第27卷 第2期 物理学报 Vol. 27, No. 2
1978年3月 ACTA PHYSICA SINICA March, 1978

引力对真空状态的影响*[1)]

方励之
（中国科学技术大学）

提　　要

本文通过一个简单模型的严格的宇宙学解说明：真空态的对称性破缺可能是一种宇宙学的效应.

对称性自发破缺观念，给探讨真空的本质提供了一条新的线索. 按照这种机制，某些动力学上的对称性质的破坏，是由真空状态决定的. 更一般地说，这种机制表明真空态并不是与物质运动完全无关的绝对不变的状态. 相反，二者之间有密切的耦合. 一方面，真空态的性质会决定运动规律的特征. 另一方面，物质状态的变化（例如温度、密度的变化）也会引起真空状态的变化.

时空结构、真空状态以及物质运动是物理问题中三个最基本的方面. 在古典物理学中，这三个方面是各自独立的. 相对论的发展揭示出时空结构与物质运动状态之间有密切的依赖关系. 如上所述，对称性自发破缺理论提出了真空状态与物质运动之间的相互作用问题. 由此，自然会提出以下问题：时空结构与真空状态之间是否有相互联系和相互制约？

这个问题不仅与微观尺度上的现象有关，而且会涉及宏观以至宇观尺度上的现象. 自发破缺的可能的天体物理效应，已经有了一些讨论. 例如，自发破缺引起的真空态能量的改变，构成了广义相对论引力场方程中的宇宙学项[1]；不同的真空态的存在，可能形成大尺度空间的畴状结构[2]；真空态的不稳定性将引起物质分布的非均匀性[3]等等. 所有这些都说明，如果有自发破缺机制存在，将会影响大尺度上的时空结构，即真空状态对宇宙学问题中的时空特性有明显的作用. 所以，上述这些工作，都是以局部范围（按照广义相对论的语言，即所谓局部惯性系）中确立的真空态性质为出发点，讨论它的宇宙学效果的. 可是，真空态本身就是一种大尺度问题. 所以先行规定真空态的特性，再来讨论它的宇宙学后果，只是分析了问题的一个方面；另一方面的问题是，真空态的性质如何取决于大尺度上的时空结构，是否某些真空态的性质实质上是一种宇宙学现象？本文通过一种简单的模型说明，大尺度上的时空结构对真空状态的性质的确可能有很强的影响. 就如某些对称性破缺机制本身可能就是一种宇宙学效果.

我们沿用讨论对称性自发破缺问题时最常用的一种简单模型. 假定有标量 ϕ 场，它的拉氏函数为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - U_\phi, \tag{1}$$

* 1976年12月10日收到.

1) 本文初步结果曾于1976年7月，在合肥南方天体物理讨论会上报告过.

其中 $\eta^{\mu\nu}$ 为 Minkowski 度规,势函数 U_ϕ 表示自作用

$$U_\phi = \frac{1}{4} b\phi^4. \tag{2}$$

(1)式有 $\phi \to -\phi$ 对称性. 稳定的真空态应由下列条件决定:

$$\frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial \phi^2} > 0. \tag{3}$$

所以,当 $b > 0$ 时,有稳定的真空态 $\phi = 0$,它是 U_ϕ 的极小,同样保持 $\phi \to -\phi$ 对称性.

如果讨论大尺度效应,就应当考虑 ϕ 场自身的引力作用. 这种引力作用同时反映着大尺度上的时空特征. 文献[4]中虽然也讨论了对称性自发破缺的宇宙学起源的可能性,但没有考虑真空态本身引力作用对时空结构的影响. 这种处理方法是不自恰的. 如果仍用广义相对论的方法处理引力的影响. 在引力场中,即弯曲空间中 ϕ 场的拉氏函数(1)式应写成

$$\mathscr{L} = \sqrt{g}\left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{12} R\phi^2 - U_\phi\right), \tag{3$'$}$$

其中 $g^{\mu\nu}$ 为时空度规张量,$g = -\det g_{\mu\nu}$,R 是标量曲率,$\frac{1}{12} R\phi^2$ 项是所谓 Gürsey-Penrose 项,来源于共形不变的要求[5].

对于自引力问题,时空的弯曲,又是由于 ϕ 场的存在而引起的. 因此,问题归结为求解下列方程组:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{4}$$

$$\Box\phi + \frac{1}{6} R\phi - b\phi^3 = 0, \tag{5}$$

(4)式是引力场方程,$R_{\mu\nu}$ 是 Ricci 张量,G 是引力常数,Λ 是宇宙学项. $T_{\mu\nu}$ 是 ϕ 场的能量动量张量,它可写为

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = 2\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g^{\mu\nu}} &= \left(-\frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\phi\partial_\kappa\phi - U_\phi\right)g_{\mu\nu} \\ &+ \partial_\nu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{6}\phi^2\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{6}\left(g_{\mu\nu}\Box\phi^2 - \phi^2_{;\mu;\nu}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

方程(5)是 ϕ 场的方程,其中

$$\Box \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

当 $g^{\mu\nu} \to \eta^{\mu\nu}$,$R \to 0$ 时,方程(5)就过渡为平直空间中的 ϕ 场方程. 实际上,在我们的问题中,方程(5)并不是独立的. 利用 Bianchi 恒等式,可以从方程(4)推出方程(5). 应该指出,虽然方程(5)含有自作用项,但它仍然是共形不变的. 而且,它是满足共形不变的标量场方程的最一般形式. 如果在方程中引入质量项 $m^2\phi$ 或其他类形的自作用,都将破坏共形不变性[6].

现在求方程(4)的宇宙学解. 首先将 ϕ 看作经典场.并采用均匀各向同性的Robertson-Walker 度规,这个度规能说明宇宙学尺度上的系统性特征. 因此,

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right\}, \tag{7}$$

其中 $k=0$, ± 1，分别相应于平直的，球面的及双曲的空间．利用(7)式方程(4)现在成为

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -8\pi G\left\{\frac{1}{1-\frac{4\pi}{3}G\phi^2}\left[\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - U'_\phi\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1-\frac{4\pi}{3}G\phi^2}\left(\frac{1}{4}\frac{d^2\phi^2}{dt^2} + \frac{1}{4}\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\phi^2}{dt}\right)\right\}. \tag{8}$$

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{1-\frac{4\pi}{3}G\phi^2}\left[U'_\phi + \frac{1}{12}\left(\frac{d^2\phi^2}{dt^2} + \frac{5\dot{a}}{a}\frac{d\phi^2}{dt}\right)\right]a^2, \tag{9}$$

其中

$$U'_\phi = \frac{1}{4}b\phi^4 - \frac{\Lambda}{8\pi G}, \tag{10}$$

方程(5)现在为

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial U'_\phi}{\partial\phi} - \frac{\frac{4\pi}{3}G\phi}{1-\frac{4\pi}{3}G\phi^2}\left\{\left[\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - 4U'_\phi\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left[\frac{d^2\phi^2}{dt^2} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\phi^2}{dt}\right]\right\} = 0. \tag{11}$$

自然，(11)式可以由(8)式及(9)式推得．

现在，作变换

$$\phi = a^{-1}x, \qquad \frac{d}{dt} = a^{-1}\frac{d}{d\eta}, \tag{12}$$

这时度规(7)式成为

$$d\tau^2 = a^2\left\{d\eta^2 - \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right]\right\}, \tag{13}$$

方程(11)变为

$$\frac{d^2}{d\eta^2}x + kx + bx^3 = 0. \tag{14}$$

它的一次积分是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}bx^4 = \text{常数}.$$

如采用文献[8]的量子化方法，则保持 $x\to -x$ 对称性的真空态解是

$$x_c = 0. \tag{15}$$

或者，由(12)式，它对应于

$$\phi_c = 0. \tag{16}$$

这当然是方程(11)的一个解. 这个解的特点是不随时间变化，即 $\frac{d\phi}{dt}=0$. 但是，方程(10)的常数解，并非只有(16)式一个. 由(11)式,满足 $\frac{d\phi}{dt}=0$ 的解,由下式确定:

$$\frac{\partial U'_\phi}{\partial \phi}+\frac{\frac{4\pi}{3}G\phi}{1-\frac{4\pi}{3}G\phi^2}4U'_\phi=0. \tag{17}$$

用(10)式,可以求得方程(17)的解,当 $\Lambda>0$ 时,除了解(16)式,还有

$$\phi_c=\pm\sqrt{\frac{2\Lambda}{3b}}. \tag{18}$$

这两个解是对称性破缺的.

现在考察一下解(16)及(18)式相应的能量密度. 由(6)式,对 $\phi=\phi_c$ 解,能量密度是

$$T_{00}=\left(\frac{1}{4}b\phi_c^4-\frac{1}{b}\Lambda\phi_c^2\right)\left(1-\frac{4\pi}{3}G\phi_c^2\right)^{-1}. \tag{19}$$

可见,无论对于解(16)或者(18)式,都有

$$T_{00}=0.$$

即(16)和(18)式三个解是"简并"的. 这就是说,由于考虑了 ϕ 场的宇宙学尺度上的自引力,则可能存在三个相互简并的真空解. 其中二者是对称性破缺的.

根据方程(8)和(9),容易求得当 $\phi=\phi_c$ 时 $a(t)$ 的解. 若 $K=-\frac{\Lambda}{3G}>0$, 解为

$$a(t)=\begin{cases}A\exp Kt & k=0;\\ \frac{1}{K}\operatorname{ch}(Kt+A) & k=+1;\\ \frac{1}{K}\operatorname{sh}(Kt+A) & k=-1.\end{cases} \tag{20}$$

若 $K<0$, 只对 $k=-1$ 情况有合理解:

$$a(t)=\frac{1}{|K|}|\sin(|K|t+A)|, \tag{21}$$

其中 A 是积分常数.

下面讨论 ϕ 场量子涨落的影响. 现在,代替(4)式右端的 $T_{\mu\nu}$, 应当用期待值 $\langle T_{\mu\nu}\rangle$.

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=-8\pi G\langle T_{\mu\nu}\rangle. \tag{22}$$

在 Robertson-Walker 度规下,方程(5)为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{3\dot{a}}{a}\frac{\partial\phi}{\partial t}-a^{-2}\Delta^{(3)}\phi-\frac{1}{6}R\phi+b\phi^3=0, \tag{23}$$

其中 $\Delta^{(3)}$ 为度规(7)式中空间部分的 Laplace 算符. 对有自作用的(23)式，我们采用类 Hartree 近似来处理[7]. 首先,将 ϕ 分成 c 数部分 ϕ_c 以及算符部分 ϕ_q,

$$\phi=\phi_c+\phi_q. \tag{24}$$

并且

$$\langle\phi\rangle=\phi_c, \qquad \langle\phi_q\rangle=0. \tag{25}$$

然后，再作 Hartree 近似

$$\phi^3 \to 3\langle\phi^2\rangle\phi - 2\langle\phi\rangle^3, \tag{26}$$

亦即 $\phi_q^2 \to \langle\phi_q^2\rangle$, $\phi_q^3 \to 3\langle\phi_q^2\rangle\phi_q$, $\phi_q^4 \to 6\langle\phi_q^2\rangle\phi_q^2 - 3\langle\phi_q^2\rangle^2$. 由此，方程(22)分成下列两个方程:

$$\frac{\partial^2\phi_c}{\partial t^2} + \frac{3\dot{a}}{a}\frac{\partial\phi_c}{\partial t} - a^{-2}\Delta^{(3)}\phi_c - \frac{1}{6}R\phi_c + b\phi_c^3 + 3b\langle\phi_q^2\rangle\phi_c = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2\phi_q}{\partial t^2} + \frac{3\dot{a}}{a}\frac{\partial\phi_q}{\partial t} - a^{-2}\Delta^{(3)}\phi_q - \frac{1}{6}R\phi_q + 3b\phi_c^2\phi_q + 3b\langle\phi_q^2\rangle\phi_q = 0. \tag{28}$$

为了消除方程中的 $\langle\phi_q^2\rangle$ 项，引入重整化的拉氏函数:

$$\mathscr{L} = \sqrt{g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{12}R\phi^2 - U_\phi - \frac{1}{2}B\phi^2\right), \tag{29}$$

其中 $\frac{1}{2}B\phi^2$ 为质量抵消项. 现在，代替(27)，(28)式中 $3b\langle\phi_q^2\rangle\phi_c$, $3b\langle\phi_q^2\rangle\phi_q$ 两项，应分别为$(B + 3b\langle\phi_q^2\rangle)\phi_c$, $(B + 3b\langle\phi_q^2\rangle)\phi_q$. 因此，如果要求 ϕ_c 的重整化的方程为无质量标量场方程，则应有

$$B = -3b\langle\phi_q^2\rangle.$$

质量抵消项对 $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ 的贡献是附加一个 $\Lambda' g_{\mu\nu}$ 类型的项. 因之，相当于引起方程(22)中宇宙学项的重整化. 这样，(27)及(28)式现在成为

$$\frac{\partial^2\phi_c}{\partial t^2} + \frac{3\dot{a}}{a}\frac{\partial\phi_c}{\partial t} - a^{-2}\Delta^{(3)}\phi_c - \frac{1}{6}R\phi_c + b\phi_c^3 = 0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2\phi_q}{\partial t^2} + \frac{3\dot{a}}{a}\frac{\partial\phi_q}{\partial t} - a^{-2}\Delta^{(3)}\phi_q - \frac{1}{6}R\phi_q + 3b\phi_c^2\phi_q = 0. \tag{31}$$

应用分解(24)式后，$\langle T_{\mu\nu}\rangle = (T_{\mu\nu})_c + (T_{\mu\nu})_f$, 其中 $(T_{\mu\nu})_c$ 即为在(6)式中作 $\phi \to \phi_c$ 代换而得到. $(T_{\mu\nu})_f$ 为量子涨落的贡献. 如果忽略 $(T_{\mu\nu})_f$, 则方程组(22)及(30)就过渡为(4)及(5)式. 因此，这时前面关于真空解的讨论完全适用于 ϕ_c.

方程(31)已是线性的，因此关于由 ϕ_q 引起的 $(T_{\mu\nu})_f$，可以沿用已有的工作的结论[8]. 对于 $\phi_c = 0$ 解，方程(31)描写无质量标量场，它对 $(T_{\mu\nu})_f$ 的贡献也只是引入一宇宙学类型的附加项，导致宇宙学常数的重整化. 对于对称性破缺的解 $\phi_c = \sqrt{\frac{2\Lambda}{3b}}$, (31)式是个质量 $m^2 = 3b\phi_c^2$ 的标量场方程. 它在引力场中的作用是: 1. 引入宇宙学常数的重整化; 2. 引入引力相互作用的重整化; 3. 引起粒子产生.

为了看得更清楚，可对 ϕ_q 的方程(28)进行类似于(12)式的变换 $\phi_q = a^{-1}x_q$, $\frac{\partial}{\partial t} = a^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}$, 则得

$$\frac{\partial^2 x_g}{\partial\eta^2} + (\Delta^{(3)} + k)x_g + 3b\phi_c^2a^2x_q = 0.$$

可见，象通常一样，对称性破缺会使无质量粒子变成有质量的. 而且，现在还有新的特点，x_g 的质量会随着 a 的增长而增长，即粒子的质量会随着宇宙尺度上的变化而变化.

迄今为止，天体物理学总是使用实验室范围，即局部范围中所得到的物质运动规律(包括质量等参数)去研究天体现象．这样做，其实是暗含地假定了局部范围的运动规律可以从大尺度的体系中孤立出来，这些规律与大尺度的环境特征无关．上面分析的例子说明，真空状态本身的性质与大尺度时空结构之间可能有紧密的耦合．真空态的对称性可能是宇宙学上的作用结果，粒子质量也可能含有宇宙学因素．这就给我们提出一个值得思考的问题，消极的提法是：在什么范围什么程度上可以撇开大尺度的特性，在局部范围进行自给自足的研究？积极的提法是：在局部的物质运动的现象及规律中哪一些实质上是宇宙学的结果？

参　考　文　献

[1] J. Dreitlein, *Phys. Rev. Lett.*, **33**(1974), 1243.
[2] Ya. B. Zeldovich, *Phys. Lett.*, **50B**(1974), 340; A. E. Everett, *Phys. Rev.*, **10D**(1974), 3161.
[3] 方励之，科学通报，1977，6，258.
[4] G. Domokos, M. M. Janson, S. Koresi,-Domokos, *Nature*, **257**(1975), 203.
[5] F. Gürsey, *Ann. Phys.*, **24**(1963), 211; R. Penrose, *Proc. Roy. Soc.*, **284A**(1965), 159.
[6] G. V. Bicknell, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **9**(1976), 1077.
[7] S. J. Chang, *Phys. Rev.*, **12D**(1975), 1071.
[8] S. A. Fulling, L. Parker, B. L. Hu, *Phys. Rev.*, **10D**(1974), 3905.

THE INFLUENCE OF GRAVITATION ON THE VACUUM STATE

FANG LI-ZHI

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

Using an exact cosmological solution of a simple model it is shown that the breaking of symmetry in the vacuum state may be due to cosmological effects.