动力学研究时, 常常需要作许多近似处理. 我们指出, 如果近似处理破坏了波函数所应当具有的一些普遍性质, 则用它去计算物理过程时, 可能会得到完全不合理的结果.

以介子的电磁形式因子为例. 在协变场论方式的处理中^[1], 介子的电磁顶点的初级图形见图 1. 对于由层子 a 和反层子 b 构成的 0^- 介子, 相当的电流矩阵元为 (除了常数因子外)

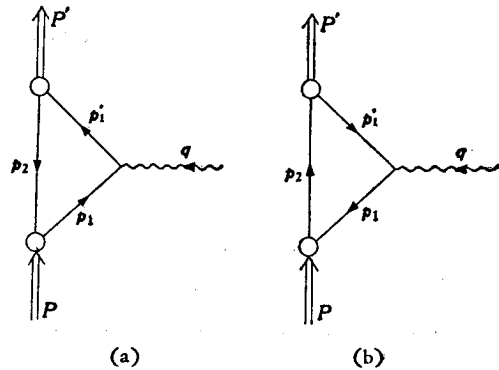


图 1

$$\begin{aligned} \langle P' | J_\mu(0) | P \rangle = & \int d^4 p_2 \text{Sp} [q_a \bar{\chi}(p_2, p_2 + P') \gamma_\mu \chi(p_2 + P, p_2)(i \hat{p}_2 + M) \\ & + q_b \chi(p_2, p_2 - P) \gamma_\mu \bar{\chi}(p_2 - P', p_2)(i \hat{p}_2 + M)], \end{aligned} \quad (1)$$

其中 q_a 和 q_b 分别为层子 a 和层子 b 的电荷, 波函数 χ 和 $\bar{\chi}$ 由下式表示:

$$\chi(p_1, p_2) \equiv \chi_p(p) = \int d^4 x e^{-i p x} \left\langle 0 \left| T \psi \left(\frac{x}{2} \right) \bar{\psi} \left(-\frac{x}{2} \right) \right| P \right\rangle,$$

* 1974 年 10 月 10 日收到.

$$\bar{\chi}(p_2, p_1) \equiv \bar{\chi}_P(p) = \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \psi \left(-\frac{x}{2} \right) \bar{\psi} \left(\frac{x}{2} \right) | P \rangle, \quad (2)$$

其中

$$p_1 = p + \frac{P}{2}, \quad p_2 = p - \frac{P}{2}.$$

有了电流矩阵元,就可从下述普遍关系定出介子的电磁形式因子 $f(q^2)$:

$$\langle P' | J_\mu(0) | P \rangle = \frac{Q}{\sqrt{4P_0 P'_0}} (P + P')_\mu f(q^2), \quad (3)$$

Q 为介子的电荷, $Q = q_a - q_b$.

从弱时空反演,可以得到 $\bar{\chi}_P(p)$ 与 $\chi_P(p)$ 间的关系^[1]

$$\bar{\chi}_P(p) = B \tilde{\chi}_P(p) B^{-1}, \quad (4)$$

其中 $\tilde{\chi}_P$ 代表 χ_P 的转置. 这样,当从动力学研究求得一个近似波函数 $\chi_P(p)$ 以后,由上式求出相应的 $\bar{\chi}_P(p)$,代入(1)式就可计算出初级近似的电磁形式因子.

从 Bethe-Salpeter (以下简称 B-S) 方程出发,用谐振子位势来讨论介子的质谱,可以得出较好的结果^[2]. 然而当用所得到的近似波函数来计算电磁形式因子时,却给出“ $f(q^2)$ 在类空区 ($q^2 > 0$) 为复数”的不合理结果. “ $f(q^2)$ 在类空区为实数”是电流算符的厄米性的要求. 根据 \mathbf{J} 为厄米算符, J_4 为反厄米算符,应有

$$\begin{aligned} \langle P' | \mathbf{J} | P \rangle^* &= -\langle P | \mathbf{J} | P' \rangle, \\ \langle P' | J_4 | P \rangle^* &= \langle P | J_4 | P' \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

再利用(3)式,即可证明 $f(q^2)$ 在类空区必为实数.

以上讨论表明,除了 C, P, T 等对称性以外,我们还必须考虑波函数其他的普遍性质,并期望这种性质能使厄米性条件(5)式得到满足,从而保证所计算的 $f(q^2)$ 在类空区确为实数.

除对称性以外,波函数最重要的普遍性质是它的解析性. 我们知道,对应于波函数旋量结构中每一项,有一个不变振幅,它们是两个不变宗量的函数. 不过,要完全确定这些不变振幅对其两个不变宗量的解析性是很困难的. 我们发现,对于解决上述问题,这种完全的解析性也并非必要的,为满足(5)式所需要的仅仅是波函数对 p_0 的解析性,而这种解析性是容易证明的^[3]. 上述用谐振子位势所求得的波函数之所以不满足(5)式,就是因为它不符合对 p_0 解析性的要求的缘故.

二

从介子的轻子衰变,要求 $\chi_P(x)$ 在 $x = 0$ 点具有有限的数值. 我们把这一性质作为对介子结构波函数的一个物理要求. Drell 和李政道^[4]也曾经讨论过 B-S 方程束缚态的解在 $x = 0$ 点的行为. 在位势可表为非零质量的协变汤川势的迭加的条件下,得出束缚态波函数在 $x = 0$ 点是正则的. 这也表明,我们的上述要求是合理的. 从这一要求,即得出无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_P(p) d^4p$$

必须收敛. 从而在 p 大时, $\chi_p(p)$ 应当足够快地趋于零.

通过对(2)式插入一组完备的中间态, 再加上 $\chi_p(p)$ 在 p 大时趋于零的渐近行为, 就可给出 $\chi_p(p)$ 对 p_0 的积分表示式

$$\chi_p(p) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}P_0 - \sqrt{(P - \frac{1}{2}P)^2 + M^2}} \frac{G_P(\mathbf{p}, p'_0)}{p'_0 - p_0 + i\epsilon} dp'_0 + \int_{-\frac{1}{2}P_0 + \sqrt{(P + \frac{1}{2}P)^2 + M^2}}^{\infty} \frac{G_P(\mathbf{p}, p'_0)}{p'_0 - p_0 - i\epsilon} dp'_0 \right]. \quad (6)$$

它表示出 $\chi_p(p)$ 作为 p_0 的函数的解析性. 上式中 $G_P(p)$ 代表反对易子的矩阵元,

$$G_P(p) = \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | \left\{ \psi\left(\frac{x}{2}\right), \bar{\psi}\left(-\frac{x}{2}\right) \right\} | P \rangle. \quad (7)$$

同样可得

$$\bar{\chi}_p(p) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}P_0 - \sqrt{(P - \frac{1}{2}P)^2 + M^2}} \frac{\bar{G}_P(\mathbf{p}, p'_0)}{p'_0 - p_0 + i\epsilon} dp'_0 + \int_{-\frac{1}{2}P_0 + \sqrt{(P + \frac{1}{2}P)^2 + M^2}}^{\infty} \frac{\bar{G}_P(\mathbf{p}, p'_0)}{p'_0 - p_0 - i\epsilon} dp'_0 \right], \quad (8)$$

$$\bar{G}_P(p) = \gamma_4 G_P^\dagger(p) \gamma_4.$$

另外, 从(4)式和 $\chi_p(p)$ 的普遍旋量结构形式^[5], 还可以证明如下一个关系式:

$$\bar{\chi}_p(p) = \chi_{-p}(p), \quad (9)$$

亦即¹⁾

$$\bar{\chi}(p_2, p_1) = \chi(p_2, p_1). \quad (10)$$

(9)式也就是普通场论中的交叉对称性, 即初态中的动量为 $(-P)$ 的介子应相当于末态中动量为 P 的介子.

利用(10)式可以证明(1)式中的两项分别满足厄米性条件. 因为第一项根据普遍考虑可表为

$$\langle P' | J_\mu | P \rangle_a = \frac{q_a}{\sqrt{4P_0 P'_0}} [(P + P')_\mu g(q^2) + (P - P')_\mu g'(q^2)],$$

而从(10)式, 第二项这时应为

$$\langle P' | J_\mu | P \rangle_b = \frac{q_b}{\sqrt{4P_0 P'_0}} [-(P + P')_\mu g(q^2) + (P - P')_\mu g'(q^2)],$$

由此不难看出, $g' \equiv 0$, $g(q^2) = f(q^2)$. 于是, 两项分别满足厄米性条件, 而且只要讨论其中一项如 $\langle P' | J_\mu | P \rangle_a$ 就够了.

将(6)和(8)式中的宗量 (P, p) 换成 (P, p_2) , 再代入(1)式, 即得

$$\langle P' | J_\mu | P \rangle_a = -\frac{q_a}{4\pi^2} \int d^4 p_2 \text{Sp} \left[\left(\int_{-\infty}^{L'} dp''_{20} \frac{\bar{G}_{P'}(\mathbf{p}_2, p''_{20})}{p''_{20} - p_{20} + i\epsilon} \right) \right]$$

1) 注意 $\bar{\chi}$ 和 χ 中 p_2 和 p_1 的顺序. 无论对于 χ 和 $\bar{\chi}$, 第一个位置上的为指向顶角 Γ 的层子内线的动量, 第二个为背向 Γ 的层子内线的动量.

$$\begin{aligned}
& + \int_{R'}^{\infty} d p_{20}'' \frac{\bar{G}_{P'}(\mathbf{p}_2, p_{20}'')}{p_{20}'' - p_{20} - i\epsilon} \gamma_{\mu} \left(\int_{-\infty}^L d p_{20}' \frac{G_P(\mathbf{p}_2, p_{20}')}{p_{20}' - p_{20} + i\epsilon} \right. \\
& \left. + \int_R^{\infty} d p_{20}' \frac{G_P(\mathbf{p}_2, p_{20}')}{p_{20}' - p_{20} - i\epsilon} \right) (i\hat{p}_2 + M), \quad (11)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
L = L' &= -\sqrt{\mathbf{p}_2^2 + M^2}, \\
R &= -P_0 + \sqrt{(\mathbf{p}_2 + \mathbf{P})^2 + M^2}, \quad R' = -P'_0 + \sqrt{(\mathbf{p}_2 + \mathbf{P}')^2 + M^2}. \quad (12)
\end{aligned}$$

将(11)式中最后一个因子 $i\hat{p}_2 + M$ 分成两项即 $(i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_2 + M) - \gamma_4 p_{20}$ 来分别处理. 我们先对 p_{20} 积分, 其中第一项通过补以适当的无穷大半圆弧(即有些项用上半平面的, 有些项用下半平面的)化为

$$\begin{aligned}
\langle P' | J_{\mu} | P \rangle_{a1} &= \frac{q_a}{2\pi} i \int d\mathbf{p}_2 \text{Sp} \left[\left(\int_{-\infty}^{L'} d p_{20}'' \int_R^{\infty} d p_{20}' \frac{\bar{G}_{P'}(\mathbf{p}_2, p_{20}'') \gamma_{\mu} G_P(\mathbf{p}_2, p_{20}')}{p_{20}'' - p_{20}' - i\epsilon} \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_{R'}^{\infty} d p_{20}'' \int_{-\infty}^L d p_{20}' \frac{\bar{G}_{P'}(\mathbf{p}_2, p_{20}'') \gamma_{\mu} G_P(\mathbf{p}_2, p_{20}')}{p_{20}'' - p_{20}' + i\epsilon} \right) (i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_2 + M) \right]. \quad (13)
\end{aligned}$$

上式第二项在对 p_{20} 积分时, 可以将沿实轴的积分转化为沿两个闭合回路 C^+ 和 C^- 积分的一半. C^+ 为实轴补以上半平面无穷大半圆弧, C^- 为实轴补以下半平面无穷大半圆弧. 这样算出的结果是

$$\begin{aligned}
\langle P' | J_{\mu} | P \rangle_{a2} &= -\frac{q_a}{2\pi} i \int d\mathbf{p}_2 \text{Sp} \left[\left[\int_{-\infty}^{L'} d p_{20}'' \int_R^{\infty} d p_{20}' \frac{\bar{G}_{P'}(\mathbf{p}_2, p_{20}'') \gamma_{\mu} G_P(\mathbf{p}_2, p_{20}') \gamma_4 \frac{1}{2}(P'_{20} + p_{20}'')}{p_{20}'' - p_{20}' - i\epsilon} \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_R^{\infty} d p_{20}'' \int_{-\infty}^L d p_{20}' \frac{\bar{G}_{P'}(\mathbf{p}_2, p_{20}'') \gamma_{\mu} G_P(\mathbf{p}_2, p_{20}') \gamma_4 \frac{1}{2}(p_{20}' + p_{20}'')}{p_{20}'' - p_{20}' + i\epsilon} \right] \right. \\
& \left. - \frac{i q_a}{2\pi} \int d\mathbf{p}_2 \text{Sp} \left[\int_{R'}^{\infty} d p_{20}'' \int_R^{\infty} d p_{20}' \bar{G}_{P'}(\mathbf{p}_2, p_{20}'') \gamma_{\mu} G_P(\mathbf{p}_2, p_{20}') \gamma_4 \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_{-\infty}^{L'} d p_{20}'' \int_{-\infty}^L d p_{20}' \bar{G}_{P'}(\mathbf{p}_2, p_{20}'') \gamma_{\mu} G_P(\mathbf{p}_2, p_{20}') \gamma_4 \right] \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

从介子的稳定性条件(设 μ 为介子的质量)

$$\mu < 2M,$$

可以证明, 对于 \mathbf{p}_2 全部实数值, 下述两不等式恒成立:

$$\begin{aligned}
-\sqrt{\mathbf{p}_2^2 + M^2} &< -P'_0 + \sqrt{(\mathbf{p}_2 + \mathbf{P}')^2 + M^2}, \\
-\sqrt{\mathbf{p}_2^2 + M^2} &< -P_0 + \sqrt{(\mathbf{p}_2 + \mathbf{P})^2 + M^2}. \quad (15)
\end{aligned}$$

这样(13)和(14)式中的分母 $p_{20}' - p_{20}''$ 不会为零, 因而其中的 $i\epsilon$ 都可以略去. 有了这一点即可证明, $\langle P' | J_{\mu} | P \rangle_a$ 的确满足厄米性条件(5)式.

三

$\chi_p(p)$ 对 p_0 的解析性虽然具有容易证明的优点, 然而(6)式本身并不具有协变形式. 不仅如此, 当在插入的全部中间态中近似地只取有限项时(例如极点近似), 得出的结果往

往是非协变的。因此,剩下的问题就是怎样才能保证(6)式是相对论协变的。

Dyson 曾研究过对易子矩阵元的数学性质^[6]。根据“因果性”条件即对易子矩阵元对类空间隔等于零的性质,给出了它的傅里叶变换的一个数学表示。我们可以将这个结果用到(7)式的 $G_P(p)$ 上,即将 $G_P(p)$ 表为

$$G_P(p) = \frac{2\pi}{\sqrt{2P_0}} \int_S d^4p' \int_{m_0^2}^{\infty} dm^2 \varepsilon(p_0 - p'_0) \delta((p - p')^2 + m^2) \rho_P(p', m^2), \quad (16)$$

S 为一有限的范围,关于它的说明请见文献[6],此处从略。

将(16)式代入(6)式,注意到下述不等式对任意 \mathbf{p} 都成立:

$$\frac{1}{2}P_0 - \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{P}\right)^2 + M^2} < -\frac{P_0}{2} + \sqrt{\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{P}\right)^2 + M^2},$$

再根据 S 和 m_0^2 的取值范围,即可在(6)式第一项积分中作如下代换:

$$\delta((p - p')^2 + m^2) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + m^2}} \delta(p_0 - p'_0 + \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + m^2}),$$

同时在第二项积分中可作如下代换:

$$\delta((p - p')^2 + m^2) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + m^2}} \delta(p_0 - p'_0 - \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + m^2}),$$

于是得到束缚态波函数的积分表示为

$$\chi_P(p) = \frac{-i}{\sqrt{2P_0}} \int_S d^4p' \int_{m_0^2}^{\infty} dm^2 \frac{\rho_P(p', m^2)}{(p - p')^2 + m^2 - i\epsilon}. \quad (17)$$

这样,“因果性”条件就保证了(6)式的协变性。至于 ρ_P 的旋量结构形式,同样可以根据普遍性要求来确定,此处不再讨论。

我们指出:当中间态近似取有限项时,所得结果之所以不协变,就是因为这种近似破坏了前述“因果性”条件,其相应的 $G_P(p)$ 不具有(16)式的形式的缘故。例如在“极点近似”中,所考虑的就只是单粒子中间态的贡献以及双粒子中间态非联接部份的贡献。对于单粒子中间态,所得结果是

$$\begin{aligned} \chi_P^{(1)}(p) = & -\frac{1}{\sqrt{2P_0}} \left\{ \left[i \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{P}} \right)_{M+} - M \right] \gamma_5 \left[f_1 \left(\left(P - \left(p + \frac{1}{2} P \right)_{M+} \right)^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + f_2 \left(\left(P - \left(p + \frac{1}{2} P \right)_{M+} \right)^2 \right) \frac{i \hat{\mathbf{P}}}{\mu} \right] \right\} / \left\{ 2 \sqrt{\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \right)^2 + M^2} \right. \\ & \left. \times \left[\sqrt{\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \right)^2 + M^2} - \left(p_0 + \frac{1}{2} P_0 \right) - i\epsilon \right] \right\} \\ & - \frac{1}{\sqrt{2P_0}} \left\{ \gamma_5 \left[f_1 \left(\left(P + \left(p - \frac{1}{2} P \right)_{M-} \right)^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + f_2 \left(\left(P + \left(p - \frac{1}{2} P \right)_{M-} \right)^2 \right) \frac{i \hat{\mathbf{P}}}{\mu} \right] \right\} \\ & \times \left[i \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{P}} \right)_{M-} - M \right] \right\} / \left\{ 2 \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{P} \right)^2 + M^2} \right. \\ & \left. \times \left[\sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{P} \right)^2 + M^2} + \left(p_0 - \frac{1}{2} P_0 \right) - i\epsilon \right] \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

在上式中,脚码 $M+$ 代表该矢量的能量分量取在层子的质壳上且取正值,脚码 $M-$

代表该矢量的能量分量取在层子的质壳上但取负值。例如，

$$\left(\hat{p} + \frac{1}{2} \hat{P}\right)_{M+} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{P}\right) + i\gamma_4 \sqrt{M^2 - \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{P}\right)^2}.$$

(18)式中的 f_1 和 f_2 出自矩阵元 $\langle p_n | \bar{\psi}(0) | P \rangle$, p_n 为单层子中间态中层子的动量。利用不变性考虑, $\langle p_n | \bar{\psi}(0) | P \rangle$ 可表为

$$\langle p_n | \bar{\psi}(0) | P \rangle = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{2P_0 p_{n0}}} \bar{u}(p_n) \boldsymbol{\gamma}_5 \left[f_1 ((P - p_n)^2) + f_2 ((P - p_n)^2) \frac{i\hat{P}}{\mu} \right]. \quad (19)$$

而通过电荷共轭变换的考虑,

$$\langle p_n^{\bar{}} | \psi(0) | P \rangle = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{2P_0 p_{n0}}} \boldsymbol{\gamma}_5 \left[f_1 ((P - p_n)^2) + f_2 ((P - p_n)^2) \frac{i\hat{P}}{\mu} \right] v(p_n), \quad (20)$$

其中 $\langle p_n^{\bar{}} |$ 代表一个反层子的状态, 反层子的动量为 p_n 。有了 (19) 和 (20) 式不难推出 (18) 式。

在插入双粒子中间态(介子+层子, 或介子+反层子)时, 我们将遇到如下的矩阵元:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \phi_\sigma(0) | p_n, P_n \rangle^{\text{in}} \text{in} \langle p_n, P_n | \bar{\psi}_\rho(0) | P \rangle, \\ & \langle 0 | \bar{\psi}_\rho(0) | p_n^{\bar{}}, P_n \rangle^{\text{in}} \text{in} \langle p_n^{\bar{}}, P_n | \phi_\sigma(0) | P \rangle. \end{aligned}$$

我们先看 $\text{in} \langle p_n, P_n | \bar{\psi}_\rho(0) | P \rangle$.

$$\text{in} \langle p_n, P_n | \bar{\psi}(0) | P \rangle = \langle P | \psi(0) | p_n, P_n \rangle^{\text{in}^\dagger} \boldsymbol{\gamma}_4, \quad (21)$$

上式中 $\langle P | \psi(0) | p_n, P_n \rangle^{\text{in}}$ 代表图 2(a) 所表示的全部图形。所谓非联接部分是指其中由图 2(b) 所表示的部份。不难得出

$$\begin{aligned} & \text{in} \langle p_n, P_n | \bar{\psi}(0) | P \rangle_{\text{非联接}} \\ & = \langle p_n | \bar{\psi}(0) | 0 \rangle \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_n) \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{p_{n0}}} \bar{u}(p_n) \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_n). \quad (22) \end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned} & \text{in} \langle p_n^{\bar{}}, P_n | \psi(0) | P \rangle_{\text{非联接}} \\ & = \langle p_n^{\bar{}} | \psi(0) | 0 \rangle \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_n) \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{p_{n0}}} v(p_n) \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_n). \quad (23) \end{aligned}$$

另外, 通过约化公式, 可将矩阵元 $\langle 0 | \psi(0) | p_n, P_n \rangle^{\text{in}}$ 和 $\langle 0 | \bar{\psi}(0) | p_n^{\bar{}}, P_n \rangle^{\text{in}}$ 分别与 $\langle p_n^{\bar{}} | \psi(0) | P \rangle$ 和 $\langle p_n | \bar{\psi}(0) | P \rangle$ 相比较, 而得到

$$\langle 0 | \psi(0) | p_n, P_n \rangle^{\text{in}} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{2P_{n0} p_{n0}}} \boldsymbol{\gamma}_5 \left[f_1 ((P_n + p_n)^2) + f_2 ((P_n + p_n)^2) \frac{i\hat{P}_n}{\mu} \right] u(p_n),$$

$$\langle 0 | \bar{\psi}(0) | p_n^{\bar{}}, P_n \rangle^{\text{in}} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{2P_{n0} p_{n0}}} \bar{v}(p_n) \boldsymbol{\gamma}_5 \left[f_1 ((P_n + p_n)^2) + f_2 ((P_n + p_n)^2) \frac{i\hat{P}_n}{\mu} \right].$$

从这些结果即可求出双粒子中间态非联接部份的贡献为

$$\chi_p^{(2)}(p) = -\frac{1}{\sqrt{2P_0}} \left\{ \boldsymbol{\gamma}_5 \left[f_1 \left(\left(P + \left(p - \frac{1}{2} P \right)_{M+} \right)^2 \right) + f_2 \left(\left(P + \left(p - \frac{1}{2} P \right)_{M+} \right)^2 \right) \frac{i\hat{P}}{\mu} \right] \right\}$$

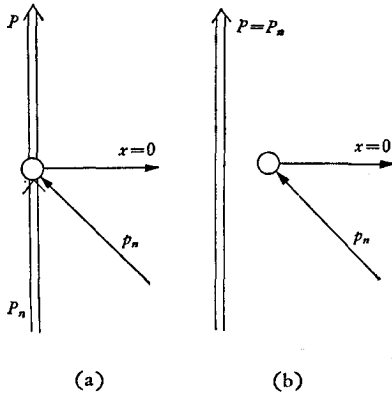


图 2

$$\begin{aligned}
& \times \left[i \left(\hat{p} - \frac{1}{2} \hat{P} \right)_{M+} + M \right] \Big/ \left\{ 2 \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{P} \right)^2 + M^2} \right. \\
& \times \left[\sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{P} \right)^2 + M^2} - \left(p_0 - \frac{1}{2} P_0 \right) - i\epsilon \right] \Big\} \\
& - \frac{1}{\sqrt{2P_0}} \left\{ \left[i \left(\hat{p} + \frac{1}{2} \hat{P} \right)_{M-} - M \right] \gamma_5 \left[f_1 \left(\left(P - \left(p + \frac{1}{2} P \right)_{M-} \right)^2 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + f_2 \left(\left(P - \left(p + \frac{1}{2} P \right)_{M-} \right)^2 \right) \frac{i\hat{P}}{\mu} \right] \right\} \Big/ \left\{ 2 \sqrt{\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \right)^2 + M^2} \right. \\
& \left. \times \left[\sqrt{\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \right)^2 + M^2} + \left(p_0 + \frac{1}{2} P_0 \right) - i\epsilon \right] \right\}, \quad (24)
\end{aligned}$$

(18)和(24)式给出全部极点项,然而它们加在一起并不能合并成为协变量. 这里情况与散射不同,在那里(例如 π -N 散射),极点上的留数中不含有像 f_1 和 f_2 那样的函数,代替它们的为一常数 g^2 ,故四个极点项恰好并成 $\frac{g^2}{s-M^2}$ 和 $\frac{g^2}{u-M^2}$ (旋量结构未写出)形式的协变量.

考察相应的 $G_P(p)$,可以看出它不具有 Dyson 表示的形式. 在取单粒子中间态和双粒子中间态非联接部份的近似下,不难求出

$$\begin{aligned}
G_P(p) &= -\frac{2\pi i}{\sqrt{2P_0}} \gamma_5 \left[f_1 \left(\left(p + \frac{P}{2} \right)^2 \right) + f_2 \left(\left(p + \frac{P}{2} \right)^2 \right) \frac{i\hat{P}}{\mu} \right] \left[i \left(\hat{p} - \frac{\hat{P}}{2} \right) - M \right] \\
&\times \varepsilon \left(p_0 - \frac{P_0}{2} \right) \delta \left(\left(p - \frac{P}{2} \right)^2 + M^2 \right) - \frac{2\pi i}{\sqrt{2P_0}} \left[i \left(\hat{p} + \frac{\hat{P}}{2} \right) - M \right] \\
&\times \gamma_5 \left[f_1 \left(\left(p - \frac{P}{2} \right)^2 \right) + f_2 \left(\left(p - \frac{P}{2} \right)^2 \right) \frac{i\hat{P}}{\mu} \right] \varepsilon \left(p_0 + \frac{P_0}{2} \right) \delta \left(\left(p + \frac{P}{2} \right)^2 + M^2 \right). \quad (25)
\end{aligned}$$

它本身虽然是协变的,然而由于不具有 Dyson 表示的形式,故不能保证相应的 $\chi_P(p)$ 是协变的.

从以上讨论,我们看到,对波函数的近似处理中,如果不破坏(17)的形式,而将近似处理限制在 $\rho_P(p, m^2)$ 上,就可避免产生前述不合理的结果.

四

在本节中,我们将从(17)式出发,根据 x 表象中的波函数 $\chi_P(x)$ 在 $x=0$ 点为有限值的物理要求,给出 $\rho_P(p, m^2)$ 所应满足的一些求和条件. 如第二节所述, $\chi_P(x)$ 在 $x=0$ 点有限,要求

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_P(p) d^4p = \int_{-\infty}^{+\infty} d^4p \int d^4p' dm^2 \frac{\rho_P(p', m^2)}{(p-p')^2 + m^2 - i\epsilon}$$

收敛到一个有限值. 通过变换 p_0 的积分路径的处理^[7], 上式右方可以化为

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4p \int d^4p' dm^2 \frac{\rho_P(p', m^2)}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + (p_0-p'_0)^2 + m^2}$$

我们仍记作

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \int d^4 p' dm^2 \frac{\rho_P(p', m^2)}{(p - p')^2 + m^2}$$

在本节以下的各式中,两矢量的点积 $p \cdot k$ 都代表 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} + p_0 k_0$. 按此记号

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \chi_P(p) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \int d^4 p' dm^2 \frac{\rho_P(p', m^2)}{(p - p')^2 + m^2} \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p \int d^4 p' dm^2 \frac{\rho_P(p', m^2)}{p^2 - 2p \cdot p' + p'^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (26)$$

当 p^2 很大时,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_P(p', m^2)}{p^2 - 2p \cdot p' + p'^2 + m^2} &= \rho_P(p', m^2) \left[\frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{2p \cdot p' - p'^2}{(p^2 + m^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(p \cdot p')^2}{(p^2 + m^2)^3} + o\left(\frac{1}{p^5}\right) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

代入上式,即得

$$\begin{aligned} \int d^4 p \chi_P(p) &= i \int d^4 p \int d^4 p' dm^2 \rho_P(p', m^2) \left[\frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{2p \cdot p' - p'^2}{(p^2 + m^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(p \cdot p')^2}{(p^2 + m^2)^3} \right] + \text{剩余项}. \end{aligned} \quad (28)$$

剩余项的被积函数 $o\left(\frac{1}{p^5}\right)$, 因而收敛性不存在问题. 下面,我们先把积分限取为中心在原点的一个四维大球体

$$p^2 < K^2,$$

这时,对 p 的积分可先积出^[7],

$$\begin{aligned} \int_{p^2 < K^2} d^4 p \chi_P(p) &= \pi^2 i \int d^4 p' dm^2 \rho_P(p', m^2) \int_0^{K^2} \frac{p^2 dp^2}{p^2 + m^2} + \text{剩余项} \\ &= \pi^2 i \int d^4 p' dm^2 \rho_P(p', m^2) \left(K^2 - m^2 \ln \frac{K^2 + m^2}{m^2} \right) + \text{剩余项}, \end{aligned} \quad (29)$$

剩余项在 $K^2 \rightarrow \infty$ 时是保持有限的. 按照上式左方收敛的要求,右方第一项当 $K^2 \rightarrow \infty$ 时亦应保持有限. 由于 K^2 和 $\ln K^2$ 以不同速度趋于无穷,容易想到此要求只在

$$\int \rho_P(p', m^2) d^4 p' dm^2 \quad \text{和} \quad \int m^2 \rho_P(p', m^2) d^4 p' dm^2$$

都收敛并且等于零时才能满足. 不过,若 $m^2 \rightarrow \infty$ 时 $\rho_P(p', m^2)$ 是在正负之间振荡而无确定极限,则上述结论并不成立. 我们不考虑这种情况,而假定 $m^2 \rightarrow \infty$ 时, $\rho_P(p', m^2)$ 有确定的极限(包括有限值或无穷大). 这时可以证明上述结论成立,即

$$\int \rho_P(p', m^2) d^4 p' dm^2 = 0, \quad (30.1)$$

$$\int m^2 \rho_P(p', m^2) d^4 p' dm^2 = 0. \quad (30.2)$$

我们就得到 $\rho_P(p', m^2)$ 应满足的两个求和条件. 如果进一步考虑非对称的积分限,即四维球体的中心不在原点,还可得到另一个求和关系为

$$\int p'_a \rho_P(p', m^2) d^4 p' dm^2 = 0. \quad (30.3)$$

为看明这一点, 将积分限取为

$$(p - k)^2 < K^2,$$

即球体中心位于 $p = k$ 点. 按通常处理发散积分的方法^[7], 可以求出积分中心移动后, (28)式右方各项的改变值, 得出

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_{(p-k)^2 < K^2} d^4 p \chi_P(p) - \int_{p^2 < K^2} d^4 p \chi_P(p) \\ &= -i\pi^2 k^2 \int \rho_P(p', m^2) d^4 p' dm^2 + i\pi^2 k_\alpha \int p'_a \rho_P(p', m^2) d^4 p' dm^2, \end{aligned} \quad (31)$$

将(30.1)式代入后, 化为

$$\Delta = i\pi^2 k_\alpha \int p'_a \rho_P(p', m^2) d^4 p' dm^2.$$

而按照(28)式左方收敛的要求, Δ 应等于零, 于是立即得出(30.3)式.

参 考 文 献

- [1] 中国科学院数学研究所理论物理研究室、北京大学理论物理研究室基本粒子理论组, 北京大学学报(自然科学), **12**(1966), 113.
- [2] 北京大学物理系基本粒子理论组, 物理学报, **25**(1976), 316; 414.
- [3] G. C. Wick, *Phys. Rev.*, **96**(1954), 1124.
- [4] S. D. Drell, T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **D5**(1972), 1738.
- [5] 北京大学理论物理研究室基本粒子理论组、中国科学院数学研究所理论物理研究室, 北京大学学报(自然科学), **12**(1966), 209.
- [6] F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, **110**(1958), 1460.
- [7] 参见一般量子场论的书, 例如, 朱洪元, 量子场论, §10.3.

**NOTE ON THE ELECTROMAGNETIC FORM FACTOR AND
INTEGRAL REPRESENTATION OF THE WAVE
FUNCTION IN THE STRATON MODEL**

CAO CHANG-QI

(Department of Physics, Beijing University)

ABSTRACT

Although the meson mass spectrum calculated from the simple harmonic potential by the B-S equation fits the experimental data fairly well, the wave function so obtained leads however to unreasonable results when applied to calculate the electromagnetic form factor, which turns out to be complex for space-like q^2 . It is argued that the reason for this lies in the fact that such a wave function does not possess the correct analytical property for the variable p_0 . In order to guarantee this analyticity as well as to maintain the covariant form, it is adequate to express the wave function in the form of an integral representation according to a theorem proved by Dyson. Furthermore, some summation rules for the spectral function in the integral representation are derived with the physical condition that the wave function should be finite at $x = 0$.