

用相干光实现 Walsh 变换

陈岩松 王玉堂 李秀英

(中国科学院物理研究所)

1979 年 12 月 27 日收到

提 要

本文采用相干光方法对 Walsh 变换进行了具体的实验研究, 设计了五平面的相干光变换装置, 实现了一维八序的 Walsh 变换, 给出了变换频谱. 对于二维 Walsh 变换原则上也是适用的.

一、引 言

自从 Walsh 于 1923 年提出正交完备的 Walsh 函数体系以来, 已有许多数学和物理学工作者从事这方面的研究. 提出了数百种应用的可能性^[1]. 近年来又有人^[2]提出 Walsh 函数可用于图象的恢复和像质的改善方面. 但是, 用光学方法实现 Walsh-Hadamard 变换至今还未很好解决. 文献[3,4]提出用光学方法能够分析图象的 Walsh 频谱. 用他们的方法分析图象内的某种 Walsh 频谱成份, 需要在光路中插入与此频谱对应的滤波片. 因此, 实质上它是一种图象的相关识别, 本文根据文献[6]给出的理论数据, 采用相干光方法实现了一维八序的 Walsh 变换. 原则上它在二维变换系统中也是完全适用的.

文献[6]在理论上探讨了用多平面系统实现 Walsh 变换的问题. 计算结果表明, 至少需要四个变换平面才能比较满意地实现一维八序的 Walsh 变换, 并给出了各变换平面上的相位值. 对于多平面的变换系统, 必须考虑光能的利用效率以及光路调准的方便性. kinoform^[5] 具有很高的衍射效率, 所以能充分地利用光能, 而它的同轴再现对于光路的调准又提供了许多方便. 因此, 本文在变换系统中采用 kinoform 作变换片. 在本文的五平面一维八序的 Walsh 变换系统中, 输入平面上没有变换片, 输出平面上的变换片对记录功率谱没有影响, 所以也不放置. 在其余三个平面上各放置一个变换片.

二、变换片的设计与制作

首先考虑光波在离散取样的两平面变换系统中的传播情况(图 1). 更多平面的情况是可以类推的.

设波长为 λ 的光波从 x_0 平面出射, 经过一段自由空间传播, 到达 x_1 平面. 描述光波在自由空间传播的基尔霍夫积分核, 在傍轴近似下的一维表达式为

$$A \exp \left[\frac{jK}{2L} (x_0 - x_1)^2 \right], \quad (1)$$

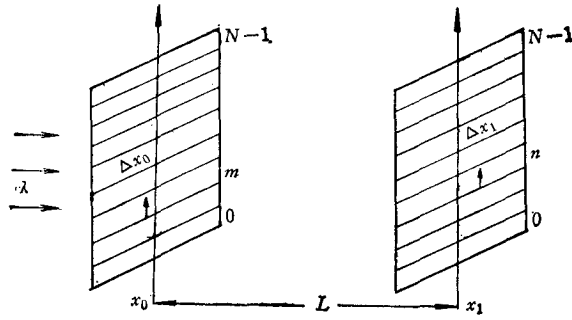


图 1 光波在两个平面间的传播情况

式中 A 是与距离 L 、波长 λ 有关的常数, $K = \frac{2\pi}{\lambda}$, L 是两个平面的间距. 在离散情况下,

$$x_0 = m\Delta x_0, \quad x_1 = n\Delta x_1 \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2)$$

Δx_0 与 Δx_1 分别为两个平面上的取样周期, N 为取样数. (2)式代入(1)式,得

$$A \exp \left[\frac{iK}{2L} (m\Delta x_0 - n\Delta x_1)^2 \right]. \quad (3)$$

取样定理要求 $\Delta x_0, \Delta x_1$ 满足如下关系式:

$$N\Delta x_0\Delta x_1/L\lambda = 1. \quad (4)$$

因为 $\frac{N\Delta x_1}{L} \cdot \frac{1}{\lambda} \simeq \text{tg } \theta \cdot K = K_x$, 所以(4)式类似于测不准关系式. 因此,只要(4)式成

立,就可以把 Δx_0 和 Δx_1 看作不可分辨内部细节的点源.

(4)式决定了取样周期 $\Delta x_0, \Delta x_1$, 以及变换平面的孔径和间距诸参量之间的关系. 一般地说,各变换平面可以有不同的取样周期,变换孔径和间距. 唯一需要的是它们之间的关系必须遵从(4)式. 在本实验中,各变换平面有相同的取样周期和孔径,它们的间距是相等的. 于是(3)和(4)式成为

$$A \exp \left[\frac{i\pi}{N} (m^2 + n^2) \right] \exp \left[\frac{-i2\pi mn}{N} \right], \quad (5)$$

$$\frac{\Delta x^2}{L\lambda} = \frac{1}{N}. \quad (6)$$

让 $(N+n)$ 代替 n , (5)式变成

$$A \exp \left[\frac{i\pi}{N} (N^2 + 2Nn + m^2 + n^2) \right] \exp \left[\frac{-i2\pi}{N} (Nm + mn) \right].$$

显然,当 N 为偶数时,上式是严格的周期函数. 用 $(N+m)$ 代替 m , 结论是相同的. 因此变换平面的孔径实际上是可以周期性延拓的. 自然,周期性延拓的结果增加了信息的冗余度和提高了系统的分辨本领,但是对于实验却带来了复杂性. 为了方便,在我们的实验中,不考虑周期延拓的情况,即各变换平面的孔径是单个周期的. 至此,放置各变换平面上的变换片的几何尺寸根据(6)式取正值: 取样周期 $\Delta x = 0.13 \text{ mm}$; 孔径 $8\Delta x = 1.04 \text{ mm}$ (x 方向), $y = 5 \text{ mm}$ (y 方向); 间距 $L = 213.65 \text{ mm}$;

文献[6]给出了实现变换所需的变换片的相位值. 为了制作上的方便,在变换片上附

加一定数量的常数背底相位,以抵消负相位,结果使得各变换片的相位在形式上也显得比较整齐(见表1)。从物理上看,加进背底相位不过是使变换片沿着轴向位移一个比光波长还要小的距离。因为这远小于间距 L 的实验误差,所以造成的影响是微乎其微的。

文献[7]中我们已经报道了通过漂白感光乳胶的方法制造 kinoform, 这里用同样的干板、配方和处理技术制备变换所需的变换片。所不同的是,在文献[7]中没有叙述漂白感光乳胶的一个特性——厚度起伏量与空间频率的关系。实验表明,漂白感光乳胶的厚度起伏量先是随着空间频率的提高而增大,此趋势到达某个峰值后,然后随着空间频率的继续提高而迅速下降,此种情况与光导热塑片的准共振频率响应特性多少有点类似。这样一来在空间频率较低的情况下,在乳胶层不同厚度的过渡处,存在一过量起伏区(图2)。本实验中变换片的取样周期是 0.13 mm , 属于低空间频率范围。因此在乳胶层的两种不同厚度的(对应两个相位值)交界处,必然存在如图2所示的过渡区,此过渡区要影响变换片的相位匹配。因此必须采取适当措施消除其影响。在干涉显微镜下观察,此过渡区的范围通常在 10 到 $20 \mu\text{m}$ 之间。因此,可以设法用掩膜将此过渡区遮挡住。

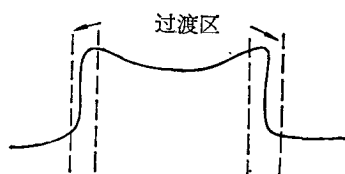


图2 低空间频率时漂白乳胶层厚度起伏示意图

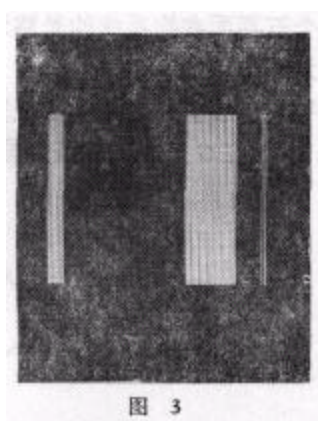


图3

表1 kinoform 的理论相位值与实验相位值

序	K_1				K_2				K_3			
	相位	加背底相位	条纹数	实际条纹	相位	加背底相位	条纹数	实际条纹	相位	加背底相位	条纹数	实际条纹
0	0.1652	2.7496	1.75	1.80	-0.0206	2.2809	1.45	1.50	1.2307	3.1395	2	2
1	0.2268	3.1416	2	2.00	-1.5161	0.7854	0.5	0.6	1.2327	3.1415	2	2
2	-1.7360	1.1788	0.75	0.80	-1.5914	0.7101	0.45	0.5	-1.9068	0.0020	0	0
3	0.02282	3.1430	2	2.00	-2.3015	0	0	0	-1.9088	0	0	0
4	-0.1652	2.7496	1.75	1.80	-0.0206	2.2809	1.45	1.5	1.2307	3.1395	2	2
5	-2.9148	0	0	0	1.6255	3.9270	2.5	2.5	1.2328	3.1416	2	1.9
6	-1.7359	1.1789	0.75	0.80	-1.5913	0.7102	0.45	0.5	-1.9068	0.002	0	0
7	-2.9133	0.0015	0	0	0.8401	3.1416	2	2	-1.9088	0	0	0

图3左边八条振幅光栅就是起这个作用的掩膜光栅,周期与长度同变换片的完全一样,为0.13 mm和5 mm,光栅的不透光部分为0.03 mm。我们让此振幅掩膜同变换片乳胶面对乳胶面贴合在一起,且仔细调节使振幅光栅的不透光部分正好遮掩住 kinoform 上的过渡区。这样,因过渡区造成的相位不匹配因素可以被排除。但是,一个新的需要分析的问题是在 kinoform 上叠加振幅掩膜(光栅)对变换是否有影响?分析表明(见附录),在 kinoform 上叠加一个相同周期的振幅掩膜,不影响 kinoform 在变换系统中的作用,仅仅损耗一些光能而已。

表1列出了三个 kinoform 的理论计算的相位值,以及与此相位值对应的干涉显微镜中的条纹读数(相对波长 6328 \AA 而言)。通过漂白乳胶制作的三个实验用的 kinoform 的相位值,也以条纹读数的形式列在表1中,干涉显微镜的读数误差是十分之一条纹。

三、Walsh 变换实验与结果

一个五平面变换系统的光路示意图和实际的实验装置表示在图4和图5中,采用输出功率为 50 mW , $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ 的 He-Ne 激光器作光源,空间滤波针孔直径为 $10 \mu\text{m}$ 。中间三个平面上放置的变换片都被紧紧地贴在如图4所示的振幅掩膜 G 上,记录信息的输入片 f_i 也贴在 G 上。 G 被装入图5所示的微调支架上,输出的功率谱由去掉镜头的相机

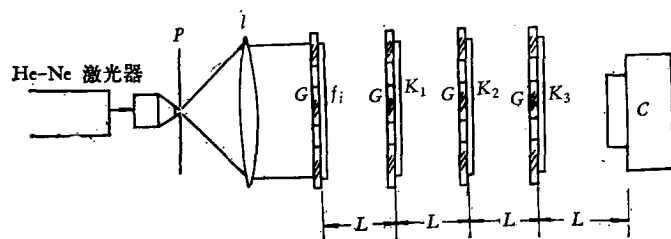


图4 五平面变换系统光路图

He-Ne 激光器; P 是滤波小孔; l 是准直透镜; G 是振幅掩膜;
 K_1, K_2, K_3 是变换片; f_i 是信息输入片; C 是记录照相机

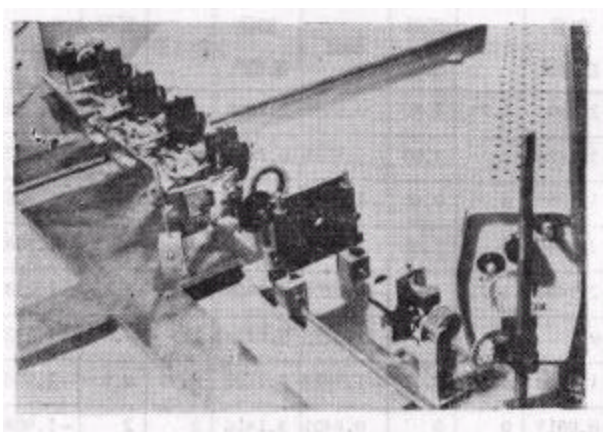


图5

C 记录。振幅掩膜 G 上方的通光孔是为调节变换片位置的调准标记, 下方的通光孔才是变换片的变换孔径。

光波在变换系统中的传播过程, 如图 4 所示, 平面光波依次透过输入片, K_1, K_2, K_3 最后到达输出平面。在每两个平面间光波经过一段自由空间传播, 传播矩阵用字母 D 表示, 因此一个五平面系统的 Walsh 变换式为

$$F_l = \sum_{j=0}^7 f_j \text{Wal}_0(j, l),$$

$$l = 0, 1, \dots, 7.$$

$$\text{Wal}_0(j, l) = [D_4][K_3][D_3][K_2][D_2][K_1][D_1],$$

这里 f_j 是输入函数, F_l 是它的 Walsh 频谱, $\text{Wal}_0(j, l)$ 是 Walsh 变换矩阵。

一个多平面变换系统内部各变换元件位置的准确调节是十分重要的, 否则即使有了理想的变换元件, 也得不到好的变换效果。我们通过激光束反射自准的办法, 使 G 与光轴垂直。利用 Talbot 效应调准间距 L , 使 L 准确地满足(6)式的要求。所谓 Talbot 效应是指用单色平面波照明光栅, 只要光栅的周期远大于照明波长, 则透过光栅的光波在距离光栅为 Z_T 的整数倍距离上, 周期性地出现原光栅的象。 $Z_T = 2d^2/\lambda$, d 为光栅周期, λ 为光波长。在掩膜 G 上作为调准标记的光栅的周期与变换片的取样周期相同, 即 $d = \Delta x_0$, 把 Z_T 的表达式同(6)式相比较, 显然 $L = 4Z_T$ 。因此第四周期的 Talbot 象平面即是下一个变换平面的位置。在这个平面上光栅的 Talbot 象与本平面的标记光栅叠加在一起。如两组光栅取向互不平行, 则将产生莫尔条纹, 转动微动装置, 直到莫尔条纹完全消失为止, 此时认为光栅已调节平行。最后调节 x 方向的精密微调机构使两组光栅像完全重合。这样依次下去, 就可以把所有的 G 精确地调节到正确的位置上。或者通过杨氏干涉方法也可以对准 G 的 x 方向位置。就是说使调准标记光栅左边的两条衍射狭缝, 对称地处于

表 2 输入函数与它的 Walsh 功率谱

f_i		F_i
Wal(0)		$\delta(0)$
Wal(1)		$\frac{1}{2} \delta(1) \quad \frac{1}{2} \delta(7)$
Wal(2)		$\frac{1}{2} \delta(2) \quad \frac{1}{2} \delta(6)$
Wal(3)		$\frac{1}{2} \delta(3) \quad \frac{1}{2} \delta(5)$
Wal(4)		$\delta(4)$

前平面产生的 0 级杨氏条纹的半腰处。上述两种调准 x 位置的方法是可以互为参考的。

在上列调准过程完毕后,用遮光器把所有 G 上的调准标记遮盖住,以免产生不必要的杂光。

为了检验此实验系统能否实现 Walsh 变换,一个简便的办法是,取含有已知最少 Walsh 频谱的函数作为输入函数,观察它的输出谱分布是否与理论一致。

设 $sal(j)$ 是奇次序的 Walsh 函数实数表示, $Wal(j)$ 是 Walsh 函数的虚数表示,二者之间存在下列关系:

$$sal(0) = Wal_0(0),$$

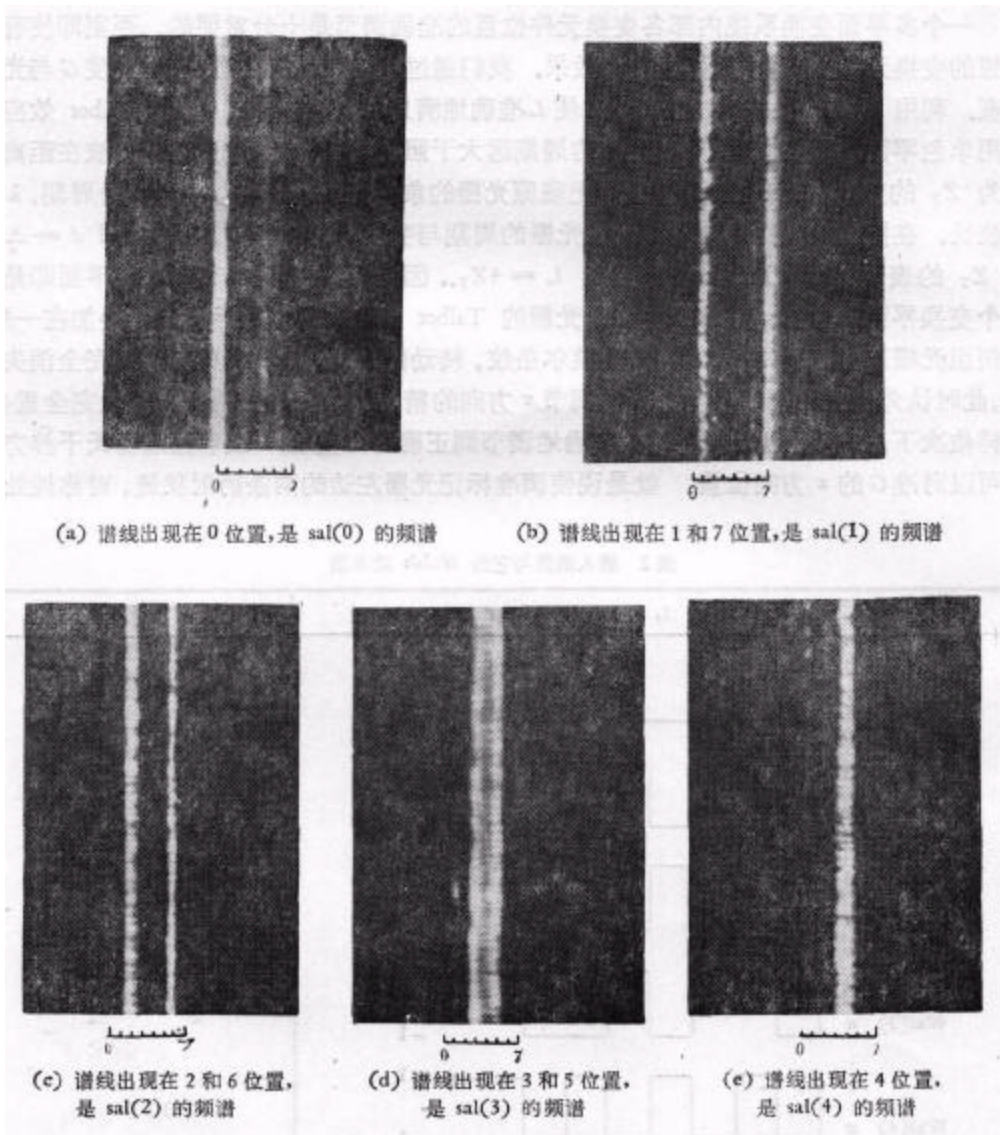


图 6

$$\text{sal}(j) = \frac{1}{2} [(1+i)\text{Wal}_0(j) + (1-i)\text{Wal}_0(N-j)],$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, \frac{N}{2}.$$

表 2 列出了五组输入函数 f_j 以及相应的 Walsh 功率谱 F_j 。采用制造变换片同样的方法,把这五组输入函数记录在同一块输入片上,通过调节输入平面上 x 方向的微调机构,可以把五组输入函数分别送到正确的输入位置上。

图 6 是在输出平面上拍摄的如表 2 中所列 f_j 的 Walsh 功率谱照片。照片下方的标尺指明八个分量频谱的空间位置。标尺每小格对应 0.13 mm 距离。结果表明,各谱线出现在所预期的位置上,说明实验基本上是成功的。

四、讨 论

实验表明,采用计算机产生的 kinoform 作光学变换器可以实现 Walsh 变换。但是照片上还存在明显的噪音,说明系统的信噪比不是很好的。影响信噪比最主要的原因是作为变换器的 kinoform 的相位无法控制到计算机的理论值精度(四位小数的精度),同时这么精确的相位也无法检测。此外,变换光路中各 kinoform 位置的精确程度也是产生噪音的重要原因, kinoform 的取样周期愈小,对位置的精确程度要求就愈高。实验中发现, x 方向上位置差 $10 \mu\text{m}$ 就会产生明显噪音。

本文的设计与实验方法推广到二维八序、一维十六序和二维十六序的变换系统中,也是适用的。对于二维系统,需要制作二维的 kinoform,那时,因为取样点增多,相位的精确控制更难以实现。文章开头提到采用 kinoform 有其优点,但是考虑到相位控制的困难性,不妨采用二元制计算机全息图作为变换器,当然缺点是离轴再现,所以光能利用率低,光路系统调节也显得比较复杂,但是它的优点是相位控制精确,信噪比高。

附 录

振幅光栅可以用疏状函数 (comb) 表示,疏状函数的傅里叶频谱仍是疏状函数,实际上任何振幅光栅的透光孔不是 δ 函数,而是有一定宽度的。本实验中是细长的矩形孔,它的傅里叶频谱是 sinc 函数。因此一块实际振幅光栅的傅里叶频谱,其频谱的周期同疏状函数的周期一致,频谱的振幅被 sinc 函数调制,结果使低频分量增强,尤其使零级谱显著增强。此效应随光栅透光比(透光部分宽度与光栅周期之比)的增大而增大。当透光比接近 1 时,光能绝大部分都集中在零级谱上。本实验设计的变换平面正好是对应于零级谱的一个整周期。对于一个纯粹的相息图即相当于透光比为 1 的情况,光能集中零级谱。在相息图上叠加振幅光栅,不过是使光能分散到几个衍射级上,对零级谱除光能降低外,别无影响。此外,振幅光栅的叠加减少了变换面上透光点的尺度,使变换的精度提高,换句话说,也就是减少因零周期内边缘效应造成的误差。

工作中张志三先生给予指导,杨国楨、潘少华同志有益讨论,在此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] J. N. Bramhall. 1974. An Annotated Bibliography on Walsh and Walsh Related Functions (Silves Spring, Maryland: The Johns Hopkins University).
- [2] M. De and L. N. Hazra. *Optica Acta*, 24 (1977). 211; 221.
- [3] B. E. Krivenkov, P. E. Tverdokhlebe and Yu. V. Chugui. *Appl. Opt.*, 14(1975), 1829.

- [4] A. A. Васильев, П. В. Вашурин, И. Н. Компанец, Квантовая электроника, 4(1977), 1917.
[5] L. B. Lesem, P. M. Hirsch, J. A. Jordan, Jr, *IBM Journal of research and development*, 13 (1969), 150.
[6] 杨国楨、潘少华, 本刊本期.
[7] 陈岩松、王玉堂、李秀英、王润娴, 激光, 6(10), (1979), 28.

THE OPTICAL REALIZATION OF WALSH TRANSFORMATION WITH COHERENT SYSTEM

CHEN YAN-SONG WANG YU-TANG LI XIU-YING

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The Walsh transformation has been experimentally carried out with coherent optical system. A five-plane coherent transformation device is designed, 1 — dimensional 8-sequence Walsh transformation is realized, the Walsh transform-spectrum is given. This design may be applied in principle to two-dimensional Walsh transformation.