

磁透镜与偏转器的复合系统的 电子光学性质和象差理论*

西门纪业

提 要

本文研究了旋转对称磁透镜和磁偏转器的复合系统,给出了场和轨迹的普遍表达式,利用向量形式来描写电子轨迹,讨论了高斯光学性质。运用变分原理(费马原理)计算了三级象差,得出了复合系统普遍的象差公式。它们以矩阵的形式表出,形式简洁,便于进行数值计算。本文的结果具有较大的普遍性,概括了文献上关于偏转象差的已有结果,并对复合系统作了较完整的论述和严格的计算,因而可以广泛地研究各种电子束管和电子光学仪器的偏转象差。

“科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。”在三、四十年代随着电子束器件的发展,开始了电子偏转系统象差的研究。在文献[1]中总结了早期的工作。后来,电子束器件进一步得到发展,特别是在研制高性能器件(如彩色电视显象管)的过程中,文献[2,3]对于磁偏转系统象差作了进一步的研究和计算。近年来广泛应用的电子探针、扫描电镜和各种电子束加工机中,一方面用电子透镜使电子束聚焦,同时又用磁偏转器使电子束扫描,这样就需要研究旋转对称磁透镜与磁偏转器的复合系统的象差问题。

迄今为止关于偏转象差的研究工作尚有一定的局限性。通常的偏转象差的公式比较繁复,包含许多多重积分,不便于进行数值计算。对于复合系统还未见到全面的研究,只有文献[4]作了初步的讨论,但是限于轴上物点的象差,所得结果亦不便于实际计算。

“只有社会实践才能使人的认识开始发生”。最近在开门办学的过程中,了解到有关工厂在工作中提出了研究上述复合系统的象差问题。

我们将复合系统作为一个整体,利用平面向量来描写轨迹^[5],讨论了高斯光学性质。运用变分原理(费马原理)计算象差,得到了复合系统普遍的象差公式,它们以矩阵形式表出,形式简洁,便于使用电子计算机进行数值计算。

一、复合系统中场和轨迹的普遍表达式

现在采用向量的形式表示电子轨迹^[5]。选择 z 轴和旋转对称轴(或光轴)一致,电子的位置则用在垂直于 z 轴的 xy 平面中的一个平面向量¹⁾

$$\mathbf{r} = (x, y) \quad (1.1)$$

* 1975 年 2 月 21 日收到。

1) 本文中所讨论的向量(除特别指明者外)一律是指在 xy 平面中的平面向量。

表示(从 z 轴量到电子所在处), \mathbf{r} 的正交向量用

$$\mathbf{r} = (-y, x) \quad (1.2)$$

表示. 将 \mathbf{r} 在 xy 平面中沿着逆时针方向旋转 90° , 便得到 \mathbf{r} , 因此

$$\mathbf{r} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}, \quad (1.3)$$

其中 \mathbf{k} 是沿着 z 轴正方向的单位向量. 上述 \mathbf{r}, \mathbf{r} 的位置见图 1.

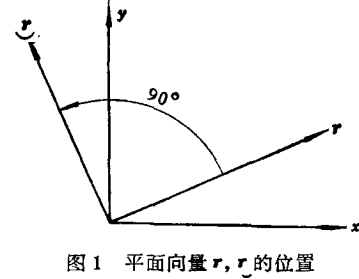


图 1 平面向量 \mathbf{r}, \mathbf{r} 的位置

1) 磁场的普遍表达式

我们讨论的复合系统包括一个旋转对称磁透镜(或一系列磁透镜)和一对偏转器(或一系列成对的偏转器).

设旋转对称磁透镜轴上磁场分布为 $B_0 = B_0(z)$, 则空间的磁场 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ 可以表示如下:

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{1}{2} x B_0' + \frac{1}{16} x(x^2 + y^2) B_0''' + \dots, \\ B_y &= -\frac{1}{2} y B_0' + \frac{1}{16} y(x^2 + y^2) B_0''' + \dots, \\ B_z &= B_0 - \frac{1}{4} (x^2 + y^2) B_0'' + \dots. \end{aligned} \quad (1.4)$$

撇号一律表示对 z 求微商.

设有 x 方向偏转器, 其中通有电流 I_x , 产生主要沿着 x 方向的磁场(它实际上引起 y 方向的偏转); 同样 y 方向偏转器, 通有电流 I_y , 产生主要沿着 y 方向的磁场(它实际上引起 x 方向的偏转). 采用一个基本上符合实际的假设, 即这对偏转器几何形状完全相同(只是通过的电流不同), 并以 xz, yz 平面为几何对称面, 则这对偏转器产生的磁场以 xz, yz 平面为对称面(或反对称面). 这样, 它们产生的磁场 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ 可以表示如下^[1-3]:

$$\begin{aligned} B_x &= \left(B_1 - \frac{1}{2} x^2 B_1'' - x^2 B_2 + y^2 B_2 \right) I_x + 2xy B_2 I_y + \dots, \\ B_y &= \left(B_1 - \frac{1}{2} y^2 B_1'' - y^2 B_2 + x^2 B_2 \right) I_y + 2xy B_2 I_x + \dots, \\ B_z &= x B_1' I_x + y B_1' I_y + \dots. \end{aligned} \quad (1.5)$$

这里 $B_1 = B_1(z)$ 是偏转器的轴上磁场分布, $B_2 = B_2(z)$ 是表征偏转场横向变化的场分布函数.

如果引进电流向量

$$\mathbf{l} = (I_x, I_y), \quad (1.6)$$

则作为一个整体来看磁透镜和偏转器的复合系统的合成磁场可以由(1.4)、(1.5)式相加而得, 并写成如下向量形式:

$$\mathbf{B}_\perp = (B_x, B_y) = -\frac{1}{2} B_0' \mathbf{r} + \frac{1}{16} B_0''' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} + B_1 \mathbf{l}$$

$$-\frac{1}{4} B_1''(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{l} \mp 2B_2xy\mathbf{l} \mp \left(\frac{B_1''}{4} + B_2\right)(x^2 - y^2)\mathbf{l} + \dots, \quad (1.7)$$

$$B_x = B_0 - \frac{1}{4} B_0''(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) + B_1'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}) - \dots,$$

式中负、正号 \mp , 对于 x 分量取上面的符号, 对于 y 分量取下面的符号.

在偏转线圈形状比较简单、没有铁磁体的情况下, 利用电磁学定律可以精确计算偏转磁场^[2,3]. 但是在偏转线圈形状比较复杂、存在铁磁体的情况下, 偏转磁场不便于计算, 需用实验测量. 近年来, 有些文献报道了精确测定磁场的工作^[6].

2) 普遍的轨迹方程

在非相对论情况下, 采用高斯单位制, 则纯磁场中电子运动方程为

$$m \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{\rho} = \frac{-e}{c_0} \left[\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \times \mathbf{B} \right], \quad (1.8)$$

式中 m , e 分别是电子的质量及其电荷的绝对值, c_0 是真空中光速; $\boldsymbol{\rho}$ 是电子运动的坐标向量, 实际上

$$\boldsymbol{\rho} = (x, y, z) = \mathbf{r} + k\mathbf{z}. \quad (1.9)$$

利用能量守恒关系式可将速度向量 $\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}$ 换成坐标向量的微商 $\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dz}$. 实际上, 利用上式有

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dz} = \mathbf{r}' + \mathbf{k}. \quad (1.10)$$

于是, 在纯磁场中, 即电位 V_0 为常数的情况下, 从运动方程 (1.8) 可以得出普遍的轨迹方程为

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\mathbf{k} + \mathbf{r}'}{\sqrt{1 + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')}} \right] + k[(\mathbf{k} + \mathbf{r}') \times \mathbf{B}] = 0, \quad (1.11)$$

式中 k 是一个常数,

$$k = \sqrt{\frac{e}{2mc_0^2 V_0}}. \quad (1.12)$$

在 (1.8), (1.11) 式中 \mathbf{B} 是空间磁场向量, 它们由 (1.7) 式给出,

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = \mathbf{B}_\perp + k\mathbf{B}_z. \quad (1.13)$$

将上式代入 (1.11) 式得到

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\mathbf{k} + \mathbf{r}'}{\sqrt{1 + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')}} \right] + k[\mathbf{B}_\perp - \mathbf{r}'B_z + \mathbf{r}' \times \mathbf{B}_\perp] = 0. \quad (1.14)$$

可见在 xy 平面中向量 \mathbf{r} 的轨迹方程为

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\mathbf{r}'}{\sqrt{1 + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')}} \right] + k[\mathbf{B}_\perp - \mathbf{r}'B_z] = 0, \quad (1.15)$$

而沿 z 轴方向 (即 \mathbf{k}) 的分量方程为

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')}} \right] + k[\mathbf{r}' \times \mathbf{B}_\perp] = 0. \quad (1.16)$$

利用上式可以将 (1.15) 式变成便于求解的形式:

$$\mathbf{r}'' + k\sqrt{1 + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')} [\mathbf{B}_\perp - \mathbf{r}' B_z - \mathbf{r}'(\mathbf{r}' \times \mathbf{B}_\perp)] = 0. \quad (1.17)$$

再将 (1.7) 式代入上式, 就得出复合系统中直到三级的轨迹方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' + k\sqrt{1 + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')} \left\{ -\frac{1}{2} B_0' \mathbf{r} + B_1 \mathbf{l} - B_0 \mathbf{r}' + \frac{1}{16} B_0'' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r} \right. \\ \left. - \frac{B_1''}{4} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{l} \mp 2B_2 xy \mathbf{l} \pm \left(\frac{B_1''}{4} + B_2 \right) (x^2 - y^2) \mathbf{l} + \frac{B_0''}{4} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}' \right. \\ \left. - B_1' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}) \mathbf{r}' - \frac{B_0'}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \mathbf{r}' - B_1 (\mathbf{r}' \times \mathbf{l}) \mathbf{r}' + \dots \right\} = 0. \quad (1.18) \end{aligned}$$

这个方程是我们以下讨论的出发点.

二、复合系统的高斯光学

在电子透镜中, 电子轨迹满足旁轴条件, 因此, \mathbf{r}, \mathbf{r}' 可以看成是一级小量. 在偏转器中, 满足小偏转的条件下, \mathbf{l} 可以看成是一级小量¹⁾. 本文中所谓的一、二、三、四级量都是相对于 $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{l}$ 而言的. 上述 (1.18) 式轨迹方程包含了一级、三级的量, 这样便可以计算高斯光学性质和三级象差.

1) 高斯轨迹方程

复合系统的轨迹方程 (1.18) 若忽略了三级以上的项便得到以下方程:

$$\mathbf{r}'' - k \left[B_0 \mathbf{r}' + \frac{1}{2} B_0' \mathbf{r} \right] = -k B_1 \mathbf{l}. \quad (2.1)$$

这就是复合系统的高斯轨迹方程. 它包括了正交向量 \mathbf{r}', \mathbf{r} , 不便于求解.

按照电子光学中通常的方法^[1,4,5], 引进一个旋转坐标系, 它相对于固定坐标系的转角为

$$\psi = \frac{1}{2} k \int_{z_a}^z B_0 dz, \quad (2.2a)$$

或者

$$\psi' = \frac{1}{2} k B_0. \quad (2.2b)$$

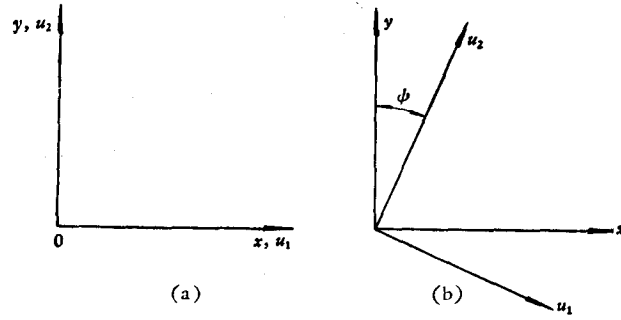
这样, 固定坐标系中的电子轨迹 $\mathbf{r} = (x, y)$ 和旋转坐标系中的轨迹 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 之间有如下关系(见图 2):

$$\begin{aligned} x &= u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi, \\ y &= u_1 \sin \psi + u_2 \cos \psi; \end{aligned} \quad (2.3)$$

或写成向量形式:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{u} \cos \psi + \mathbf{u}' \sin \psi); \quad (2.4a)$$

1) 更确切地说, 高斯电子轨迹到达 z_b 象平面时的偏转距离或偏转角度是一级小量.

图2 固定坐标系 (x, y) 和旋转坐标系 (u_1, u_2) 的关系(a) 在 $z = z_a$ 平面中; (b) 在 $z = z$ 平面中

以及

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{u}' \cos \phi + \mathbf{u}'' \sin \phi) + (-\mathbf{u} \sin \phi + \mathbf{u}' \cos \phi) \phi', \quad (2.4b)$$

$$\mathbf{r}'' = (\mathbf{u}'' \cos \phi + \mathbf{u}' \sin \phi) + 2(-\mathbf{u}' \sin \phi + \mathbf{u}'' \cos \phi) \phi' + (-\mathbf{u} \sin \phi + \mathbf{u}' \cos \phi) \phi'' - (\mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{u}' \sin \phi) \phi'^2. \quad (2.4c)$$

将 (2.4a), (2.4b), (2.4c) 式代入 (2.1) 式, 并利用 (2.2a) 和 (2.2b) 式得到

$$\mathbf{u}'' + \frac{1}{4} k^2 B_0^2 \mathbf{u} = -k B_1 [l \cos \phi + l' \sin \phi]. \quad (2.5)$$

这就是旋转坐标系中的高斯轨迹方程。

首先讨论齐次方程:

$$\mathbf{u}'' + \frac{1}{4} k^2 B_0^2 \mathbf{u} = 0. \quad (2.6)$$

它正是旋转对称磁透镜的高斯轨迹方程。它的一对线性无关的特解 r_a, r_b 满足以下初始条件:

$$r_a(z_a) = 0, \quad r_a'(z_a) = 1; \quad (2.7a)$$

$$r_b(z_a) = 1, \quad r_b'(z_a) = 0. \quad (2.7b)$$

显然有

$$r_a' r_b - r_a r_b' = [r_a' r_b - r_a r_b']_{z=z_a} = 1. \quad (2.8)$$

于是 (2.6) 式的通解可由 r_a, r_b 线性迭加而得

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'_a r_a + \mathbf{u}_a r_b, \quad (2.9)$$

其中

$$\mathbf{u}'_a = \mathbf{u}'|_{z=z_a}, \quad \mathbf{u}_a = \mathbf{u}|_{z=z_a}, \quad (2.10)$$

它们分别代表在 z_a 物平面处轨迹的初始斜率和初始位置。如果 z_a 处磁场为零 (即物平面没有浸没在磁场中^[5]), 那么

$$\mathbf{u}'_a = \mathbf{r}'|_{z=z_a} = (x'_a, y'_a), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{r}|_{z=z_a} = (x_a, y_a).$$

再来讨论存在偏转场时的非齐次方程 (2.5)。利用改变随意常数法, 只须将通解 (2.9) 式的两个常数向量 $\mathbf{u}'_a, \mathbf{u}_a$ 换成两个函数向量 \mathbf{V}, \mathbf{U} , 则 (2.5) 式的通解为

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} r_a + \mathbf{U} r_b, \quad (2.12)$$

式中

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}'_a + \mathbf{\Delta}', \quad (2.13)$$

$$\mathbf{\Delta}' = -k \int_{z_a}^z [\mathbf{I} \cos \phi + \mathbf{I} \sin \phi] B_1(\zeta) r_\beta(\zeta) d\zeta;$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}_a + \mathbf{\Delta}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{\Delta} = k \int_{z_a}^z [\mathbf{I} \cos \phi + \mathbf{I} \sin \phi] B_1(\zeta) r_\alpha(\zeta) d\zeta.$$

当给定 B_0, B_1 后, $\mathbf{\Delta}', \mathbf{\Delta}$ 都是可以求出的已知函数, 它们分别代表存在偏转场时轨迹初始斜率、初始位置所受的扰动量.

将 (2.12) 式对 z 求微商得到

$$\mathbf{u}' = \mathbf{V} r'_\alpha + \mathbf{U} r'_\beta. \quad (2.15)$$

以上 (2.12) — (2.15) 式给出了复合系统的高斯轨迹及其斜率, 它们可以用来计算高斯光学性质及三级象差.

2) 高斯光学性质

复合系统中, 象平面 z_b 由下式决定:

$$r_\alpha(z_b) = 0, \quad (2.16)$$

而横向放大率 m 则为

$$m = r_\beta(z_b). \quad (2.17)$$

这样, 在象平面上

$$\mathbf{u}(z_b) = m[\mathbf{u}_a + \mathbf{\Delta}(z_b)]. \quad (2.18)$$

可见, 物平面上同一点 (\mathbf{u}_a 相同) 发出的不同方向 (\mathbf{u}'_a 不同) 的高斯轨迹都会聚于同一点; 该点离开高斯象点 $m\mathbf{u}_a$ 的横向偏离称为高斯偏转, 它等于

$$\mathbf{u}(z_b) - m\mathbf{u}_a = m\mathbf{\Delta}(z_b); \quad (2.19a)$$

或者

$$\mathbf{\Delta}(z_b) = \frac{\mathbf{u}(z_b) - m\mathbf{u}_a}{m}. \quad (2.19b)$$

因此, $\mathbf{\Delta}(z_b)$ 是约化到物平面上的高斯偏转. 为了计算 $\mathbf{\Delta}(z_b)$, 将 (2.14) 式写成分量形式

$$\begin{aligned} \Delta_x &= kI_x \int_{z_a}^z \sin \phi B_1(\zeta) r_\alpha(\zeta) d\zeta - kI_y \int_{z_a}^z \cos \phi B_1(\zeta) r_\alpha(\zeta) d\zeta, \\ \Delta_y &= kI_x \int_{z_a}^z \cos \phi B_1(\zeta) r_\alpha(\zeta) d\zeta + kI_y \int_{z_a}^z \sin \phi B_1(\zeta) r_\alpha(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

在象平面上它们的值用

$$\begin{aligned} X_b &= \Delta_x|_{z_b} = kI_x \mu_1 - kI_y \mu_2, \\ Y_b &= \Delta_y|_{z_b} = kI_x \mu_2 + kI_y \mu_1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

来表示, 式中

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \int_{z_a}^{z_b} \sin \phi B_1(\zeta) r_\alpha(\zeta) d\zeta, \\ \mu_2 &= \int_{z_a}^{z_b} \cos \phi B_1(\zeta) r_\alpha(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.22)$$

于是偏转灵敏度可用以下向量 \mathbf{d} 表示:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \Delta(z_b)/|I|, \\ |\mathbf{d}| &= k(\mu_1^2 + \mu_2^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \arg \mathbf{d} &= \arctan(Y_b/X_b). \end{aligned} \quad (2.23)$$

模 $|\mathbf{d}|$ 代表单位电流引起的偏转, 辐角 $\arg \mathbf{d}$ 则给出偏转方位角.

由此可见, 在一级近似下, 偏转场不破坏磁透镜的理想成像性质, 而仅引起整个高斯象有相同的横向偏转, 且放大率保持常数, 因而没有畸变, 这就是复合系统的高斯光学性质.

利用 X_b, Y_b 可以把扰动量 Δ', Δ 表示成约化的量, 即

$$\begin{aligned} \Delta' &= (\Delta'_x, \Delta'_y) = (X_b X', Y_b Y'), \\ \Delta &= (\Delta_x, \Delta_y) = (X_b X, Y_b Y). \end{aligned} \quad (2.24)$$

以此代入 (2.13), (2.14) 式得到

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{u}'_a + \Delta' = (x'_a + X_b X', y'_a + Y_b Y'), \\ \mathbf{U} &= \mathbf{u}_a + \Delta = (x_a + X_b X, y_a + Y_b Y). \end{aligned} \quad (2.25)$$

将 (2.21) 式解出:

$$kI_x = \lambda_1 X_b + \lambda_2 Y_b, \quad kI_y = \lambda_1 Y_b - \lambda_2 X_b; \quad (2.26)$$

$$\lambda_1 = \mu_1/(\mu_1^2 + \mu_2^2), \quad \lambda_2 = \mu_2/(\mu_1^2 + \mu_2^2). \quad (2.27)$$

在计算象差时经常需要利用 (2.25)–(2.27) 各式.

三、复合系统的三级象差

从原则上说, 利用轨迹方程 (1.18), 将其中三级量用高斯轨迹及其斜率代入作为微扰, 采用改变随意常数法便可以求得三级象差. 但是这样算出的结果很繁复. 因此我们采用变分原理(费马原理)来计算复合系统的三级象差.

1) 复合系统的变分函数和欧拉方程

复合系统的变分函数为

$$F = F_0 + F_2 + F_4, \quad (3.1)$$

其中 F_0, F_2, F_4 是零级、二级、四级的变分函数. 定义 $F_0 = 1$; 又利用磁场的普遍表式可以求出:

$$F_2 = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) - \frac{1}{2} k B_0 (x y' - x' y) + k B_1 (x I_y - y I_x), \quad (3.2)$$

$$F_4 = F_{4C} + F_{4D},$$

$$F_{4C} = -\frac{1}{8} (x'^2 + y'^2)^2 + \frac{1}{16} k B_0'' (x^2 + y^2) (x y' - x' y), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} F_{4D} &= k I_x \left\{ -\frac{1}{2} B_1' x^2 y' + B_2 x^2 y - \frac{1}{3} B_2 y^3 \right\} \\ &\quad + k I_y \left\{ \frac{1}{2} B_1' x' y^2 - B_2 x y^2 + \frac{1}{3} B_2 x^3 \right\}, \end{aligned}$$

式中 F_{4c} 基本上对应于旋转对称磁场, F_{4D} 基本上对应于偏转场.

下述变分问题

$$\int_{z_0}^z F dz \rightarrow \text{极值}$$

的欧拉方程

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\partial(F_2 + F_4)}{\partial \mathbf{r}'} \right] - \frac{\partial(F_2 + F_4)}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (3.4)$$

就是直到三级的轨迹方程. 式中

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (3.5)$$

若将 (3.2), (3.3) 式代入 (3.4) 式中, 不难验证 (3.4) 和 (1.18) 式完全相同.

现在利用变分原理来计算三级象差. 要把 F_2, F_4 中的 $x, y; x', y'$ 用 \mathbf{u}, \mathbf{u}' 表示, 先引进一个描写高斯轨迹旋转的向量

$$\mathbf{W} = (\cos \phi, -\sin \phi), \quad (3.6)$$

于是 (2.3) 式可以写成

$$x = \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}, \quad y = \mathbf{W} \times \mathbf{u}; \quad (3.7)$$

$$x' = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u}') - (\mathbf{W} \times \mathbf{u})\phi', \quad y' = (\mathbf{W} \times \mathbf{u}') + (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u})\phi'. \quad (3.8)$$

将以上各式代入 (3.2), (3.3) 式中, 经过繁复的计算, 得到了旋转坐标系中向量形式的变分函数

$$F_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}') - \frac{1}{8} k^2 B_0^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + k B_1 \mathbf{u} \times [l \cos \phi - l \sin \phi], \quad (3.9)$$

$$-F_{4c} = \frac{1}{4} L (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{1}{2} M (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}') + \frac{1}{8} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}')^2 \\ + P (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + Q (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}') (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + M (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')^2, \quad (3.10)$$

式中 L, M, P, Q 就是 W. Glaser^[1] 引进的旋转对称磁透镜的四级变分函数的系数, 其表达式如下:

$$L = \frac{1}{32} k B_0 [k^3 B_0^3 - 4k B_0''], \quad M = \frac{1}{8} k^2 B_0^2, \quad (3.11)$$

$$P = \frac{1}{16} [k^3 B_0^3 - k B_0''], \quad Q = \frac{1}{4} k B_0.$$

$$-F_{4D} = -k I_x \left\{ -\frac{1}{2} B_1' (\mathbf{W} \times \mathbf{u}') (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{1}{4} k B_0 B_1' (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u})^3 \right. \\ \left. + B_2 (\mathbf{W} \times \mathbf{u}) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{1}{3} B_2 (\mathbf{W} \times \mathbf{u})^3 \right\} \\ - k I_y \left\{ \frac{1}{2} B_1' (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u}') (\mathbf{W} \times \mathbf{u})^2 - \frac{1}{4} k B_0 B_1' (\mathbf{W} \times \mathbf{u})^3 \right. \\ \left. - B_2 (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{W} \times \mathbf{u})^2 + \frac{1}{3} B_2 (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u})^3 \right\}. \quad (3.12)$$

仿照 (3.4) 式, 在旋转坐标系中的轨迹方程为

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{u}'} \right) - \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{u}} = - \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{u}'} \right) - \frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{u}} \right] = -T_3. \quad (3.13)$$

利用(3.9)式可以看出,上式右边为零的齐次方程正是高斯轨迹方程(2.5).然后将上式右边的三级象差微扰函数 $(-T_3)$ 中的 \mathbf{u}, \mathbf{u}' 用(2.12), (2.15)式的高斯轨迹及斜率代入,则得到一个已知的函数 $(-T_{3g})(g$ 足标表示取高斯值).于是,

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{u}'} \right) - \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{u}} = -T_{3g}. \quad (3.14)$$

上式仍然用改变任意常数法求解,这样得到在任意平面 z 的三级象差 $\Delta \mathbf{u}_3$ 为

$$\Delta \mathbf{u}_3 = -r_\alpha \int_{z_a}^z T_{3g} r_\beta d\zeta + r_\beta \int_{z_a}^z T_{3g} r_\alpha d\zeta. \quad (3.15)$$

特别在象平面 z_b 处, $r_\alpha(z_b) = 0, r_\beta(z_b) = m$,于是该平面的三级象差为

$$\Delta \mathbf{u}_{3b} = m \int_{z_a}^{z_b} T_{3g} r_\alpha d\zeta. \quad (3.16)$$

再将(3.13)式的 T_3 代入上式得

$$\Delta \mathbf{u}_{3b} = m \int_{z_a}^{z_b} \left[\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{u}'} \right) - \frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{u}} \right]_g r_\alpha d\zeta. \quad (3.17)$$

进行部分积分,注意到 $r_\alpha(z_a) = r_\alpha(z_b) = 0$,则

$$\frac{\Delta \mathbf{u}_{3b}}{m} = - \int_{z_a}^{z_b} \left(\frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{u}'} r_\alpha + \frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{u}} r_\alpha \right)_g d\zeta. \quad (3.18)$$

从(2.12), (2.15)式可见

$$r'_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}'} + r_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}}. \quad (3.19)$$

以此代入(3.18)式得到

$$\frac{\Delta \mathbf{u}_{3b}}{m} = - \int_{z_a}^{z_b} \left[\frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{V}} \right]_g d\zeta. \quad (3.20)$$

$\frac{\Delta \mathbf{u}_{3b}}{m}$ 是象平面上三级象差 $\Delta \mathbf{u}_{3b}$ 约化到物平面上的值.上式是计算三级象差的基本公式.

2) 计算 $-F_{4c}$ 及 $-\frac{\partial F_{4c}}{\partial \mathbf{V}}$ 代表的三级象差

现将(2.12), (2.15)式的高斯轨迹及斜率代入(3.3)式的 F_{4c} 中得到

$$\begin{aligned} -F_{4c} = & \frac{1}{4} A(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})^2 + \frac{1}{4} B(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})^2 + \frac{1}{2} C(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})^2 \\ & + \frac{1}{2} D(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) + E(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) \\ & + F(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + c(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \\ & + e(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) + f(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{U} \times \mathbf{V}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中 A, B, C, \dots, c, e, f 等系数如下所示¹⁾:

$$A = Lr'_\beta + 2Mr'_\beta r_\beta + \frac{1}{2} r'_\beta,$$

1) A, B, C, \dots, c, e, f 在 $[z_a, z_b]$ 上的积分就是 Glaser^[1] 引进的旋转对称磁透镜的三级象差系数.

$$\begin{aligned}
B &= Lr_a^4 + 2Mr_a^2r_a'^2 + \frac{1}{2}r_a'^4, \\
C &= 2\left[Lr_\beta^2r_a^2 + 2Mr_\beta r_a r_\beta' r_a' + \frac{1}{2}r_a'^2 r_\beta'^2 - M\right], \\
D &= Lr_\beta^2r_a^2 + Mr_\beta^2r_a'^2 + Mr_\beta'^2r_a^2 + \frac{1}{2}(r_a'r_\beta')^2 + 2M, \\
E &= Lr_\beta^3r_a + Mr_\beta r_\beta'(r_\beta r_a)' + \frac{1}{2}(r_\beta')^3r_a', \\
F &= Lr_\beta r_a^3 + Mr_\beta r_a'(r_\beta r_a)' + \frac{1}{2}(r_a')^3r_\beta', \\
c &= 2(Pr_\beta r_\beta' + Qr_a'r_\beta'), \quad c = Pr_\beta^2 + Q(r_\beta')^2, \\
f &= Pr_a^2 + Q(r_a')^2.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

在求梯度 $-\frac{\partial F_{4c}}{\partial \mathbf{V}}$ 时利用到以下关系式:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) = 2\mathbf{V}, \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) &= \mathbf{U}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \underline{\mathbf{U}}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

用矩阵形式写出求梯度的结果如下:

$$-\frac{\partial F_{4c}}{\partial \mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \times \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} B & F & f \\ 2F & C & c \\ 2f & c & 0 \\ D & E & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

$[\|M_{m \times n}\|]$ 表示 $m \times n$ 的矩阵, $[\|M_{m \times n}\|]^*$ 表示它的转置矩阵. 由 (3.20) 式可知, 将 (3.24) 式的每项在 $[z_a, z_b]$ 上求积分即得到 $-F_{4c}$ 所对应的象差. 定义 $\{[\|M\|]\}_a^b$ 或 $[\|M\|]_a^b$ 表示对该矩阵的每项在 $[z_a, z_b]$ 上求积分.

(3.24) 式中的 \mathbf{V}, \mathbf{U} 用 (2.25) 式代入, 经过繁复的计算, 将结果按照 (x_a, y_a, x_b, y_b) 的不同方次分类如下:

(1) 旋转对称象差

它们和 X_b, Y_b 无关, 包括以下各项:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}'_a \cdot \mathbf{u}'_a \\ \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}'_a \\ \mathbf{u}_a \times \mathbf{u}'_a \\ \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} B & F & f \\ 2F & C & c \\ 2f & c & 0 \\ D & E & e \end{bmatrix}_a^b \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_a \\ \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_a \end{bmatrix}, \tag{3.25}$$

其中 $\int_{z_a}^{z_b} B dz$ 是球差系数; $\int_{z_a}^{z_b} F dz, \int_{z_a}^{z_b} f dz$ 是彗差系数; $\int_{z_a}^{z_b} C dz, \int_{z_a}^{z_b} D dz, \int_{z_a}^{z_b} c dz$ 是场曲象散系数; $\int_{z_a}^{z_b} E dz, \int_{z_a}^{z_b} e dz$ 是畸变系数; 它们和 Glaser^[1] 的公式一致.

(2) 旋转对称场和偏转场相互作用的象差

现在先讨论这种象差的 x 方向分量 (y 方向分量下面再说). 下面引进几个矩阵 (参看附录中 (附 1), (附 2) 两式):

$$\begin{aligned}
 [M_{10 \times 3}] &= \begin{bmatrix} B & F & -f \\ B & F & -f \\ 0 & 0 & 0 \\ 2F & C & -c \\ 2F & C & -c \\ -2f & -c & 0 \\ 2f & c & 0 \\ D & E & -e \\ D & E & -e \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [M_{8 \times 10}] &= \begin{bmatrix} 2X' & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2Y' & 0 & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y' & 0 & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X' & 0 & 0 & 0 & 2X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y' & 0 & 0 & 0 & 2Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X' & 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y' & 0 & 0 & Y \end{bmatrix}, \quad (3.26a, b) \\
 [M_{3 \times 10}] &= \begin{bmatrix} X'^2 & 0 & 0 & XX' & 0 & 0 & 0 & X^2 & 0 & 0 \\ 0 & Y'^2 & 0 & 0 & YY' & 0 & 0 & 0 & Y^2 & 0 \\ 0 & 0 & X'Y' & 0 & 0 & X'Y & Y'X & 0 & 0 & XY \end{bmatrix}, \\
 [M_{3 \times 2}] &= \begin{bmatrix} X' & 0 \\ X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}. \quad (3.26c, d)
 \end{aligned}$$

由此可见,这些矩阵都是场分布、高斯轨迹和高斯偏转的函数,它们在 $[z_a, z_b]$ 上的积分就是各种象差系数.这种象差又分成三类.

(i) 偏转彗差以及类似的象差,即与 (x'_a, y'_a, x_a, y_a) 二次方及 (X_b, Y_b) 一次方成正比的项.这种象差系数中只有 (X, Y, X', Y') 的一次方项.包括以下各项:

$$\begin{aligned}
 & [x_a'^2, y_a'^2, x_a'y_a', x_a'x_a, y_a'y_a, x_a'y_a, y_a'x_a, x_a^2, y_a^2, x_a y_a] \{ [M_{10 \times 3}] \times [M_{3 \times 2}] \}_a^b \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \end{bmatrix} \\
 & + [x_a'X_b, y_a'Y_b, x_a'Y_b, y_a'X_b, x_aX_b, y_aY_b, y_aX_b, x_aY_b] \{ [M_{8 \times 10}] \times [M_{10 \times 3}] \}_a^b \begin{bmatrix} x_a' \\ x_a \\ y_a \end{bmatrix}. \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

(ii) 偏转场曲象散以及类似的象差,即与 (x'_a, y'_a, x_a, y_a) 一次方及 (X_b, Y_b) 二次方成正比的项.这种象差系数中只有 (X, Y, X', Y') 的二次方项.包括以下各项:

$$\begin{aligned}
 & [x_a'X_b, y_a'Y_b, x_a'Y_b, y_a'X_b, x_aX_b, y_aY_b, y_aX_b, x_aY_b] \{ [M_{8 \times 10}] \times [M_{10 \times 3}] \} \\
 & \times [M_{3 \times 2}]_a^b \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \end{bmatrix} + [X_b^2, Y_b^2, X_bY_b] \{ [M_{3 \times 10}] \times [M_{10 \times 3}] \}_a^b \begin{bmatrix} x_a' \\ x_a \\ y_a \end{bmatrix}. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

(iii) 偏转畸变, 即与 (x'_a, y'_a, x_a, y_a) 无关而只与 (X_b, Y_b) 的三次方成正比的项。这种象差系数中只有 (X, Y, X', Y') 的三次方项。包括以下各项:

$$[|X_b^3, Y_b^3, X_b Y_b|] \{ [|M_{3 \times 10}|] \times [|M_{10 \times 3}|] \times [|M_{3 \times 2}|] \}_a^b \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

以上 (3.27)–(3.29) 式只给出了这种象差的 x 方向分量, 至于 y 方向分量, 只须在这些公式中进行以下互换即可:

$$x_a \rightleftharpoons y_a, x'_a \rightleftharpoons y'_a, X_b \rightleftharpoons Y_b, X \rightleftharpoons Y, X' \rightleftharpoons Y'. \quad (3.30)$$

应该注意, 在象差系数中含有大写的 B, C, D, E 的项进行互换时不变号 (它们对应于各向同性象差), 而含有小写的 c, e, f 的项进行互换时还要变号 (它们对应于各向异性象差)。

3) 计算 $-F_{4D}$ 及 $-\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}}$ 代表的三级象差

为要化简 $-F_{4D}$, 我们利用 (2.12), (2.15) 式进行以下运算:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} \times \mathbf{u}' &= (\mathbf{W} \times \mathbf{V})r'_a + (\mathbf{W} \times \mathbf{U})r'_\beta, \\ \mathbf{W} \times \mathbf{u} &= (\mathbf{W} \times \mathbf{V})r_a + (\mathbf{W} \times \mathbf{U})r_\beta; \\ \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}' &= (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V})r'_a + (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U})r'_\beta, \\ \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} &= (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V})r_a + (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U})r_\beta. \end{aligned} \quad (3.31)$$

于是 (3.12) 式的 $-F_{4D}$ 可以改写如下:

$$\begin{aligned} -F_{4D} &= k \left\{ \left(I_x \frac{B_2}{3} + \frac{1}{4} I_y k B_0 B'_1 \right) (\mathbf{W} \times \mathbf{u})^3 - \left(I_y \frac{B_2}{3} - \frac{1}{4} I_x k B_0 B'_1 \right) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u})^3 \right\} \\ &\quad - k I_x \left\{ \left(B_2 r_a - \frac{B'_1}{2} r'_a \right) (\mathbf{W} \times \mathbf{V}) + \left(B_2 r_\beta - \frac{B'_1}{2} r'_\beta \right) (\mathbf{W} \times \mathbf{U}) \right\} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u})^2 \\ &\quad + k I_y \left\{ \left(B_2 r_a - \frac{B'_1}{2} r'_a \right) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V}) + \left(B_2 r_\beta - \frac{B'_1}{2} r'_\beta \right) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}) \right\} (\mathbf{W} \times \mathbf{u})^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

在求梯度 $-\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}}$ 时利用到以下关系式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} (\mathbf{W} \times \mathbf{u}') &= \underline{\mathbf{W}} r'_a, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} (\mathbf{W} \times \mathbf{u}) &= \underline{\mathbf{W}} r_a; \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u}') &= \mathbf{W} r'_a, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u}) &= \mathbf{W} r_a; \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} (\mathbf{W} \times \mathbf{V}) &= \underline{\mathbf{W}}, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V}) &= \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

求梯度的结果如下:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}} &= k \left\{ \left(I_x B_2 + \frac{3}{4} I_y k B_0 B'_1 \right) (\mathbf{W} \times \mathbf{u})^2 \underline{\mathbf{W}} r_a \right. \\ &\quad - \left. \left(I_y B_2 - \frac{3}{4} I_x k B_0 B'_1 \right) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u})^2 \mathbf{W} r_a \right\} - k I_x \left\{ \left(B_2 r_a - \frac{B'_1}{2} r'_a \right) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u})^2 \underline{\mathbf{W}} \right\} \\ &\quad + k I_y \left\{ \left(B_2 r_a - \frac{B'_1}{2} r'_a \right) (\mathbf{W} \times \mathbf{u})^2 \mathbf{W} \right\} + 2k I_y \left\{ \left(B_2 r_a - \frac{B'_1}{2} r'_a \right) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(B_2 r_\beta - \frac{B'_1 r'_\beta}{2} \right) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}) \left\{ (\mathbf{W} \times \mathbf{u}) \mathbf{W} r_\alpha - 2kI_x \left[\left(B_2 r_\alpha - \frac{B'_1 r'_\alpha}{2} \right) (\mathbf{W} \times \mathbf{V}) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(B_2 r_\beta - \frac{B'_1 r'_\beta}{2} \right) (\mathbf{W} \times \mathbf{U}) \right] (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{W} r_\alpha \right\} \quad (3.34)
\end{aligned}$$

不难看出,上式由两部分组成

$$-\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}} = -\left(\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}} \right)_I - \left(\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}} \right)_{II}, \quad (3.35)$$

第 I 部分是沿着 \mathbf{W} 方向的;第 II 部分是沿着 \mathbf{W} 方向的(留到下面再说). (3.34) 式中包含 \mathbf{W} 的项为

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}} \right)_I = & \mathbf{W} \left\{ k r_\alpha \left(\frac{3}{4} I_x k B_0 B'_1 - I_y B_2 \right) [(\mathbf{W} \cdot \mathbf{V})^2 r_\alpha^2 + 2(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{W} \cdot \mathbf{V}) r_\alpha r_\beta \right. \\
& + (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U})^2 r_\beta^2] + k I_y \left(B_2 r_\alpha - \frac{B'_1 r'_\alpha}{2} \right) [(\mathbf{W} \times \mathbf{V})^2 r_\alpha^2 + 2(\mathbf{W} \times \mathbf{U})(\mathbf{W} \times \mathbf{V}) r_\alpha r_\beta \\
& + (\mathbf{W} \times \mathbf{U})^2 r_\beta^2] - 2k I_x r_\alpha \left[\left(B_2 r_\alpha - \frac{B'_1 r'_\alpha}{2} \right) (\mathbf{W} \times \mathbf{V}) \right. \\
& \left. + \left(B_2 r_\beta - \frac{B'_1 r'_\beta}{2} \right) (\mathbf{W} \times \mathbf{U}) \right] [(\mathbf{W} \cdot \mathbf{V}) r_\alpha + (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}) r_\beta] \left. \right\}. \quad (3.36)
\end{aligned}$$

上式可写成矩阵形式

$$-\left(\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}} \right)_I = \begin{bmatrix} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V})^2 \\ (\mathbf{W} \times \mathbf{V})^2 \\ (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{W} \times \mathbf{V}) \\ (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}) \\ (\mathbf{W} \times \mathbf{V})(\mathbf{W} \times \mathbf{U}) \\ (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{W} \times \mathbf{U}) \\ (\mathbf{W} \times \mathbf{V})(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}) \\ (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U})^2 \\ (\mathbf{W} \times \mathbf{U})^2 \\ (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{W} \times \mathbf{U}) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} B_2 r_\alpha^2 & \frac{3}{4} k B_0 B'_1 r_\alpha^2 \\ \left(\frac{B'_1 r'_\alpha}{2} - B_2 r_\alpha \right) r_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 2 \left(\frac{B'_1 r'_\alpha}{2} - B_2 r_\alpha \right) r_\alpha^2 \\ 2 B_2 r_\alpha^2 r_\beta & \frac{3}{2} k B_0 B'_1 r_\alpha^2 r_\beta \\ 2 \left(\frac{B'_1 r'_\alpha}{2} - B_2 r_\alpha \right) r_\alpha r_\beta & 0 \\ 0 & 2 \left(\frac{B'_1 r'_\beta}{2} - B_2 r_\beta \right) r_\alpha^2 \\ 0 & 2 \left(\frac{B'_1 r'_\alpha}{2} - B_2 r_\alpha \right) r_\alpha r_\beta \\ B_2 r_\alpha r_\beta^2 & \frac{3}{4} k B_0 B'_1 r_\alpha r_\beta^2 \\ \left(\frac{B'_1 r'_\alpha}{2} - B_2 r_\alpha \right) r_\beta^2 & 0 \\ 0 & 2 \left(\frac{B'_1 r'_\beta}{2} - B_2 r_\beta \right) r_\alpha r_\beta \end{bmatrix} \\
\times \begin{bmatrix} -kI_y \\ kI_x \end{bmatrix} \mathbf{W}. \quad (3.37)$$

上式中第一个行矩阵可以利用附录的(附 3)式来表示,并引进下列矩阵:

$$\begin{aligned}
 & \left[M_{10 \times 10} \right] = \\
 & \begin{array}{cccccccccccccccc}
 \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{\sin 2\phi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\sin 2\phi & \sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{\sin 2\phi}{2} & \frac{\sin 2\phi}{2} & \frac{\sin 2\phi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} & -\frac{\sin 2\phi}{2} & -\frac{\sin 2\phi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin 2\phi}{2} & \frac{\sin 2\phi}{2} & \cos^2 \phi & \cos^2 \phi & -\sin^2 \phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin 2\phi}{2} & \frac{\sin 2\phi}{2} & -\sin^2 \phi & -\sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{\sin 2\phi}{2} & \frac{\sin 2\phi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 & 0 & \frac{\sin 2\phi}{2} & -\frac{\sin 2\phi}{2} & \cos 2\phi & \cos 2\phi \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\phi & \sin 2\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

(3.37) 式第二个 10×2 的矩阵可以化简, 为此引进下列符号:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= B_2 r_a^i r_b^j, & g_{ij} &= B_1' r_a^i r_b^j, \\ H_{\alpha ij} &= \left(\frac{B_1'}{2} r_a^i - B_2 r_a \right) r_a^j r_b^i, & H_{\beta ij} &= \left(\frac{B_1'}{2} r_b^i - B_2 r_b \right) r_a^i r_b^j, \end{aligned} \quad (3.39)$$

于是

$$[|M_{10 \times 2}|] = \begin{bmatrix} G_{30} & \frac{3}{4} k B_0 g_{30} \\ H_{\alpha 20} & 0 \\ 0 & 2H_{\alpha 20} \\ 2G_{21} & \frac{3}{2} k B_0 g_{21} \\ 2H_{\alpha 11} & 0 \\ 0 & 2H_{\beta 20} \\ 0 & 2H_{\alpha 11} \\ G_{12} & \frac{3}{4} k B_0 g_{12} \\ H_{\alpha 02} & 0 \\ 0 & 2H_{\beta 11} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

(3.37) 式第三个列矩阵则可以利用 (2.26) 式表示如下:

$$\begin{bmatrix} -kI_y \\ kI_x \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_1/\lambda_2 \\ \lambda_1/\lambda_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

利用以上结果, (3.37) 式可以写成以下简洁形式(参看附录的(附3)式):

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}} \right)_I &= \begin{bmatrix} (x'_a + X_b X')^2 \\ (y'_a + Y_b Y')^2 \\ (x'_a + X_b X')(y'_a + Y_b Y') \\ (x'_a + X_b X')(x_a + X_b X) \\ (y'_a + Y_b Y')(y_a + Y_b Y) \\ (x'_a + X_b X')(y_a + Y_b Y) \\ (y'_a + Y_b Y')(x_a + X_b X) \\ (x_a + X_b X)^2 \\ (y_a + Y_b Y)^2 \\ (x_a + X_b X)(y_a + Y_b Y) \end{bmatrix}^* \\ &\quad \times [|M_{10 \times 10}|] \times [|M_{10 \times 2}|] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_1/\lambda_2 \\ \lambda_1/\lambda_2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \end{bmatrix} \lambda_2 \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

上式中头一个行矩阵还可以利用附录中的(附2)式进一步展开.

(3.34) 式中包含 \mathbf{W} 的项, 即 $-\left(\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}}\right)_{II}$ 的部分, 可以由 (3.42) 式按照 (3.30) 式进行互换而得. 值得注意, 在象差系数中含有大写的 G_{ij} , $H_{\alpha ij}$, $H_{\beta ij}$ 的项进行互换时不变号(它们对应于各向同性象差), 而含有小写的 g_{ij} 的项进行互换时还要变号(它们对应于各向异性象差).

最后将 $-\left(\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}}\right)_I$, $-\left(\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}}\right)_{II}$ 相加, 并按照附录的(附 2), (附 3) 两式展开, 将展式的各项在 $[z_a, z_b]$ 上求积分, 即可得出偏转场的象差. 这种象差的分类和第三节中 2) 部分相仿.

至此, 只要把本节中 2), 3) 两部分的象差相加就得到旋转对称磁透镜和偏转器的复合系统的全部三级象差. 我们所得的三级象差的普遍公式可以过渡为各种特殊情况. 例如, 当不存在偏转场时, 即 $B_1 = B_2 = 0$, 则上述公式给出旋转对称磁透镜象差, 和文献[1]的结果一致. 其次, 当不存在旋转对称场时, 即 $B_0 = 0$, 则上述公式给出单纯的偏转场象差, 和文献[2, 3]的结果一致. 对于复合系统, 当 $\mathbf{u}_a = 0$ (即 $x_a = y_a = 0$) 时, 上述公式给出轴上轨迹的象差, 和文献[4]的结果一致; 当 $\mathbf{u}'_a = 0$ (即 $x'_a = y'_a = 0$) 时, 上述公式给出主轨迹的象差. 可见, 我们得到的三级象差公式具有较大的普遍性, 即能概括文献上已有的结果, 并作出了新的推广.

四、单纯的磁偏转系统的象差

现在讨论不存在旋转对称磁透镜 (即 $B_0 = 0$) 时单纯的磁偏转系统的象差.

1) 高斯轨迹和高斯偏转

从 (2.1) 式出发, 令 $B_0 = 0$, 得到单纯的磁偏转系统的高斯轨迹方程

$$\mathbf{r}'' = -k B_1 \mathbf{I}. \quad (4.1a)$$

对应的齐次方程为

$$\mathbf{r}'' = 0, \quad (4.1b)$$

它的一对线性无关的特解可以选为

$$r_\alpha(z) = (z - z_b), \quad r_\beta(z) = 1. \quad (4.2)$$

$r_\alpha(z)$, $r_\beta(z)$ 满足以下初始条件和边界条件:

$$r_\alpha(z_a) = z_a - z_b, \quad r_\alpha(z_b) = 0, \quad r'_\alpha(z_a) = r'_\alpha(z_b) = 1; \quad (4.3a)$$

$$r_\beta(z_a) = r_\beta(z_b) = 1, \quad r'_\beta(z_a) = r'_\beta(z_b) = 0, \quad (4.3b)$$

其中 z_b 是偏转系统的屏平面(象平面).

于是齐次方程 (4.1b) 的通解为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_b + \mathbf{r}'_b(z - z_b), \quad (4.4)$$

从而非齐次方程 (4.1a) 的通解为

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_b + \mathbf{\Delta}) + (\mathbf{r}'_b + \mathbf{\Delta}')(z - z_b). \quad (4.5)$$

仿照第二节中 1) 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_b + \mathbf{\Delta} &= (x_b + X_b X, y_b + Y_b Y), \\ \mathbf{r}'_b + \mathbf{\Delta}' &= (x'_b + X_b X', y'_b + Y_b Y'), \end{aligned} \quad (4.6)$$

式中

$$\begin{aligned} X_b X &= -k I_y \int_{z_a}^z B_1(\zeta)(\zeta - z_b) d\zeta, \\ Y_b Y &= k I_x \int_{z_a}^z B_1(\zeta)(\zeta - z_b) d\zeta, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} X_b X' &= k I_y \int_{z_a}^{z_b} B_1(\zeta) d\zeta, \\ Y_b Y' &= -k I_x \int_{z_a}^{z_b} B_1(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

在 $z = z_b$ 平面的高斯偏转为

$$\begin{aligned} X_b &= -k I_y \int_{z_a}^{z_b} B_1(\zeta) (\zeta - z_b) d\zeta, \\ Y_b &= k I_x \int_{z_a}^{z_b} B_1(\zeta) (\zeta - z_b) d\zeta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

总之,将第二节中 1) 部分结果和本节结果对比,不难看出,从复合系统过渡为单纯的磁偏转系统只须注意到以下变换:

$$x'_a \rightarrow x'_b, \quad y'_a \rightarrow y'_b, \quad x_a \rightarrow x_b, \quad y_a \rightarrow y_b; \quad (4.10)$$

以及由于 $B_0 = 0$, 因而有

$$\phi = 0, \quad \cos \phi = 1, \quad \sin \phi = 0. \quad (4.11)$$

利用本节以上各式就可以计算三级象差.

2) 三级象差

按照第三节中 1) 部分,单纯的磁偏转系统的三级象差为

$$\Delta \mathbf{u}_{3b} = - \int_{z_a}^{z_b} \left\{ \frac{\partial F_{4c}}{\partial \mathbf{V}} + \frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}} \right\}_g d\zeta. \quad (4.12)$$

这里 $m = r_\beta(z_b) = 1$, 因此上式中不出现 m .

按照第三节中 2) 部分计算 $-F_{4c}$, $-\frac{\partial F_{4c}}{\partial \mathbf{V}}$ 的公式,由于 $B_0 = 0$, 因此从 (3.22) 式有

$$B = \frac{1}{2}, \quad C = D = E = F = c = e = f = 0. \quad (4.13)$$

这样一来,这一部分象差中不为零的象差有以下各项:

$$\text{偏转彗差} \text{---} \frac{3}{2} x_b^2 X_b \int_{z_a}^{z_b} X' d\zeta + \frac{1}{2} y_b^2 X_b \int_{z_a}^{z_b} X' d\zeta + x_b y_b Y_b \int_{z_a}^{z_b} Y' d\zeta; \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \text{偏转场曲象散} \text{---} \frac{3}{2} x_b X_b^2 \int_{z_a}^{z_b} X'^2 d\zeta + \frac{1}{2} x_b Y_b^2 \int_{z_a}^{z_b} Y'^2 d\zeta + y_b Y_b X_b \int_{z_a}^{z_b} X' Y' d\zeta; \\ (4.15) \end{aligned}$$

$$\text{偏转畸变} \text{---} \frac{1}{2} X_b^3 \int_{z_a}^{z_b} X'^3 d\zeta + \frac{1}{2} Y_b^3 \int_{z_a}^{z_b} Y'^3 d\zeta. \quad (4.16)$$

按照第三节中 3) 部分计算 $-F_{4D}$, $-\frac{\partial F_{4D}}{\partial \mathbf{V}}$ 的公式,由于 $B_0 = 0$, $\phi = 0$, 因此有

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 / \int_{z_a}^{z_b} B_1(\zeta) (\zeta - z_b) d\zeta, \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & -\lambda_1/\lambda_2 \\ \lambda_1/\lambda_2 & 1 \end{array} \right] = 1; \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{W} = (1, 0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{W} = (0, 1) = \mathbf{j}, \quad [|M_{10 \times 10}|] = 1; \quad (4.18)$$

$$[|M_{10 \times 2}|] = \begin{bmatrix} G_{30} & 0 \\ H_{\alpha 20} & 0 \\ 0 & 2H_{\alpha 20} \\ 2G_{21} & 0 \\ 2H_{\alpha 11} & 0 \\ 0 & 2H_{\beta 20} \\ 0 & 2H_{\alpha 11} \\ G_{12} & 0 \\ H_{\alpha 02} & 0 \\ 0 & 2H_{\beta 11} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

这样一来,这一部分象差中不为零的象差有以下各项(并须按(4.10)式进行变换):

$$\begin{aligned} \text{偏转彗差} & \text{——} [|x_b'^2, y_b'^2, x_b' y_b', x_b' x_b, y_b' y_b, x_b' y_b, y_b' x_b, x_b^2, y_b^2, x_b y_b|] \\ & \times \lambda_2 \times [|M_{10 \times 2}|]_0^6 \times \left[\begin{array}{c} X_b \\ Y_b \end{array} \right]; \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \text{偏转场曲象散} & \text{——} [|x_b' X_b, y_b' Y_b, x_b' Y_b, y_b' X_b, x_b X_b, y_b Y_b, y_b X_b, x_b Y_b|] \\ & \times \lambda_2 \times \{ [|M_{8 \times 10}|] \times [|M_{10 \times 2}|] \}_0^6 \times \left[\begin{array}{c} X_b \\ Y_b \end{array} \right]; \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\text{偏转畸变} \text{——} [|X_b^3, Y_b^3, X_b Y_b|] \times \lambda_2 \times \{ [|M_{3 \times 10}|] \times [|M_{10 \times 2}|] \}_0^6 \times \left[\begin{array}{c} X_b \\ Y_b \end{array} \right]. \quad (4.22)$$

以上(4.14)–(4.16)和(4.20)–(4.22)六个公式合起来给出了全部的偏转象差.但是,它们只是三级象差 $\Delta u_{3,b}$ 的 x 方向分量,至于 y 方向分量,只须在这些公式中按(3.30)式进行互换而得.通过验算,不难看出本节得出的公式和文献[2,3]的结果一致.

五、结 论

“认识从实践始,经过实践得到了理论的认识,还须再回到实践去.”以上我们得到了复合系统普遍的三级象差.曾经在电子计算机上对偏转象差作了初步计算.表明本文为计算各种电子束管和电子光学仪器中的偏转系统的高斯光学性质和三级象差提供了较大的可能性.

第一,给出了复合系统场和轨迹的普遍表式以及变分函数.

第二,采用了向量形式描写电子轨迹,讨论了复合系统的高斯光学性质.

第三,运用变分原理(费马原理)计算复合系统的三级象差,它们用矩阵形式表示.形式简洁,便于使用电子计算机进行数值计算.

第四,综上所述,本文研究了普遍的复合系统,概括了文献上已有的结果,并作了较完整的论述和严格的计算.

第五,本文的研究方法和得到的结果可以推广到静电复合系统.本文限于讨论 x, y 磁偏转器几何形状相同的情况,但是不难推广到 x, y 磁偏转器形状不同的情况.

附 录

首先将第三节中 2) 部分的 (3.24) 式展开如下:

$$-\frac{\partial F_{aC}}{\partial V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \times \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} B & F & f \\ 2F & C & c \\ 2f & c & 0 \\ D & E & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x'_a + X_b X')^2 \\ (y'_a + Y_b Y')^2 \\ (x'_a + X_b X')(y'_a + Y_b Y') \\ (x'_a + X_b X')(x_a + X_b X) \\ (y'_a + Y_b Y')(y_a + Y_b Y) \\ (x'_a + X_b X')(y_a + Y_b Y) \\ (y'_a + Y_b Y')(x_a + X_b X) \\ (x_a + X_b X)^2 \\ (y_a + Y_b Y)^2 \\ (x_a + X_b X)(y_a + Y_b Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & F & f \\ B & F & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 2F & C & c \\ 2F & C & c \\ -2f & -c & 0 \\ 2f & c & 0 \\ D & E & e \\ D & E & e \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} (x'_a + X_b X') \\ (x_a + X_b X) \\ -(y_a + Y_b Y) \end{bmatrix} \mathbf{i} + \begin{bmatrix} (y'_a + Y_b Y') \\ (y_a + Y_b Y) \\ (x_a + X_b X) \end{bmatrix} \mathbf{j} \right\}. \quad (\text{附 1})$$

上式中头一个行矩阵可以展开如下:

$$\begin{bmatrix} (x'_a + X_b X')^2 \\ (y'_a + Y_b Y')^2 \\ (x'_a + X_b X')(y'_a + Y_b Y') \\ (x'_a + X_b X')(x_a + X_b X) \\ (y'_a + Y_b Y')(y_a + Y_b Y) \\ (x'_a + X_b X')(y_a + Y_b Y) \\ (y'_a + Y_b Y')(x_a + X_b X) \\ (x_a + X_b X)^2 \\ (y_a + Y_b Y)^2 \\ (x_a + X_b X)(y_a + Y_b Y) \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} x_a'^2 \\ y_a'^2 \\ x_a' y_a' \\ x_a' x_a \\ y_a' y_a \\ x_a' y_a \\ y_a' x_a \\ x_a^2 \\ y_a^2 \\ x_a y_a \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} 2x_a' X_b X' \\ 2y_a' Y_b Y' \\ x_a' Y_b Y' + y_a' X_b X' \\ x_a' X_b X + x_a X_b X' \\ y_a' Y_b Y + y_a Y_b Y' \\ x_a' Y_b Y + y_a X_b X' \\ y_a' X_b X + x_a Y_b Y' \\ 2x_a X_b X \\ 2y_a Y_b Y \\ x_a Y_b Y + y_a X_b X \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} X_b^2 X'^2 \\ Y_b^2 Y'^2 \\ X_b Y_b X' Y' \\ X_b^2 X X' \\ Y_b^2 Y Y' \\ X_b Y_b X' Y \\ X_b Y_b Y' X \\ X_b^2 X^2 \\ Y_b^2 Y^2 \\ X_b Y_b X Y \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} x_a'^2 \\ y_a'^2 \\ x_a' y_a' \\ x_a' x_a \\ y_a' y_a \\ x_a' y_a \\ y_a' x_a \\ x_a^2 \\ y_a^2 \\ x_a y_a \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} x_a' X_b \\ y_a' Y_b \\ x_a' Y_b \\ y_a' X_b \\ x_a X_b \\ y_a Y_b \\ y_a X_b \\ x_a Y_b \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 2X' & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2Y' & 0 & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y' & 0 & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X' & 0 & 0 & 0 & 2X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y' & 0 & 0 & 0 & 2Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X' & 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y' & 0 & 0 & Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_b^2 \\ Y_b^2 \\ X_b Y_b \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} X'^2 & 0 & 0 & X X' & 0 & 0 & 0 & X^2 & 0 & 0 \\ 0 & Y'^2 & 0 & 0 & Y Y' & 0 & 0 & 0 & Y^2 & 0 \\ 0 & 0 & X' Y' & 0 & 0 & X' Y & Y' X & 0 & 0 & X Y \end{bmatrix}. \quad (\text{附 2})$$

其次利用 (2.25) 式, 并注意到 (3.6) 式, 可以将 (3.37) 式中头一个行矩阵展开如下:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V})^2 \\ (\mathbf{W} \times \mathbf{V})^2 \\ (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{W} \times \mathbf{V}) \\ (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}) \\ (\mathbf{W} \times \mathbf{V})(\mathbf{W} \times \mathbf{U}) \\ (\mathbf{W} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{W} \times \mathbf{U}) \\ (\mathbf{W} \times \mathbf{V})(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}) \\ (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U})^2 \\ (\mathbf{W} \times \mathbf{U})^2 \\ (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{W} \times \mathbf{U}) \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} (x'_a + X_b X')^2 \\ (y'_a + Y_b Y')^2 \\ (x'_a + X_b X')(y'_a + Y_b Y') \\ (x'_a + X_b X')(x_a + X_b X) \\ (y'_a + Y_b Y')(y_a + Y_b Y) \\ (x'_a + X_b X')(y_a + Y_b Y) \\ (y'_a + Y_b Y')(x_a + X_b X) \\ (x_a + X_b X)^2 \\ (y_a + Y_b Y)^2 \\ (x_a + X_b X)(y_a + Y_b Y) \end{bmatrix}^*$$

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{\sin 2\phi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\sin 2\phi & \sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{\sin 2\phi}{2} & \frac{\sin 2\phi}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} & -\frac{\sin 2\phi}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin 2\phi}{2} & \frac{\sin 2\phi}{2} & \cos^2 \phi & -\sin^2 \phi & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin 2\phi}{2} & \frac{\sin 2\phi}{2} & -\sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{\sin 2\phi}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\phi & \sin 2\phi & \cos 2\phi
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad .(\text{附}3)$$

参 考 文 献

- [1] W. Glaser, *Grundlagen der Elektronenoptik* (1952), Springer, Wien.
 [2] J. Haantjes, G. J. Lubben, *Philips Res. Rep.*, **12** (1957), 46 *ibid.*, **14** (1959), 65.
 [3] J. Kaashoek, *Philips Res. Rep. Sppul.*, (1968), No. 11.
 [4] E. Munro, *Optik*, **39** (4) (1974), 450.
 [5] 西门纪业, 复合浸没物镜的电子光学性质和象差理论, *物理学报*, **13** (1957), 339.
 [6] R. Vonk, *Philips Techn. Rev.*, **32**(3/4) (1971), 61.

THE ELECTRON OPTICAL PROPERTIES AND ABERRATION THEORY OF A COMBINED MAGNETIC ROUND LENS AND DEFLECTION SYSTEM

XIMEN JI-YE

ABSTRACT

A combined magnetic round lens and deflection system with a superimposed field has been studied, and the power series expressions for the magnetic field is given. The electron trajectories are described in vector-form, and the Gaussian optical properties of the combined system discussed. By means of Fermat's principle general aberration formulae for the combined system have been derived. Equations for calculating the third-order aberration are given in compact matrix-form, hence they are suitable for numerical computation. This paper attempts to give a general theory of the combined system to provide guidance for designers of cathode ray tubes and electron optical instruments.