

天线振子作为初值问题求解* 1)

中国科学院 物理研究所 天线计算组
计算技术研究所

提 要

根据计算实践和物理考虑,指出电磁场基本方程作为一阶双曲型偏微分方程组的初值问题,可以成为有效的天线振子数值计算方法。对于隐式差分格式,建议了一种交替方向追赶和外边界插值相结合的办法。讨论了圆柱对称振子的数值结果。

一、关于各种数值计算途径的一般考虑

单个天线振子的基本参数和辐射场,是分析复杂天线结构的基础。工程计算中往往先给定振子上的电流分布,再用推迟势的积分表达式求辐射场及振子参数。这种电流分布(例如常用的正弦分布)大体与实验一致,而其理论根据则是从三十年代以来发展的圆柱天线积分方程。直到最近,基本上尚未开辟其它严格计算途径。然而实践中不断出现新课题,例如复杂的振子形状、振子上套有介质或等离子体鞘层等情形,同时高速度、大容量电子计算机的发展又提供了新的可能性,使我们能重新考虑天线振子辐射场的计算方法。

在叙述初值问题之前,我们先就各种可能途径作一般讨论。这些讨论在一定程度上也适用于其它非天线类型的电磁场数值计算。同一个物理问题,可以有不同的数学描述方法,而最后导致的数值计算方案差异更大,因此有必要进行比较。天线辐射问题的突出特点,是从振子结构出发(其某些尺寸往往远小于波长),研究很多个波长之外辐射场的性质;换言之,要从馈电点(原点)附近考虑到远场(“无穷远”)。天线数值计算的许多困难,都与这个物理特点有关。

1. 积分方程法 历史上第一个方法就是前面提及的圆柱天线积分方程。有关文献很多,因此我们只限于对它提几条评论意见。第一、现有的积分方程(即所谓 Hallén 方程^[1]),并不是从相应的边值问题严格得来的。人们已多次指出过^[2,3],它严格说来是没有解的。第二、在强加了振子端点电流为零的条件后,它才成为很弱的第二类积分方程:代替积分算符外未知函数的,仅仅是一个未知常数。第三、它充其量只是空心圆筒振子的方程,对于实心振子乃至更复杂的几何形状,积分方程不能保持简单的一维形式。第四、在振子上套了介质或等离子体鞘之后,会出现新的困难。例如,即使对简单的圆筒振子,也只能处理无限长的介质套。然而从数值计算角度看,一维积分方程可以化成阶数不十分高

* 1976 年 4 月 19 日收到。

1) 本工作完成于 1972 年。

的线性代数问题,并自然包括了辐射条件在内的边界条件,故至今关于天线辐射问题的数值结果大都得自此法。

2. 椭圆方程组的边值问题 对于稳恒的周期场,波动方程蜕化为矢量亥姆霍兹方程

$$(\Delta + k^2)\mathbf{H} = 0, \quad k^2 > 0,$$

加上必要的边界条件,就是二阶椭圆型偏微分方程组的边值问题。然而可以指出两条理由,使它在目前尚不能成为计算天线辐射的有效途径。第一、无穷远条件,不同于给定在固定边界上的函数及其导数应满足的等式,而是在趋向无穷远过程中逐渐满足的辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial H_a}{\partial r} - ikH_a \right) = 0,$$

时间因子取 $\exp(-j\omega t)$ 。它的物理意义是选取趋向无穷远的发散波,排除会聚波。解析处理时这很容易作到。求数值解时,问题类似于在半无穷区间上解常微分方程时要求在无穷远处“有界”,但更复杂。第二、椭圆方程边值问题的数值解,导致阶数很高的矩阵问题。现有计算机容量尚不允许用直接法处理这样大的矩阵,而各种迭代法又因为 $(\Delta + k^2)$ 逆算子的奇异性而不能保证收敛。

3. 一阶双曲型偏微分方程组的初值问题 从抛物型(如热传导)方程的初值问题出发,计算趋近平衡的过程,最后求得由椭圆型方程边值问题描述的平衡分布。这种方法在现代快速电子计算机出现之后,已成为很有前途的数值计算途径。对于天线辐射可作完全类似的考虑,不过作为出发点的电磁场基本方程乃是一阶双曲方程组,而最后达到的是稳恒的交变场。整个计算过程模拟天线从开始馈电时刻起的辐射过程,图象是很自然的。微分方程组直接离散化,几乎没有附加的解析推导。一阶方程不要求导数满足的边界条件,因而避开了辐射条件带来的困难(这是直接回到电磁场基本方程,而不去解波动方程初值问题的原因之一)。然而要使初值问题成为有效的数值计算方法,还要注意以下两条物理要求:

第一,显式差分格式不带来矩阵问题,但是其稳定性的前提是时间步长与最小空间步长之比应满足不等式 $\Delta t / \Delta x \leq 1/c$,其中 c 是光速。这是因果性要求:对于相距 Δx 的两点,电磁波的传播时间为 $\Delta x/c$,不允许在一次迭代的时间间隔内跨到 Δx 以外。通常最小空间步长约为振子半径 d 。注意 $cT = \lambda_0$, T 为周期, λ_0 为自由空间中电磁波波长,于是

$$\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{d}{\lambda_0}. \quad (1)$$

由于机器字长和速度的限制,时间步长不能任意缩小,这个不等式给出了能够计算的长波限。这是对波长的一种“绝对”限制:在短波中段,(1)式已是很强的条件。当然可以把显式格式换成某种隐式格式,从而取消这个波长限制,但每步时间迭代中又出现矩阵问题。

第二,由于最终需要的是整个天线系统进入稳恒周期状态后的场分布,暂态过程的时间不能太长,否则要计算的周期数太多,致使此法不能实际应用。这也是一种物理限制:暂态时间常数不应超过交变场周期 T 。然而与(1)式不同,这是对波长的“相对”限制,无

论何种长度的振子，只有第一谐振点附近或更低的频率才是切实可算的（这正是工程上较重要的那一段）。在这个意义上讲，它给出了能够计算的短波限。

本文将根据我们的计算实践，说明天线振子作为初值问题求数值解的概要，并从几种角度检验所得结果的可靠性。

二、基本方程和网格布置

没有体积电流和电荷时，含时间的电磁场方程组是

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2)$$

另外两个散度为零的方程只要在初始时刻成立，就由方程(2)保证在以后任意时刻成立，因而不是独立方程。我们只考虑柱对称问题。引入柱坐标后有

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varepsilon E_\rho)}{\partial t} &= -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial(\mu H_\varphi)}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

这是典型的一阶双曲型偏微分方程组。

我们计算的模型是实心圆柱对称振子(图1)。馈电条件取

$$E_z = -V_0 \delta(z) \sin(\omega t), \quad (4)$$

不用 $\cos(\omega t)$ 是为了避开波前的不连续。离散化时要把 δ 函数换成“台阶”函数，因而更接近实际情况一些。采用工程单位制，并进行无纲化。长度单位取振子半臂长 l ，时间单位取

$$T = \lambda_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

($\varepsilon_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ 亨/米， $\mu_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$ 法/米，分别为自由空间的介电常数和磁导率，光速为 $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$)，电场强度单位为 V_0/l ，磁场强度单位为 $V_0/(Z_0 l)$ ($Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} \approx 120\pi$ 欧姆是自由空间波阻抗)。引入以下无纲量： $\tau = t/T$ ， $x = \rho/l$ ， $y = z/l$ ， $H = Z_0 l H_\varphi/V_0$ ， $E = l E_\rho/V_0$ ， $F = l E_z/V_0$ 。

为了适应天线问题几何尺寸悬殊的特点，人为地将天线附近的尺寸放大，而将远处的空间尺寸缩小。这样就可以在等距网格上采用中心差分。为此引入坐标变换 $x = x(\xi)$ ， $y = y(\zeta)$ 。实际采用的变换是远近两端都趋近直线并通过原点的双曲线的一支¹⁾。振子无纲半径 d/l 变换后的值记为 β ，馈电隙半宽度 Δ/l 变换后的值记为

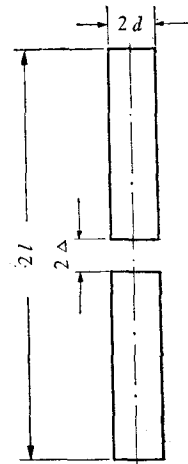


图 1

1) 例如，横向取 $x = A\xi - B + [(A\xi - B)^2 + C\xi^2 + D\xi]^2$ ， A, B, C, D 由远近场各指定两个对应点决定，实际选取时还应保证导数 $dx/d\xi$ 的平滑性，即防止双曲线接近蜕化为两条直线的情形。 A, B, C, D 必须满足一些不等式，才能使五个点落在同一支上。

γ . 最终得到的基本方程组为

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \tau} &= a(\xi) \frac{\partial F}{\partial \xi} + b(\zeta) \frac{\partial E}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial E}{\partial \tau} &= c(\zeta) \frac{\partial H}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial F}{\partial \tau} &= d(\xi) \frac{\partial (xH)}{\partial \xi},\end{aligned}\quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned}a(\xi) &= \frac{\lambda_0}{\mu_r l} \frac{d\xi}{dx}, \quad b(\zeta) = -\frac{\lambda_0}{\mu_r l} \frac{d\zeta}{dy}, \\ c(\zeta) &= -\frac{\lambda_0}{\epsilon_r l} \frac{d\zeta}{dy}, \quad d(\xi) = \frac{\lambda_0}{\epsilon_r l x(\xi)} \frac{d\xi}{dx}.\end{aligned}\quad (6)$$

对于自由空间相对介电常数和磁导率 $\epsilon_r = \mu_r = 1$.

圆柱对称振子的数值计算可以纳入四分之一平面(参看图3). 边界条件为

$$\text{金属柱侧面 } (\xi = \beta, \gamma \leq \zeta \leq \Gamma): F = 0; \quad (7.1)$$

$$\text{金属柱顶面 } (0 \leq \xi \leq \beta, \zeta = \Gamma): E = 0; \quad (7.2)$$

$$\text{馈电隙 } (\xi = \beta, \zeta \leq \gamma): F = -\frac{1}{2\gamma} \sin(2\pi\tau); \quad (7.3)$$

$$\text{纵轴 } (\xi = 0): E = H = 0; \quad (7.4)$$

$$\text{横轴 } (\zeta = 0): E = 0. \quad (7.5)$$

后两个条件很容易从柱对称和振子的上下对称推导出来. 馈电条件(7.3)式排除了隙内的求场问题. 这将影响振子输入阻抗虚部的数值, 但比积分方程法中通常采用的 δ 函数

馈电更接近实际一步. 在内存有限的计算机上求场时, 外边界只能算到几个波长处, 还不能加真正的无穷远条件 $E = F = H = 0$. 外边界的插值处理, 将在下节讨论.

考察基本方程组(5)和边界条件(7), 可以看出: H 的时间变化由 E 和 F 的空间导数决定, 而 E 和 F 的时间变化由 H 的空间导数决定. 函数自然分成了两组. 离散化时对时空两种变量都宜取“棋盘”格式. 时间网络的穿插布置如图2所示. 空间网格布置见图3. H 函数在整格点(实线相交处)求, 而 E, F 函数分别在纵横两方向的半格点(虚实线相交处)求. 为便于满足边界条件, 坐标变换应保证 $\xi = \beta, \zeta = \gamma$ 和 $\zeta = \Gamma$ 三条线都落到虚线上. 至于外边界究竟以虚线或实线结束, 须视插值处理的方便而定.

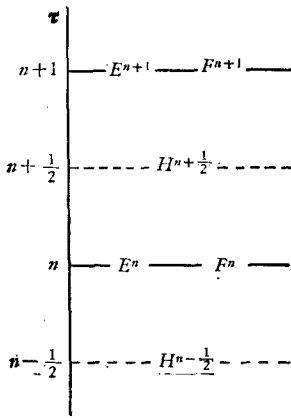


图2 时间网格

三、交替方向追赶隐式格式与外边界的处理

为了回避显式格式稳定条件对时间步长的限制, 曾经考虑了多种隐式差分格式. 对于二维问题, 隐式格式的主要困难在于每一时间步长内都要求解一次矩阵问题. 吸取近

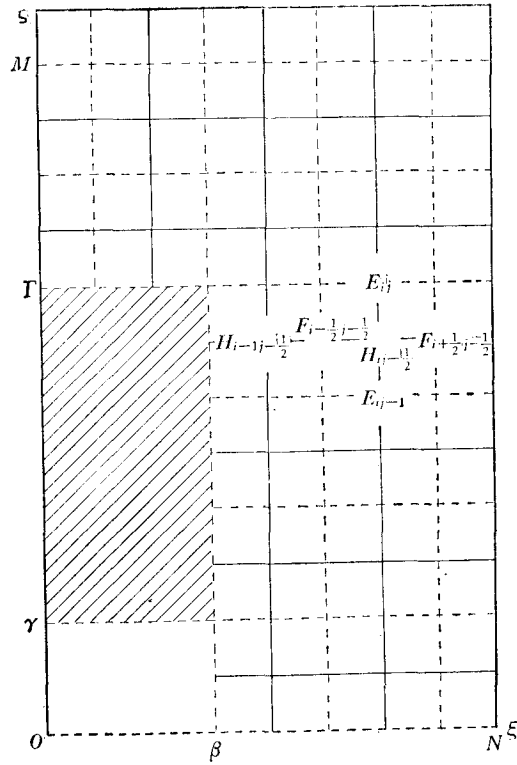


图3 空间网格

几年来求解高维抛物型方程时采用交替方向迭代的经验，可以设想许多种交替方向追赶的隐式或半隐半显格式。基本思想是在一个方向用隐式格式时，以显式照顾其它方向。这样就可以始终局限于能用普通追赶法处理的三对角矩阵。这类格式的变种很多，它们所要求的存储量和计算时间不同，逼近程度不同，有些格式仍然有稳定性问题。而最值得注意的是某些稳定的交替方向格式并不收敛到原来的物理问题。我们作过各种尝试，主要根据物理考虑和计算实践，选取了如下格式(空间步长 $\Delta\xi = \Delta\zeta = 1$ ，故足标 i, j 与相应的 ξ, ζ 坐标的数值相等)：

横向：

$$H_{ij-\frac{1}{2}}^n = H_{ij-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\tau a_i}{2} \left(F_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta\tau b_{j-\frac{1}{2}}}{2} (E_{ij}^n - E_{ij-1}^n), \quad (8.1)$$

$$F_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = F_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^n + \Delta\tau d_{i-\frac{1}{2}} \left(x_i H_{ij-\frac{1}{2}}^n - x_{i-1} H_{i-1,j-\frac{1}{2}}^n \right); \quad (8.2)$$

纵向：

$$H_{ij-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_{ij-\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta\tau a_i}{2} \left(F_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta\tau b_{j-\frac{1}{2}}}{2} (E_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - E_{ij-1}^{n+\frac{1}{2}}), \quad (9.1)$$

$$E_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = E_{ij}^n + \Delta\tau c_j \left(H_{ij+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{ij-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (9.2)$$

这个格式对时间导数只有一次逼近，对内点空间导数是二次逼近。现以横向为例，说明如

何把外边界的插值处理与追赶法结合起来. 将(8.1)式代入(8.2)式, 并稍加整理, 得到以三对角矩阵描述的方程组:

$$p_{i-\frac{1}{2}} F_{i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}}^{n+1} - (1 + p_{i-\frac{1}{2}} + q_{i-\frac{1}{2}}) F_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{n+1} + q_{i-\frac{1}{2}} F_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{n+1} = -Q_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^n, \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} p_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta\tau a_{i-1}}{2} (\Delta\tau x_{i-1} d_{i-\frac{1}{2}}), \quad q_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta\tau a_i}{2} (\Delta\tau x_i d_{i-\frac{1}{2}}), \\ Q_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^n &= F_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^n + (\Delta\tau x_i d_{i-\frac{1}{2}}) \left[H_{ij-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\tau b_{j-\frac{1}{2}}}{2} (E_{ij}^n - E_{ij-1}^n) \right] \\ &\quad - (\Delta\tau x_{i-1} d_{i-\frac{1}{2}}) \left[H_{i-1j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\tau b_{j-\frac{1}{2}}}{2} (E_{i-1j}^n - E_{i-1j-1}^n) \right]. \end{aligned}$$

这个方程组可用标准的追赶法求解. 结果为(以后省去 i 足标)

$$F_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = K_{i-\frac{1}{2}} F_{i-\frac{3}{2}}^{n+1} + S_{i-\frac{1}{2}}^n, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{i-\frac{1}{2}} &= R_{i-\frac{1}{2}} p_{i-\frac{1}{2}}, \\ S_{i-\frac{1}{2}}^n &= R_{i-\frac{1}{2}} (Q_{i-\frac{1}{2}}^n + q_{i-\frac{1}{2}} S_{i+\frac{1}{2}}^n), \\ R_{i-\frac{1}{2}} &= (1 + p_{i-\frac{1}{2}} + q_{i-\frac{1}{2}} - q_{i-\frac{1}{2}} K_{i+\frac{1}{2}})^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

为了使这个方程组封闭起来, (11)式要用到 F 的边界条件(7.1)和(7.3)式. 振子顶端以上($\zeta > \Gamma$)由于 $K_{\frac{1}{2}} \equiv 0$, $F_{\frac{1}{2}}^{n+1}$ 的值可任意给定. (12)式需要在外边界上与某种插值法结合起来. 现在更详细地讨论这一点.

在实际边界点 H_N 之外, 再虚设(即不保存也不计算)一个场点 $F_{N+\frac{1}{2}}$. 设这个场值是从内点线性外插求出

$$F_{N+\frac{1}{2}}^{n+1} = 2F_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} - F_{N-\frac{3}{2}}^{n+1},$$

注意 $F_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} = K_{N-\frac{1}{2}} F_{N-\frac{3}{2}}^{n+1} + S_{N-\frac{1}{2}}^n$, 消去 $F_{N-\frac{3}{2}}^{n+1}$ 而得

$$K_{N+\frac{1}{2}} = 2 - (K_{N-\frac{1}{2}})^{-1}, \quad S_{N+\frac{1}{2}}^n = S_{N-\frac{1}{2}}^n (K_{N-\frac{1}{2}})^{-1}. \quad (13)$$

将(13)式与递推公式(12)联立, 求出

$$\begin{aligned} K_{N-\frac{1}{2}} &= R_{N-\frac{1}{2}} (p_{N-\frac{1}{2}} - q_{N-\frac{1}{2}}), \\ S_{N-\frac{1}{2}}^n &= R_{N-\frac{1}{2}} Q_{N-\frac{1}{2}}^n, \\ R_{N-\frac{1}{2}} &= (1 + p_{N-\frac{1}{2}} - q_{N-\frac{1}{2}})^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

这就是封闭追赶方程组(12)所要求的外边界条件. 顺便指出, 全部 K, R 系数与 τ 无关, 可以事先保存从而大为节省计算时间.

如果采用平方外插

$$F_{N+\frac{1}{2}}^{n+1} = F_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} + 3 \left(F_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} - F_{N-\frac{3}{2}}^{n+1} \right),$$

则经过类似但冗长得多的推导,可以求出

$$\begin{aligned} K_{N-\frac{1}{2}} &= 1 + R_{N-\frac{1}{2}}(q_{N-\frac{1}{2}} - p_{N-\frac{1}{2}}), \\ S_{N-\frac{1}{2}}^n &= R_{N-\frac{1}{2}}(p_{N-\frac{1}{2}} Q_{N-\frac{1}{2}}^n - q_{N-\frac{1}{2}} Q_{N-\frac{1}{2}}^n), \\ R_{N-\frac{1}{2}} &= [q_{N-\frac{1}{2}} q_{N-\frac{1}{2}} + p_{N-\frac{1}{2}}(1 + p_{N-\frac{1}{2}} - 2q_{N-\frac{1}{2}})]^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

计算实践表明,平方插值(15)式的效果比线性插值(14)式差.这是不难理解的.注意 $p, q \sim (\Delta\tau)^2$, 当 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 时,线性插值公式(14)的极限为 $K_{N-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$, $S_{N-\frac{1}{2}}^n \rightarrow F_{N-\frac{1}{2}}^n$, 这是与物理考虑一致的结果.然而平方插值公式(15),当 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 时,给出 $K_{N-\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$, $S_{N-\frac{1}{2}}^n$ 的极限也不对.这时积累误差迅速上升也就不足为奇了.应当指出,如果虚设两点,则对平方插值也能求得 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 时合理的公式,但必须用到一个虚设点上的 Q^n (包括 F^n), 它还须从内点外插出来,因而计算过程相当繁琐.相反,如果一个场点也不虚设,线性插值公式的 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 极限也是不对的.

经过大量实际比较,确信外边界处理可以基本上不影响振子附近的场值之后,我们采用线性插值,取得主要数值结果.

四、对称振子的数值计算结果

我们给出圆柱对称振子的一些数值结果,主要为了说明初值方法是可行的.为了节省机器时间,这些结果是用相当粗糙的网格布置求得的(例如,时间步长仅取 $1/64$ 或 $1/128$).下面同时介绍从初值问题的数值解求各种天线参数的方法,并从各种角度对结果的可靠程度再作一些检验.

初值问题的解是空间各点各个时刻交变电磁场分量的值,它们包含的信息很多,但必须进一步推算出来.对于任意物理量 A , 本文所用实数描述 $A(\mathbf{r}, t)$ 与复数描述 $\bar{A}(\mathbf{r}, t)$ 的关系为

$$A(\mathbf{r}, t) = -\text{Im}\bar{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(j\bar{A}(\mathbf{r}, t)).$$

进入稳恒周期状态之后, $\bar{A}(\mathbf{r}, t) = \bar{A}(\mathbf{r})\exp(-j\omega t)$, 这时有

$$\text{Re}\bar{A}(\mathbf{r}) = A\left(\mathbf{r}, \left(N + \frac{1}{4}\right)T\right), \quad \text{Im}\bar{A}(\mathbf{r}) = -A(\mathbf{r}, NT) \quad (16)$$

(N 是整数),同时

$$|\bar{A}(r)| = (A^2(r, t) + A^2(r, t + T/4))^{1/2}, \quad (17)$$

其中 t 为任意时刻.借助这些关系就可以求出天线理论中惯用的各种参数(本节以有纲量表示).

1. 振子上的电流分布 金属表面电流密度由边界条件决定:

$$j_s = H_\varphi, \quad (\rho = d, \Delta \leq z \leq l).$$

我们的网格布置中未求振子表面的磁场值,但从物理考虑可知,振子附近的磁场应接近静磁场分布,即应有

$$\rho H_\varphi = \text{与 } \rho \text{ 无关常数} \sim I(z) = 2\pi d j_s. \quad (18)$$

这类关系可以作为数值结果可靠性的一个旁证.表1列出一组实际计算结果的无纲 $x|H|$ 乘积.对于借助(18)式推算振子表面的场值,表1所反映的精度已足够.因此振

表 1 圆柱振子附近 $x|H|$ 乘积 ($\times 10^4$)¹⁾

ξ	y	x	ξ					
			5	6	7	8	9	10
			0.004657	0.006130	0.007837	0.009810	0.01208	0.01470
0.5	0.00104		4885	4890	4892	4894	4896	4900
4.5	0.01694		4904	4907	4908	4911	4911	4914
9.5	0.06076		4988	4989	4988	4988	4987	4988
19.5	0.28271		4871	4874	4874	4874	4872	4872
30.5	0.95267		1010	1010	1009	1009	1010	1011

1) 计算方案 $d/l = 0.004$, $\Delta/l = 0.02$, $M = N = 50$, $\beta = 4.5$, $\gamma = 4$, $\Gamma = 31$, $l/\lambda_0 = 0.25$, $\Delta\tau = 1/128$, 计算到一个波长远

子上总电流的实部和虚部为

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I(z) &= 2\pi \frac{V_0}{Z_0} x_{\beta+\frac{1}{2}} H\left(\beta + \frac{1}{2}, N + \frac{1}{4}\right), \\ \operatorname{Im} I(z) &= 2\pi \frac{V_0}{Z_0} x_{\beta+\frac{1}{2}} H\left(\beta + \frac{1}{2}, N\right), \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $x_{\beta+\frac{1}{2}}$ 是 $\xi = \beta + \frac{1}{2}$ 对应的 x 值, 由坐标变换决定. 类似可得振子顶端面内电流表达式.

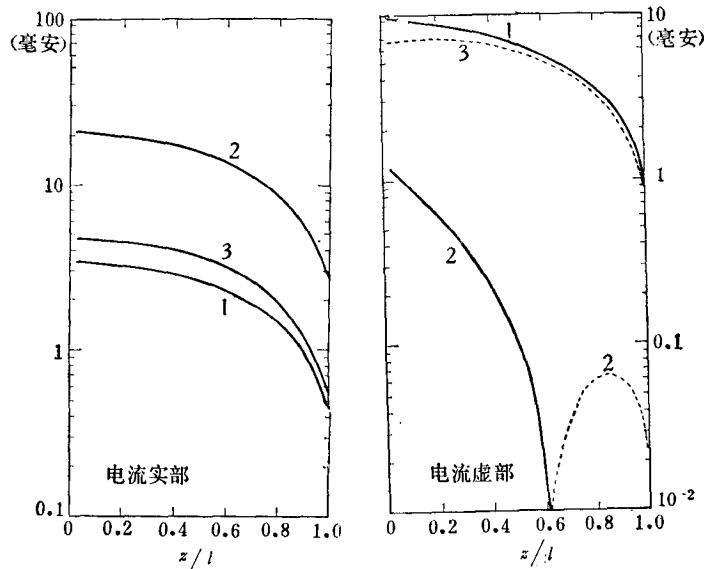


图 4 振子上的电流分布

1— $l/\lambda_0 = 0.20$; 2— $l/\lambda_0 = 0.224$; 3— $l/\lambda_0 = 0.25$;
——正值; -----负值

图 4 给出一组振子上电流分布 (计算方案同表 1). 其中 $l/\lambda_0 = 0.224$ 的曲线, 是靠近谐振点但仍在谐振点下的情况. 请注意谐振点上、下电流虚部的符号变化, 这当然是与积分方程法所得结果一致的. 由于馈电隙有宽度, 振子两端不强加电流为零的条件, 初值法所得结果 (在网格足够密时) 应能更接近实际一些.

2. 振子上的电荷分布 电荷分布可以用两种方法求得。由金属表面电场法线分量的边界条件得表面电荷密度 $\sigma = \epsilon_0 E_\rho$ ，故单位长度上的电荷为

$$q = 2\pi d\sigma = 2\pi\epsilon_0 \frac{V_0}{l} dE, \quad (20)$$

这里 E 的值需用插值求出。另一方面，由电流连续性方程知

$$\frac{dI}{dz} - j\omega q = 0,$$

因而

$$\operatorname{Re} q = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left(\frac{dI}{dz} \right), \quad \operatorname{Im} q = -\frac{1}{\omega} \operatorname{Re} \left(\frac{dI}{dz} \right). \quad (21)$$

这两种数值的比较，是检验计算方法可靠性的又一手段。对于和表 1 相同的计算方案，两种算法的差别在 1% 以内。

3. 输入阻抗和辐射电阻 采用 $V_0 = 1$ 伏的恒压馈电时，馈电点电流在数值上就等于输入导纳 Y ，由此立即得输入阻抗 Z ：

$$Y = Z^{-1} = I(y = \Delta/l). \quad (22)$$

这样得到的阻抗，我们称为近场值。

不计损耗时，输入阻抗的实部 R 应等于归结到馈电点的天线振子辐射电阻。后者还可以用另外两种方法求出：第一，将已知电流分布代入推迟势的远场表达式，即从方向图积分求辐射功率及辐射电阻（这样求得的电阻将称为远场值）；第二，沿任何包括振子在内的封闭曲面对能量通量积分，得出辐射功率和辐射电阻（以下称为面积分）。这三种辐射电阻数值的比较，可以进一步说明计算结果的质量。

由于输入阻抗是最重要的天线参数之一，我们再讨论得仔细一些。

由 (16) 和 (22) 式，注意进入稳恒周期状态后奇偶半周期场值的符号变化，输入导纳的实部 G 和虚部 B 分别由不同时刻的馈电点电流瞬时值决定：

$$\begin{aligned} G &= (-1)^k I(\tau = (2k+1)/4, y = \Delta/l), \\ B &= (-1)^k I(\tau = 2k/4, y = \Delta/l) \end{aligned} \quad (23)$$

(k 是整数)。由此得输入阻抗的近场值：

$$R = G/(G^2 + B^2), \quad X = -B/(G^2 + B^2). \quad (24)$$

对于进入稳恒周期状态之前的暂态过程，这样定义的阻抗没有直接的物理意义，但可用以监视数值计算的稳定过程。图 5 是 R 和 X 趋近稳定值的几个例子，其频率分别高于 ($l/\lambda_0 = 0.25$)、低于 ($l/\lambda_0 = 0.1$) 或接近 ($l/\lambda_0 = 0.224$) 第一谐振点。

从数值解的性质看，辐射阻抗的近场值和远场值有一种值得注意的差别。近场值直接得自电流，如果全部交变场值乘以因子 K ，则阻抗将除以 K （见 (24) 式）。然而远场阻抗值却是交变场二次型之比，它将不受这类因子影响；换言之，只要场分布的形状（而不是数值）一样，阻抗数值就相同，因此它对各种计算误差引起的场值变化更不敏感。为了实际验证这一点，我们对疏密两种网格布置（表 2）和两种时间步长，计算了若干频率点的阻抗数值。所用几何尺寸与表 1 相同。两种网格的疏密程度在振子附近相差一倍以上。

为了充分显示各种计算方案的差别，图 6 和图 7 中以对数坐标画出输入阻抗的实部

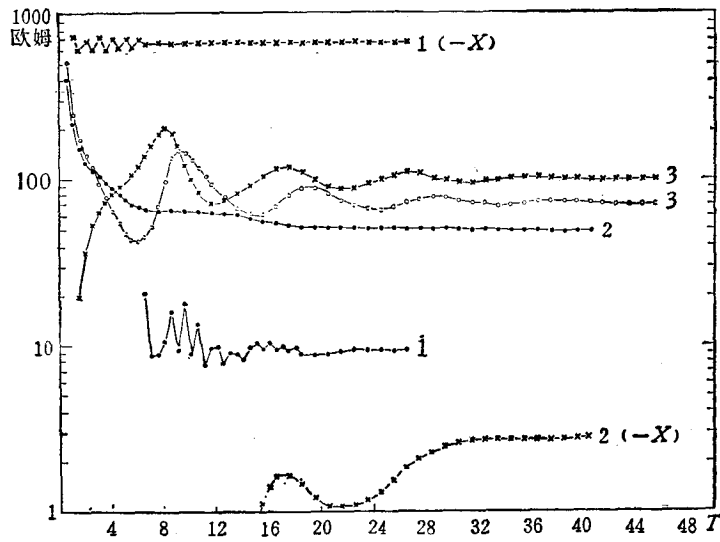


图5 输入阻抗趋近稳定值的过程

1— $l/\lambda_0 = 0.1$; 2— $l/\lambda_0 = 0.224$; 3— $l/\lambda_0 = 0.25$;
○, ●—实部; ×—虚部

表2 两种网格布置

	N	M	β	r	Γ	外边界距离
疏	50	50	2	2	20	2 波长
密	50	50	4	5	31	1 波长

和虚部。图中同时给出了别人^[4]从积分方程近似解得到的曲线(他们的几何尺寸与我们不同, $d/l = 0.0135$, $\Delta = 0$, 这对电抗 X 的数值影响较大)。图6清楚表明, 阻抗远场值相当稳定: 时空网格四种疏密不同的计算方案, 所得电流形状是一致的。

应当指出, 我们所使用的最“密”的时空网格, 对于二维问题的数值解说来仍是极其粗疏的。这种条件下能得到图6和图7所示的一致性, 说明在速度和容量更大的计算机上必将获得更好的结果。

对于纯显式差分格式, 在稳定条件下其精度与时空步长的比值有关, 只有差分方程组与微分方程组特征线一致时, 精度才是最高的。对于隐式格式的逼近精度, 我们未作进一步分析。但至少有三种理由, 说明数值结果的质量, 由振子向外逐步降低: 第一, 坐标变换使得远处的网格更为粗疏, 每个波长上布点仅十余个(这在现有机器容量下是不可避免的)。第二, 由于采用坐标变换, 即使振子附近选取了较佳的时空步长比, 也不能保持到远场。第三, 在远离振子处, 插值处理(14)式的影响增大。当然, 这三种影响都是全局性的, 不宜作远近之分。但是对于稳定的差分格式, 这些误差在向内传播的过程中衰减。我们的计算实践恰恰表明, 可以得到比较合理的近场值。

以上所述可从辐射阻抗的面积分值得反映出来。以对称振子为中心, 沿不同高度和半径的圆柱面求辐射能量, 再得到归结到馈电点的辐射电阻。这样得到的阻抗数值与阻抗的远、近场值在量级上符合, 但愈向外符合愈差。

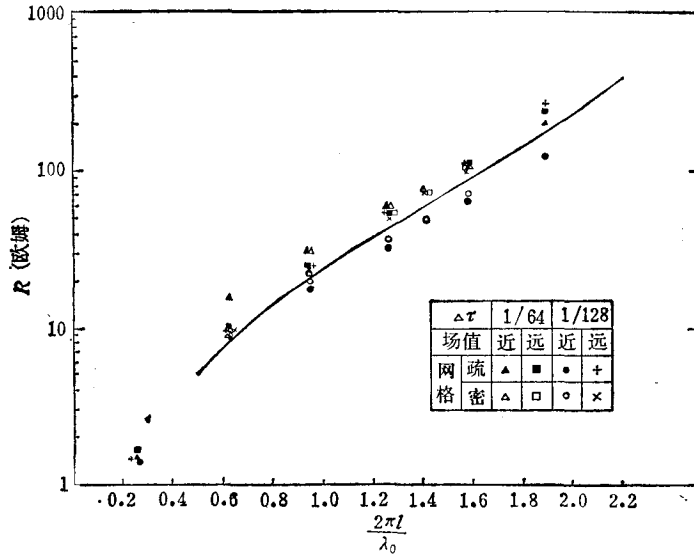


图6 输入电阻 ($\frac{d}{l} = 0.004$, $\frac{\Delta}{l} = 0.02$)

(实线取自文献 [4], 其 $\frac{d}{l} = 0.0135$, $\Delta = 0$)

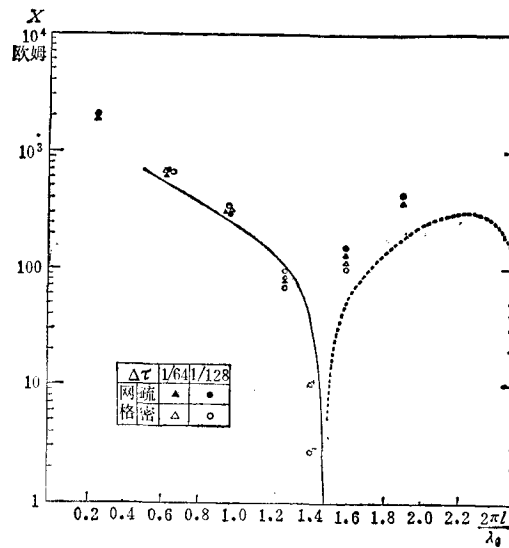


图7 输入电抗 ($\frac{d}{l} = 0.004$, $\frac{\Delta}{l} = 0.02$)

(实线取自文献 [4], 其 $\frac{d}{l} = 0.0135$, $\Delta = 0$)

—— 正值; - - - - 负值

4. 振子表面的欧姆损耗(铜耗) 金属振子的铜耗很小, 我们计算它是为了增加一种检验手段. 求场时不计入欧姆损耗, 在一级近似下求铜耗功率

$$P_{\Omega} = \frac{1}{2(2\pi d)^2} \left(\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}\right)^{1/2} \oint |I|^2 dS. \quad (25)$$

这里沿振子表面求积分, 并且用到金属的表面阻抗 $(\omega\mu_0/2\sigma)^{1/2}$ (对铜取电导率 $\sigma = 5.8 \times 10^7$). 归结到馈电点的铜耗电阻为

$$R_{\Omega} = \frac{2P_{\Omega}}{|I(y = \frac{\Delta}{l})|^2}.$$

可见与辐射阻抗远场值一样, 它也是交变场二次型的比值, 因而只与电流形状有关. 对于各种疏密网格和时间步长, 当 $l/\lambda_0 = 0.1$ 时, $R_{\Omega} = 0.041 - 0.043$ 欧姆.

五、讨 论

从前面几节叙述的方法和初步结果,可以期望对于较精细的时空网格用初值方法取得可靠的结果. 我们进一步讨论初值方法相对于其它方法的优越性和局限性.

初值方法(特别是显式格式)是对物理过程的自然模拟,无论对于任何形状和复杂介质中的振子,都归结为网格和边界的恰当布置问题. 但是为了求得完整的频率曲线,数值计算量很大. 相反,对于能归结到一维问题的对称性较高的几何形状,积分方程法要求机器时间较少,而且有可能每计算一次积分核,就求得一整段频率特性;然而数值计算之前往往要对积分核进行种种变换,手工推导和程序工作量都是比较大的. 随着高速度大容量计算机的发展,各种“直接”方法将日益取代人工工作量较大的“古典”方法. 从这个意义上讲,初值方法是有发展前途的.

相对于积分方程和椭圆方程边值问题这些“线性”方法,初值问题没有强烈的线性要求,可比较容易地推广到某些非线性情况. 例如大功率下出现拟线性问题,这时介质参数 ϵ 和 μ 都成为交变电磁场的函数,本文所用方法处理这类问题是没有原则困难的.

初值问题自然地比其它两种方法包含了更多的结果,即关于天线系统暂态过程的信息,这一优点可能部分地补偿为达到稳恒而付出的较多的计算时间.

最后要指出,本文的讨论更多地是基于物理考虑和计算实践. 对于诸如各种差分格式的稳定性条件,是否收敛到原来的物理问题,以及逼近精度和积累误差等等,只是提供了进一步探讨的素材,未作深入的理论分析.

参 考 文 献

- [1] E. Hallén, *Electromagnetic Theory*, Chapman & Hall (1962), London, 第35章.
- [2] И. Г. Кляцкин, *Радиотехника*, 19 (1964), № 4, 5.
- [3] 参看 T. T. Wu 在 R. E. Collin 和 F. J. Zucker 主编的 *Antenna Theory (Part I)* 一书中的文章; McGraw-Hill (1969), 313.
- [4] 同文献 [3], 第366页.

SOLUTION TO ANTENNA RADIATION FIELD AS AN INITIAL VALUE PROBLEM

ANTENNA GROUP, INSTITUTE OF PHYSICS AND INSTITUTE OF COMPUTER
TECHNOLOGY, ACADEMIA SINICA

ABSTRACT

On the basis of physical considerations and computational experience, it is pointed out that the initial value problem of the Maxwell equations as a set of first order hyperbolic differential equations could become an effective numerical method for the solution of antenna radiation fields. An alternating direction implicit difference scheme is proposed in combination with extrapolated treatment of the conditions on the outer boundary. To demonstrate the potentialities of the proposed method, numerical results for a cylindrical antenna are discussed.