第 26 卷 第 1 期 物 理 学 报 Vol. 26, No. 1
1977 年 1 月 ACTA PHYSICA SINICA Jan., 1977

研究简报

无碰撞等离子体波导的色散关系*

陆 全 康
(复 旦 大 学)

一、引 言

本文将文献[1]的工作推广，讨论片形与矩形无碰撞等离子体中，玻耳兹曼-麦克斯韦方程组边值问题的一般解. 由引入以 δ 函数为核的积分变换，波矢空间中的多维色散关系均能化成一维的色散关系，使分析方法比文献[1]中采用的方法简易. 并使有界波导中的波型与无界等离子体波型间的联系明晰化. 得出在片形等离子体波导中除了存在相应于真空波导的 TE 波与 TM 波(E 波)外，还存在第二类 E 波，它与静电波密切相关. 其次讨论了矩形等离子体波导中的三类波型. 最后在普遍情况下，求得相对论性的色散关系；求得相对论性质量效应对色散关系的修正量.

二、边值问题的解

基本方程组为文献 [1] 的 (1.1)—(1.3) 式. 在矩形波导问题中，等离子体处于 $-\infty<x<\infty$, $-a/2<y<a/2$ 与 $-b/2<z<b/2$ 区域中. 设在 $y=\pm a/2$ 与 $z=\pm b/2$ 处的边界面为金属板，并忽略等离子体鞘层的影响，则电磁场符合的边界条件为 ($\boldsymbol{n}$ 为边界面的法向单位矢量)

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0. \tag{2.1}$$

粒子在边界面上的全反射要求有

$$\begin{aligned}
&f_0(x,\ \pm a/2,\ z;\ v_x,\ v_y,\ v_z)=f_0(x,\ \pm a/2,\ z;v_x,\ -v_y,\ v_z),\\
&f_0(x,\ y,\ \pm b/2;\ v_x,\ v_y,\ v_z)=f_0(x,\ y,\ \pm b/2;\ v_x,\ v_y,\ -v_z);\\
&f_1(x,\ \pm a/2,\ z;\ v_x,\ v_y,\ v_z;\ t)=f_1(x,\ \pm a/2,\ z;\ v_x,\ -v_y,\ v_z;\ t),\\
&f_1(x,\ y,\ \pm b/2;\ v_x,\ v_y,\ v_z;\ t)=f_1(x,\ y,\ \pm b/2;\ v_x,\ v_y,\ -v_z\ ;t).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

对于有界等离子体情况，由于存在边界条件，因而与无界情况下可以任意假设 $f_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ 的初始条件不同，不仅要求初始条件符合边界条件，还需验证由此解出的 $f_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ 在任何时刻均符合边界条件. 将文献[1]中的 (2.13) 式推广成

$$f_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},0)=\begin{cases}
\bar{f}(x,\ y,\ z;\ v_x,\ v_y,\ v_z;\ 0) & 0<y<a/2,\ 0<z<b/2;\\
\bar{f}(x,\ y,\ -z;\ v_x,\ v_y,\ -v_z;\ 0) & 0<y<a/2,\ -b/2<z<0;\\
\bar{f}(x,\ -y,\ z;\ v_x,-v_y,\ v_z;\ 0) & -a/2<y<0,\ 0<z<b/2;\\
\bar{f}(x,\ -y,\ -z;\ v_x,-v_y,-v_z;\ 0) & -a/2<y<0,\ -b/2<z<0.
\end{cases} \tag{2.3}$$

* 1975 年 11 月 5 日收到.

电磁场的初始条件为

$$\boldsymbol{E}(0)=0,\ \boldsymbol{B}(0)=0. \tag{2.4}$$

令[2]

$$f_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\left(\frac{2\pi m}{a}y+\frac{2\pi n}{b}z\right)}\int_{-\infty}^{\infty}f_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v},t)e^{ik_xx}dk_x, \tag{2.5}$$

与

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\left(\frac{2\pi m}{a}y+\frac{2\pi n}{b}z\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}_{k_x,m,n}(t)e^{ik_xx}dk_x,\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\left(\frac{2\pi m}{a}y+\frac{2\pi n}{b}z\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{B}_{k_x,m,n}(t)e^{ik_xx}dk_x.\end{aligned} \tag{2.6}$$

由此解得

$$f^p_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v})=\frac{\frac{e}{m}\left[\mathbf{I}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\boldsymbol{v}}+\frac{i\boldsymbol{k}}{p}\times\left(\frac{\partial f_0}{\partial\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{v}\right)\right]\cdot\boldsymbol{E}^p_{k_x,m,n}+f_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v},0)}{p+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}, \tag{2.7}$$

式中 $\boldsymbol{E}^p_{k_x,m,n}$ 与 $f^p_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v})$ 分别为 $\boldsymbol{E}_{k_x,m,n}(t)$ 与 $f_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v},t)$ 的拉普拉斯变换的象函数，$f_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v},0)$ 为 $f_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v},t)$ 的初始值．还求得

$$\mathbf{D}_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{E}^p_{k_x,m,n}=\frac{4\pi n_0ep}{c^2}\int\frac{\boldsymbol{v}f_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v},0)}{p+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}d\boldsymbol{v}, \tag{2.8}$$

式中

$$\mathbf{D}_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v})=\left(\frac{p^2}{c^2}+k^2\right)\mathbf{I}-\boldsymbol{kk}-\frac{\omega_p^2p}{c^2}\int\frac{\boldsymbol{v}\left[\mathbf{I}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\boldsymbol{v}}+\frac{i\boldsymbol{k}}{p}\times\left(\frac{\partial f_0}{\partial\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{v}\right)\right]}{p+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}d\boldsymbol{v}$$

与 (2.9)

$$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{\epsilon}_x+\frac{2\pi m}{a}\boldsymbol{\epsilon}_y+\frac{2\pi n}{b}\boldsymbol{\epsilon}_z,\ \mathbf{I}=\boldsymbol{\epsilon}_x\boldsymbol{\epsilon}_x+\boldsymbol{\epsilon}_y\boldsymbol{\epsilon}_y+\boldsymbol{\epsilon}_z\boldsymbol{\epsilon}_z.$$

以下证明符合初始条件(2.3)式的 $f_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$，在任何时刻均符合边界条件（2.2）式．由(2.9)与(2.3)式得出

$$\begin{aligned}\det\mathbf{D}_{k_x,m,n}(v_x,v_y,v_z)&=\det\mathbf{D}_{k_x,-m,-n}(v_x,-v_y,-v_z)=\det\mathbf{D}_{k_x,-m,n}(v_x,-v_y,v_z)\\&=\det\mathbf{D}_{k_x,m,-n}(v_x,v_y,-v_z),\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}f_{k_x,m,n}(v_x,v_y,v_z,0)&=f_{k_x,-m,-n}(v_x,-v_y,-v_z,0)=f_{k_x,-m,n}(v_x,-v_y,v_z,0)\\&=f_{k_x,m,-n}(v_x,v_y,-v_z;0).\end{aligned} \tag{2.11}$$

令

$$\boldsymbol{A}(k_x,m,n;\boldsymbol{v})\equiv\frac{4\pi n_0ep}{c^2}\int\frac{\boldsymbol{v}f_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v},0)}{p+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}d\boldsymbol{v}, \tag{2.12}$$

则有

$$\left\{\begin{aligned}A_x(k_x,m,n;\boldsymbol{v})&=A_x(k_x,-m,-n;v_x,-v_y,-v_z)=A_x(k_x,-m,n;v_x,-v_y,v_z)\\&=A_x(k_x,m,-n;v_x,v_y,-v_z),\\A_y(k_x,m,n;\boldsymbol{v})&=-A_y(k_x,-m,-n;v_x,-v_y,-v_z)=-A_y(k_x,-m,n;v_x,-v_y,v_z)\\&=A_y(k_x,m,-n;v_x,v_y,-v_z),\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} A_z(k_x, m, n; \boldsymbol{v}) &= -A_z(k_x, -m, -n; v_x, -v_y, -v_z) = A_z(k_x, -m, n; v_x, -v_y, v_z) \\ &= -A_z(k_x, m, -n; v_x, v_y, -v_z). \end{aligned}\right. \tag{2.13}$$

由(2.8)与(2.13)式得出

$$\begin{aligned} (E_x^p)_{k_x,m,n} &= (E_x^p)_{k_x,-m,-n} = (E_x^p)_{k_x,-m,n} = (E_x^p)_{k_x,m,-n}, \\ (E_y^p)_{k_x,m,n} &= -(E_y^p)_{k_x,-m,-n} = -(E_y^p)_{k_x,-m,n} = (E_y^p)_{k_x,m,-n}, \\ (E_z^p)_{k_x,m,n} &= -(E_z^p)_{k_x,-m,-n} = (E_z^p)_{k_x,-m,n} = -(E_z^p)_{k_x,m,-n}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

再由(2.7)式得

$$\begin{aligned} f_{k_x,m,n}^p(\boldsymbol{v}) &= f_{k_x,-m,-n}^p(v_x, -v_y, -v_z) = f_{k_x,-m,n}^p(v_x, -v_y, v_z) \\ &= f_{k_x,m,-n}^p(v_x, v_y, -v_z). \end{aligned} \tag{2.15}$$

由反演得出

$$\begin{aligned} f_{k_x,m,n}(\boldsymbol{v}, t) &= f_{k_x,-m,-n}(v_x, -v_y, -v_z; t) = f_{k_x,-m,n}(v_x, -v_y, v_z; t) \\ &= f_{k_x,m,-n}(v_x, v_y, -v_z; t). \end{aligned}$$

这样,由(2.5)式就得证

$$\begin{aligned} f_1(x, \pm a/2, z; v_x, v_y, v_z; t) &= f_1(x, \pm a/2, z; v_x, -v_y, v_z; t) \\ f_1(x, y, \pm b/2; v_x, v_y, v_z; t) &= f_1(x, y, \pm b/2; v_x, v_y, -v_z; t). \end{aligned}$$

三、片形等离子体波导的色散关系

对于片形等离子体($a \to \infty$),波导的色散关系

$$\det \mathbf{D}_{k_x,m,n} = 0 \tag{3.1}$$

化成

$$\begin{vmatrix} -\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2 - \frac{p^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2 p}{c^2} I_{xx} & \frac{\omega_p^2 p}{c^2} I_{xy} & \frac{\omega_p^2 p}{c^2} I_{xz} + k_x \frac{2\pi n}{b} \\ \frac{\omega_p^2 p}{c^2} I_{yx} & -\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2 - k_x^2 - \frac{p^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2 p}{c^2} I_{yy} & \frac{\omega_p^2 p}{c^2} I_{yz} \\ k_x \frac{2\pi n}{b} + \frac{\omega_p^2 p}{c^2} I_{zx} & \frac{\omega_p^2 p}{c^2} I_{zy} & \frac{\omega_p^2 p}{c^2} I_{zz} - k_x^2 - \frac{p^2}{c^2} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.2}$$

式中 ω_p 为等离子体频率,与

$$I_{jx} = \int \frac{v_j \left[\frac{\partial f_0}{\partial v_x} - \frac{i}{p} \frac{2\pi n}{b}\left(v_x \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial f_0}{\partial v_x}\right)\right]}{p + i\left(k_x v_x + \frac{2\pi n}{b} v_z\right)} d\boldsymbol{v},$$

$$I_{jy} = \int \frac{v_j \left[\frac{\partial f_0}{\partial v_y} - \frac{i}{p} k_x \left(v_y \frac{\partial f_0}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial f_0}{\partial v_y}\right) + \frac{i}{p} \frac{2\pi n}{b}\left(v_z \frac{\partial f_0}{\partial v_y} - v_y \frac{\partial f_0}{\partial v_z}\right)\right]}{p + i\left(k_x v_x + \frac{2\pi n}{b} v_z\right)} d\boldsymbol{v}, \tag{3.3}$$

$$I_{jz} = \int \frac{v_j \left[\frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{i}{p} k_x \left(v_x \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial f_0}{\partial v_x}\right)\right]}{p + i\left(k_x v_x + \frac{2\pi n}{b} v_z\right)} d\boldsymbol{v}. \quad (j = x, y, z)$$

当 f_0 是 v_y 的偶函数时，$I_{xy}=I_{yx}=I_{yz}=I_{zy}=0$. 色散关系分解成

1）TE 波[1]　E_y，B_x，B_z 异于零.

2）E 型波　E_I 波色散关系为

$$k_x^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2+\frac{p^2}{c^2}+\frac{\omega_p^2 p}{c^2}\int\frac{f_0(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v}}{p+i\left(k_xv_x+\frac{2\pi n}{b}v_z\right)}=0, \tag{3.4}$$

E_I 波中 E_x、E_z 与 B_y 异于零与

$$\frac{E_x}{E_z}=-\frac{2\pi n}{bk_x}. \tag{3.5}$$

E_{II} 波中仅有 E_x 与 E_z 异于零，色散关系为

$$1+\omega_p^2\int\frac{f_0(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v}}{\left[p+i\left(k_xv_x+\frac{2\pi n}{b}v_z\right)\right]^2}=0, \tag{3.6}$$

与

$$\frac{E_x}{E_z}=\frac{bk_x}{2\pi n}. \tag{3.7}$$

引入积分变换

$$F(u)=\iint_{-\infty}^{\infty}f_x(v_x)f_z(v_z)\delta\left(u-\frac{\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}{k_2}\right)d\boldsymbol{v}_2, \tag{3.8}$$

式中 $\boldsymbol{k}_2=k_x\boldsymbol{\epsilon}_x+(2\pi n/b)\boldsymbol{\epsilon}_z$，$\boldsymbol{v}_2=v_x\boldsymbol{\epsilon}_x+v_z\boldsymbol{\epsilon}_z$. TE 波的色散关系化成

$$\frac{\left[k_x^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2\right]c^2-\omega^2}{\omega_p^2}=-1-\int v_y^2f_ydv_y\int\frac{i\sqrt{k_x^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}\,F'(u)du}{p+i\sqrt{k_x^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}\,u}. \tag{3.9}$$

这样波矢空间中，二维形式的色散关系化成一维形式，可按文献[3]的方法分析，其结果与文献[1]一致. E_I 波色散关系化成

$$k_x^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2-\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\omega_p^2\omega}{c^2}\int\frac{F(u)du}{p+i\sqrt{k_x^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}\,u}=0. \tag{3.10}$$

除了以 $\sqrt{k_x^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}$ 代替波数 k 外，上式与无界等离子体的电磁波色散关系（文献[3]中(2.1)式）一致. 因而不论 $F(u)$ 采取什么形式，E_I 波总是稳定的. E_{II} 波的色散关系化成

$$1+\omega_p^2\int\frac{F(u)du}{\left[p+i\sqrt{k_x^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}\,u\right]^2}=0. \tag{3.11}$$

此时，除了以 $\sqrt{k_x^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}$ 代替波数 k 外. (3.11)式与静电波[4]色散关系一致，其稳定性可按文献[5]的方法分析.

四、矩形等离子体波导的色散关系

当 $f_0(\boldsymbol{v})$ 为麦克斯韦分布时，色散关系(3.1)式成为

$$\det\left\{\left(\frac{p^2}{c^2}+k^2\right)\mathbf{I}-\boldsymbol{kk}-\frac{\omega_p^2 p}{c^2}\int\frac{\boldsymbol{v}\left(\mathbf{I}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}}\right)}{p+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}d\boldsymbol{v}\right\}=0. \tag{4.1}$$

上式可分解成

$$\frac{p^2}{c^2}+k_x^2+\left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2+\frac{\omega_p^2 p}{c^2}\int\frac{f_0(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v}}{p+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}=0, \tag{4.2}$$

$$k_x\left[\frac{p^2}{c^2}+k_x^2+\left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2\right]+\frac{\omega_p^2 p}{c^2}\int\frac{k_x p+i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})v_x}{(p+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})^2}f_0(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v}=0, \tag{4.3}$$

与

$$1+\omega_p^2\int\frac{f_0(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v}}{(p+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})^2}=0. \tag{4.4}$$

引入积分变换[6]

$$F(u)=\iiint_{-\infty}^{\infty}f_0(\boldsymbol{v})\delta\left(u-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{k}\right)d\boldsymbol{v}, \tag{4.5}$$

色散关系(4.2)与(4.3)式均化成

$$\frac{p^2}{c^2}+\left[k_x^2+\left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2\right]+\frac{\omega_p^2 p}{c^2}\int\frac{F(u)du}{p+i\sqrt{k_x^2+\left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}\,u}=0. \tag{4.6}$$

即除了以 $\sqrt{k_x^2+\left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}$ 代替波数 k 外，这是电磁波色散关系. 同样，(4.4)式变换成

$$1+\omega_p^2\int\frac{F(u)du}{\left(p+i\sqrt{k_x^2+\left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}\,u\right)^2}=0. \tag{4.7}$$

除了以 $\sqrt{k_x^2+\left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}$ 代替波数 k 外，这是静电波色散关系. 这样就分析出矩形波导中三类波的性质，前二类波在片形波导中的情况，归结成 TE 与 E_I 波，而后者归结成 E_{II} 波.

五、相对论性的色散关系

在有界等离子体波导问题中，电子振荡的贡献是主要的. 当电子温度达到热核温度(10^7—10^8℃)时，有必要考察相对论效应的影响. 本节将前面的工作推广到相对论的情况. 其意义在于求解了相对论性玻耳兹曼-麦克斯韦方程组的边值问题，从而导得等离子

体波导的相对论性色散关系，得出相对论修正的数量级.

Clemmow 与 Wilson 首先给出在坐标、动量 (q_i, p_i) 空间中符合相对论协变的无碰撞玻耳兹曼方程[7]. Linhart[8] 指出把坐标、动量空间的方程转换成坐标、速度 (q_i, v_i) 空间中的方程后，通常更为有用. 文献[8]的 3.2 节中(2.1)式给出了粒子分布函数 $f(q_i, v_i, t)$ 符合的相对论性玻耳兹曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_k\frac{\partial f}{\partial q_k} + \frac{F_i}{m_0\gamma}\left(\delta_{ik} - \frac{v_iv_k}{c^2}\right)\frac{\partial f}{\partial v_k} = 0, \tag{5.1}$$

式中

$$F_i = -Q\frac{\partial\phi}{\partial q_i} - \frac{Q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{Q}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_i,$$

φ 为电磁场的标势，A_i 为矢势，$\boldsymbol{B}$ 为磁场强度，$Q = -e$ 为电子电荷与 c 为光速. 这里需要指出，用这个方程虽能直接求解等离子体动力学问题，但解决目前的问题不够方便. 原因是，按文献[8]的 3.2 节中的推算过程，$f'(q_ip_it)$ 是 (q_ip_i) 空间中的分布函数，粒子的密度为

$$n = \int f'(q_i, p_i, t)d\boldsymbol{p}. \tag{5.2}$$

当将自变量变成 (q_i, v_i, t) 后，关于 $f[q_i, v_i(\boldsymbol{p}), t]$，显然应有

$$n = \int f[q_i, v_i(\boldsymbol{p}), t]\frac{\partial(p_xp_yp_z)}{\partial(v_xv_yv_z)}d\boldsymbol{v}. \tag{5.3}$$

这里 $\partial(p_xp_yp_z)/\partial(v_xv_yv_z)$ 是雅可俾行列式. 由此可见，不适宜取文献[8]中的 $f[q_i$、$v_i(\boldsymbol{p}), t]$ 为 q_i, v_i 空间中的分布函数. 需令

$$\mathscr{F}(q_i, v_i, t) \equiv f(q_i, v_i, t)\frac{\partial(p_xp_yp_z)}{\partial(v_xv_yv_z)} = f(q_i, v_i, t)m_0^3\gamma^5 \tag{5.4}$$

为分布函数. 这里利用了文献[8](3.2)节中的(11)式

$$p_i = m_0v_i\gamma + \frac{Q}{c}A_i,\ \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

算出雅可俾行列式.

$\mathscr{F}(q_i, v_i, t)$ 所符合的方程可推导如下：将(5.1)式乘以 $m_0^3\gamma^5$，及利用等式

$$\nabla_v\cdot\left[m^3\gamma^5\frac{\boldsymbol{F}}{m_0\gamma}\cdot\left(\delta_{ik} - \frac{v_iv_k}{c^2}\right)\right] = 0, \tag{5.5}$$

即得出

$$\frac{\partial\mathscr{F}(q_i, v_i, t)}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot V\mathscr{F}(q_iv_it) + \nabla_v\cdot\left[\frac{\boldsymbol{F}}{m_0\gamma}\cdot\left(\delta_{ik} - \frac{v_iv_k}{c^2}\right)\mathscr{F}(q_iv_it)\right] = 0. \tag{5.6}$$

方程(5.6)是本节的出发点. 关于围绕平衡态的相对论性分布函数 $\mathscr{F}_0(\boldsymbol{v})$ 的扰动，令

$$\mathscr{F}(q_i, v_i, t) = \mathscr{F}_0(v) + \mathscr{F}_1(q_i, v_i, t). \tag{5.7}$$

$\mathscr{F}_1(q_i, v_i, t)$ 符合的线性化相对论性方程为

$$\frac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \mathscr{F}_1 - \frac{e}{m_0\gamma}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{vv}}{c^2}\right) \cdot \nabla_v \mathscr{F}_0 + \frac{5e}{m_0\gamma}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}}{c^2}\mathscr{F}_0 = 0, \tag{5.8}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为电场强度.

用与第二节类似的步骤，令 $\mathscr{F}^p_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})$ 为 $\mathscr{F}_1(q_i, v_i, t)$ 的傅里叶-拉普拉斯变换的象函数,解得

$$\mathscr{F}^p_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}) = \frac{e}{m_0\gamma}\frac{\left\{\left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{vv}}{c^2}\right)\cdot\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial \boldsymbol{v}} + \frac{i\boldsymbol{k}}{p}\times\left[\left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{vv}}{c^2}\right)\cdot\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial \boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{v}\right] - \frac{5\mathscr{F}_0}{c^2}\boldsymbol{v}\right\}\cdot\boldsymbol{E}^p_k}{p + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}} + \frac{\mathscr{F}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}, 0)}{p + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}. \tag{5.9}$$

关于一般的非各向同性的平衡分布 $\mathscr{F}_0(\boldsymbol{v})$，波导的相对论性色散关系为

$$\det\left|\left(\frac{p^2}{c^2} + k^2\right)\mathbf{I} - \boldsymbol{kk} - \frac{\omega_p^2 p}{c^2} \times \int \frac{\boldsymbol{v}\left\{\left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{vv}}{c^2}\right)\cdot\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial \boldsymbol{v}} + \frac{i\boldsymbol{k}}{p}\times\left[\left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{vv}}{c^2}\right)\cdot\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial \boldsymbol{v}}\right]\times\boldsymbol{v} - \frac{5\mathscr{F}_0\boldsymbol{v}}{c^2}\right\}}{\gamma(p + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}d\boldsymbol{v}\right| = 0, \tag{5.10}$$

式中 $\mathbf{I}$ 为单位张量. 当略去 $o(v^2/c^2)$ 的项后,此式化成第三节的非相对论结果(4.1)式.

为考察热核温度时,相对论质量效应的数量级，选择片形等离子体的 TE 波作典型分析. 由(5.10)式得出 TE 波色散关系为（设 l 为片形等离子体的厚度）

$$\begin{aligned}\frac{c^2\left[\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2 + k^2\right] + p^2}{\omega_p^2} &= \int\left[\frac{-v_y^2 v_x}{\gamma c^2}\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial v_x} + \frac{v_y}{\gamma}\left(1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right)\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial v_y} - \frac{v_y^2 v_z}{\gamma c^2}\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial v_z}\right]d\boldsymbol{v} \\ &+ \int\left\{\left[-ikv_y^2\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial v_x} - i\frac{2\pi n}{l}v_y^2\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial v_z} + i\left(kv_x + \frac{2\pi n}{l}v_z\right)\left(\frac{v_y^2 v_x}{c^2}\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial v_x} + \frac{v_y^3}{c^2}\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial v_y}\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left. + \frac{v_y^2 v_z}{c^2}\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial v_z} - \frac{5p}{c^2}v_y^2\mathscr{F}_0\right)\right]\Big/\gamma\left[p + i\left(kv_x + \frac{2\pi n}{l}v_z\right)\right]\right\}d\boldsymbol{v}.\end{aligned} \tag{5.11}$$

把这里的坐标 (x, y, z) 相应地换成 (z, x, y)，再取 $n = 0$，便化成文献[3]的 (3.1) 式. 由文献[3]的(3.3)式,把考虑一级相对论修正的平衡态分布函数取为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_0(\boldsymbol{v}) = &\frac{\frac{m_0}{2\pi kT_\perp}\left(\frac{m_0}{2\pi kT_\parallel}\right)^{1/2}}{1 + \frac{2kT_\perp}{m_0c^2} + \frac{11}{8}\frac{kT_\parallel}{m_0c^2} - \frac{3k\sqrt{T_\perp T_\parallel}}{2m_0c^2}} \\ &\times\left\{1 + \frac{5}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8c^2}\left[\frac{m_0}{kT_\perp}(v_y^2 + v_z^2)^2 + \frac{2m_0v_x^2(v_y^2 + v_z^2)}{k\sqrt{T_\perp T_\parallel}} + \frac{m_0}{kT_\parallel}v_x^4\right]\right\} \\ &\times\exp\left[-\frac{m_0(v_y^2 + v_z^2)}{kT_\perp} - \frac{mv_x^2}{kT_\parallel}\right].\end{aligned} \tag{5.12}$$

把(5.12)式代入(5.11)式，得出考虑一级相对论修正的 TE 波色散关系．依文献[3]同样方法，当只考虑

$$\left|kv_x + \frac{2\pi n}{l}v_z\right| < |p|$$

的波时，得到

$$\omega^2 - \left[k^2 + \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2\right]c^2 = \omega_p^2\left(1 - \frac{2kT_\perp}{m_0c^2} - \frac{kT_\parallel}{2m_0c^2}\right), \tag{5.13}$$

式中 ω 为振荡频率．因而垂直于波传播方向的相对论质量效应对色散关系的修正为 $kT_\perp/m_0c^2$(每一自由度)，而平行于波传播方向的修正为 $kT_\parallel/2m_0c^2$，即为前者的一半．关于各类波的色散关系以及朗道阻尼系数，不稳定波增长系数的计算结果表明，相对论质量效应仅对各项中的系数给出数量级为 kT/m_0c^2 的修正．在热核温度时，kT/m_0c^2 的数量级为 10^{-2}—10^{-1}．

参　考　文　献

[1] 徐正惠、陆全康，物理学报，**22** (1966)，844．
[2] M. J. Lighthill, 傅里叶分析与广义函数引论，科学出版社 (1965)．
[3] 陆全康，物理学报，**20** (1964)，289．
[4] Л. Ландау, *ЖЭТФ*, **16** (1946), 574.
[5] E. A. Jackson, *Phys. Fluids*, **3** (1960), 786.
[6] D. C. Montgomery and T. D. Tidman, Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill (1962).
[7] P. C. Clemmow and A. J. Wilson, *Proc. of Camb. Phil. Soc.*, **53** (1957), 222.
[8] J. G. Linhart, Plasma Physics, 3rd edition. (Euraton, 1969).

DISPERSION RELATIONS OF COLLISIONLESS PLASMA WAVE GUIDE

Lu Quan-kang
(*Futan University*)