

磁化等离子体中逃逸电子的临界速度*

康 寿 万 蔡 诗 东
(中国科学院物理研究所)

提 要

根据等离子体动力论,分析了在磁化等离子体中逃逸电子的临界速度,并在托卡马克参数下作了数值计算。计算表明,有磁场时,逃逸电子所受到的摩擦力,在纵向速度较大时比无磁场时的为大,这相应于逃逸电子临界速度的提高,因而高能的逃逸电子也较难产生。当磁场增大时,摩擦力略有减小。在纵向速度较高时,逃逸电子的横向速度分量对临界速度的影响较明显,横向速度越大,临界速度也越大。

一、引 言

近年来由于托卡马克装置在核聚变研究工作中引起了广泛的兴趣,大家对欧姆加热过程中产生的高能逃逸电子的问题也展开了热烈的讨论^[1]。除实验观测外,在理论方面也有许多工作,如关于逃逸电子引起的辐射和不稳定性^[2-7]以及逃逸电子的一些动力问题^[8,9]。显然,对逃逸电子的物理性质的了解与未来大型装置的发展有密切的关系。而从基础等离子体物理的观点来看,逃逸电子的现象也是重要的,不过至今对逃逸电子的了解还很有限。

逃逸电子的基础概念最初是从动摩擦的讨论开始的^[10],动摩擦是试探电子在等离子体中运动时遇到的摩擦力,这种摩擦力一般是试探电子运动速度的函数。关于动摩擦的讨论,在现有的文献中^[11],都只考虑由长程库仑碰撞引起的阻力,而外磁场对动摩擦的效应未被讨论过。

本文讨论了在磁化等离子体中的动摩擦,从而就得到了在磁化等离子体中逃逸电子的临界速度。我们同样采用试探电子模型,问题的关键是考虑外磁场对库仑碰撞过程的效应。由于电子运动轨道在强外磁场中具有高度各向异性的特征,这时讨论库仑散射理论已不能以直观的方法阐述,必须以分子运动论方面发展出来的理论为依据。

二、理 论 分 析

逃逸电子理论的基本问题之一,是临界速度问题。对于临界速度,Harrison 曾作过计算^[12],他是在下列假设下作计算的:假设等离子体不处在磁场中;场粒子的分布是麦

* 1979 年 1 月 24 日收到。

氏分布;采用试探粒子模型;试探粒子与场粒子的相互作用是二体碰撞;除屏蔽效应外不计集体效应。

上述模型下所得到的结果,已用于讨论托卡马克装置中逃逸电子的出现与产率。然而,托卡马克是一种 $\beta \ll 1$ 的强磁场装置,因而,在无磁场条件下所得到的结果在托卡马克上的适用性问题就必须加以考察。

无磁场时,两个带电粒子在库仑力作用下的运动轨迹是熟知的双曲线(图1)。在试探电子坐标系上,一个质量为 m_e 、初速为 v_0 的场电子,在试探电子附近掠过时,由于轨迹的偏移,造成在 z 方向即初速 v_0 方向的速度的减小 Δv_z , 对一束截面半径为德拜半径的场电子的动量减小求和,就是场电子对试探电子的摩擦力^[4]。再计及场离子的作用,就得到背景等离子体对试探粒子的总摩擦阻力。如果摩擦阻力随试探粒子速度的上升而下降,则在外加电场的情况下,就得到临界速度。

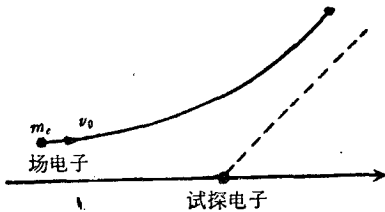


图 1

在强磁场的情况下,带电粒子绕磁力线作迴旋运动,在库仑力作用下,其轨迹和无磁场时并不相同。所以,问题必须重新研究。

根据等离子体动力论,当空间均匀的等离子体处在均匀磁场中,描述试探粒子分布函数 f_a 的变化的福克-普朗克方程为^[5]

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{c_a}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = S_a(\mathbf{p}, t), \quad (1)$$

即

$$\frac{df_a}{dt} = S_a(\mathbf{p}, t), \quad (2)$$

$S_a(\mathbf{p}, t)$ 为碰撞项。考虑轴对称情形,有: $f_a(\mathbf{p}, t) = f(p_\perp, p_\parallel, t)$, $S_a(\mathbf{p}, t) = S_a(p_\perp, p_\parallel, t)$, 此时 S_a 可表为

$$\begin{aligned} S_a(p_\perp, p_\parallel, t) = & \sum_a n_a \sum_{m, m'} \left[\left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right)_m Q_{a, a'}^{m, m'} \left\{ \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right)_m \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right)_{m'} \right\} f_a(p_\perp, p_\parallel, t) f_a(p'_\perp, p'_\parallel, t) \right. \\ & \left. \times 2\pi p'_\perp dp'_\perp dp'_\parallel 2\pi k_\perp dk_\perp dk_\parallel, \right. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} Q_{a, a'}^{m, m'} = & 2e_a^2 e_a'^2 J_m^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{Q_a} \right) J_{m'}^2 \left(\frac{k_\perp v'_\perp}{Q_{a'}} \right) \frac{\delta(k_\parallel v_\parallel + mQ_a - k_\parallel v'_\parallel - m'Q_{a'})}{k^4 |\epsilon(k_\parallel v_\parallel + mQ_a, \mathbf{k})|^2} \\ \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right)_m = & k_\parallel \frac{\partial}{\partial p_\parallel} + \frac{mQ_a}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial p_\perp}, \end{aligned}$$

式中 J_m 是 m 阶贝塞耳函数, Q 是迴旋频率, 下标 a 是场粒子组分, \mathbf{v} 是试探粒子速度, \mathbf{v}' 是场粒子速度, ϵ 是介电函数。另外,为书写简短计,除非特别说明,一般用 \sum_m 及 $\sum_{m'}$ 代表 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}$ 及 $\sum_{m'=-\infty}^{\infty}$, $\int dv'_\perp$ 及 $\int dv'_\parallel$ 代表 $\int_0^\infty dv'_\perp$ 及 $\int_{-\infty}^\infty dv'_\parallel$, $\int dk_\perp$ 及 $\int dk_\parallel$ 代表 $\int_0^\infty dk_\perp$ 及 $\int_{-\infty}^\infty dk_\parallel$, $Q_{a, a'}^{m, m'}$ 简写为 Q 。同时,我们假定等离子体由电子及质子构成,故 Q 的系数 $2e_a^2 e_a'^2$ 就

成为 $2e^4$.

下面对 \mathbf{k} 积分时作了截断, 这样就考虑了屏蔽效应. 除此之外, 本文不计其它集体效应, 于是 ϵ 可取为 $1^{[4]}$.

如果 a 代表试探电子 e , 则 (2) 式的 S_e 描述试探电子与背景等离子体带电粒子的碰撞. 试探电子的分布函数 f_e 取为 δ 函数: $f_e = \left(\frac{1}{2\pi v_{\perp 0}}\right) \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0}) \delta(v_{\parallel} - v_{\parallel 0})$, $v_{\parallel 0} > 0$. (2) 式乘以 v_{\parallel} , 并对 \mathbf{v} 求积分, 得到

$$\frac{dv_{\parallel 0}}{dt} = \int d^3 v v_{\parallel} S_e.$$

经过一些计算(见附录), 上式成为

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\parallel 0}}{dt} = & \frac{Q_e}{m_e^2 v_{\perp 0}} \sum_a n_a \sum_{m, m'} m \int d^3 k k_{\parallel} \int d^3 v' f_a \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} Q \right)_0 \\ & + \frac{1}{m_e} \sum_a n_a \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_a} \right) \sum_{m, m'} \int d^3 k k_{\parallel}^2 \int d^3 v' Q_0 \frac{\partial}{\partial v'_{\parallel}} f_a \\ & + \frac{1}{m_e} \sum_a \frac{n_a Q_a}{m_a} \sum_{m, m'} m' \int d^3 k k_{\parallel} \int d^3 v' \frac{1}{v'_{\perp}} Q_0 \frac{\partial}{\partial v'_{\perp}} f_a, \end{aligned} \quad (3)$$

Q 的下标 0 代表 Q 中的 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, (3) 式右方第一项为

$$\begin{aligned} (3)_1 = & \frac{4e^4}{m_e^2 v_{\perp 0}} \sum_a n_a \sum_{m, m'} m \int d^3 k \frac{k_{\parallel} k_{\perp}}{k^4} J_m \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp 0}}{Q_e} \right) J'_m \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp 0}}{Q_e} \right) \\ & \times \int d^3 v' f_a J_{m'} \left(\frac{k_{\perp} v'_{\perp}}{Q_a} \right) \delta(k_{\parallel} v_{\parallel 0} + m Q_e - k_{\parallel} v'_{\parallel} - m' Q_a) \\ = & \frac{e^4}{m_e^2 Q_e} \sum_a n_a \sum_{m, m'} \int d^3 k k_{\parallel} \frac{k_{\perp}^2}{k^4} (J_{m-1}^2 - J_{m+1}^2) \\ & \times \int d^3 v' f_a J_{m'}^2 \delta(k_{\parallel} v_{\parallel 0} + m Q_e - k_{\parallel} v'_{\parallel} - m' Q_a). \end{aligned}$$

设场粒子是麦氏分布, 有:

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{v}') &= f_a(v'_{\perp}) f_a(v'_{\parallel}), \\ f_a(v'_{\perp}) &= (1/(\pi(v'_a)^2)) \exp[-(v'_{\perp})^2/(v'_a)^2], \\ f_a(v'_{\parallel}) &= (1/(\sqrt{\pi} v'_a)) \exp[-(v'_{\parallel})^2/(v'_a)^2], \end{aligned}$$

其中 v'_a 是热速度. 考虑到

$$2\pi \int d v'_{\perp} v'_{\perp} f_a(v'_{\perp}) J_{m'}^2 \left(\frac{k_{\perp} v'_{\perp}}{Q_a} \right) = e^{-\mu_a} I_{m'}(\mu_a), \quad \mu_a \equiv \frac{k_{\perp}^2 (v'_a)^2}{2Q_a^2},$$

于是 (3)₁ 项成为

$$\begin{aligned} (3)_1 = & \frac{e^4}{m_e^2 Q_e} \sum_a n_a \sum_{m, m'} \int d^3 k \frac{k_{\parallel} k_{\perp}^2}{k^4 |k_{\parallel}|} (J_{m-1}^2 - J_{m+1}^2) \\ & \cdot e^{-\mu_a} I_{m'}(\mu_a) f_a \left(v_{\parallel 0} + \frac{m Q_e - m' Q_a}{k_{\parallel}} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

同理, (3) 式第二项可化为

$$(3)_2 = -\frac{4e^4}{m_e} \sum_a \frac{n_a}{(v'_a)^2} \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_e} \right) \sum_{m,m'} \int d^3k \frac{k_{\parallel}(k_{\parallel}v_{\parallel 0} + m\Omega_c - m'\Omega_a)}{k^4 |k_{\parallel}|} \cdot J_m^2 e^{-\mu_a} I_{m'}(\mu_a) f_a(v_{\parallel s}), \quad (5)$$

$v_{\parallel s} \equiv v_{\parallel 0} + (m\Omega_c - m'\Omega_a)/k_{\parallel}$. (3) 式第三项可化为

$$(3)_3 = -\frac{4e^4}{m_e} \sum_a \frac{n_a}{m_a (v'_a)^2} \sum_{m,m'} \int d^3k \frac{k_{\parallel}}{k^4 |k_{\parallel}|} m'\Omega_a J_m^2 e^{-\mu_a} I_{m'}(\mu_a) f_a(v_{\parallel s}). \quad (6)$$

试探电子受到场电子的摩擦力为 $F_{ee} = -m_e(dv_{\parallel 0}/dt)_{ee}$, 受到场离子的摩擦力为 $F_{ei} = -m_e(dv_{\parallel 0}/dt)_{ei}$. $(dv_{\parallel 0}/dt)_{ee}$ 及 $(dv_{\parallel 0}/dt)_{ei}$ 分别对应于 (4)–(6) 式中 α 取 e 及 i 的项.

为避免混淆, 把 Ω_c 改写为 $-\Omega_c$, 这样, 以下各式中的 Ω_c 都是正值. 得到

$$F_{ee} = \frac{n_e e^4}{m_e \Omega_c} \sum_{m,m'} \int d^3k \frac{k_{\parallel} k_{\perp}^2}{k^4 |k_{\parallel}|} (J_{m-1}^2 - J_{m+1}^2) e^{-\mu_e} I_{m'}(\mu_e) f_e \\ + \frac{4n_e e^4}{m_e (v'_e)^2} \sum_{m,m'} \int d^3k \frac{k_{\parallel}(k_{\parallel}v_{\parallel 0} - (m-m')\Omega_c)}{k^4 |k_{\parallel}|} J_m^2 e^{-\mu_e} I_{m'}(\mu_e) f_e \\ + \frac{4n_e e^4}{m_e (v'_e)^2} \sum_{m,m'} \int d^3k \frac{k_{\parallel}(k_{\parallel}v_{\parallel 0} - m\Omega_c)}{k^4 |k_{\parallel}|} J_m^2 e^{-\mu_e} I_{m'}(\mu_e) f_e, \quad (7)$$

$$F_{ei} = \frac{n_i e^4}{m_e \Omega_c} \sum_{m,m'} \int d^3k \frac{k_{\parallel} k_{\perp}^2}{k^4 |k_{\parallel}|} (J_{m-1}^2 - J_{m+1}^2) e^{-\mu_i} I_{m'}(\mu_i) f_i \\ + \frac{4n_i e^4}{m_e (v'_i)^2} \sum_{m,m'} \int d^3k \frac{k_{\parallel}(k_{\parallel}v_{\parallel 0} - m\Omega_c - m'\Omega_i)}{k^4 |k_{\parallel}|} J_m^2 e^{-\mu_i} I_{m'}(\mu_i) f_i \\ + \frac{4n_i e^4}{m_i (v'_i)^2} \sum_{m,m'} \int d^3k \frac{k_{\parallel}(k_{\parallel}v_{\parallel 0} - m\Omega_c)}{k^4 |k_{\parallel}|} J_m^2 e^{-\mu_i} I_{m'}(\mu_i) f_i. \quad (8)$$

上两式中, J_m 的宗量是 $k_{\perp} v_{\perp 0}/\Omega_c$, $f_e = f_e[v_{\parallel 0} - (m-m')\Omega_c/k_{\parallel}]$, $f_i = f_i[v_{\parallel 0} - (m\Omega_c + m'\Omega_i)/k_{\parallel}]$.

令

$$x = k_{\perp} \rho_e, \quad y = k_{\parallel} \rho_e, \quad l = v_{\parallel 0}/v'_e, \quad l_1 = v_{\parallel 0}/v'_i, \quad b = v_{\perp 0}/v'_e, \quad (9)$$

其中 $\rho_e = v_e/\sqrt{2}\Omega_c$, 则 (7), (8) 两式可改写为无量纲形式. x 的积分上下限 x_1, x_2 如此选择: 由于 $x = k_{\perp} \rho_e \cong \rho_e/\lambda$, 因为我们不计波所造成的集体效应, 所以 λ 在这里代表的是二体碰撞时二体的距离. 很自然地, 取德拜半径 d_e 作为 λ 的上限, 并取瞄准距离 $P_0 (P_0 = e^2/3T_e)$ 作为 λ 的下限. 于是, x 的积分上限是 ρ_e/P_0 , 下限是 ρ_e/d_e , 这就是一般计算碰撞积分时为避免对数发散所引进的上下截断. y 的积分上下限的绝对值与 x 的相同.

这样, (7) 式的无量纲形式为

$$F_{ee} = \frac{4\sqrt{2}\pi n_e e^4}{m_e (v'_e)^2} \sum_{m,m'} \int_{x_1}^{x_2} dx x^3 [J_{m-1}^2(\sqrt{2}bx) - J_{m+1}^2(\sqrt{2}bx)] e^{-x^2} I_{m'}(x^2) \\ \cdot \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \exp\left[-l^2\left(1 - \frac{m-m'}{\sqrt{2}ly}\right)^2\right] \\ + \frac{32\sqrt{\pi} n_e e^4}{m_e (v'_e)^2} l \sum_m \sum_{m'} \int_{x_1}^{x_2} dx x J_m^2(\sqrt{2}bx) e^{-x^2} I_{m'}(x^2) \\ \cdot \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{y\left(1 - \frac{2m-m'}{2\sqrt{2}ly}(1 - \delta_{m,m'})\right)}{(x^2 + y^2)^2} \exp\left[-l^2\left(1 - \frac{m-m'}{\sqrt{2}ly}\right)^2\right]. \quad (10)$$

现在转来考察(8)式, 因为 $\Omega_i \ll \Omega_e$, 故除非 $m = 0$, 否则 $m'\Omega_i$ 可略去. 再比较(8)式中第二、三两项, 即(8)₂, (8)₃ 两项, 显然有: $(8)_3/(8)_2 \sim m_e/m_i \ll 1$, 因此第三项可弃去.

当 $m = 0$ 时, 有

$$(F_{ei})_{m=0} = \frac{4n_i e^4}{m_e (v_i')^2} \sum_{m'} \int d^3k \frac{k_{\parallel} (k_{\parallel} v_{\parallel 0} - m' \Omega_i)}{k^4 |k_{\parallel}|} J_0^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp 0}}{\Omega_e} \right) \cdot e^{-\mu_i} I_{m'}(\mu_i) f_i \left(v_{\parallel 0} - \frac{m' \Omega_i}{k_{\parallel}} \right). \quad (11)$$

通过若干计算, 上式可化为(见附录)

$$(F_{ei})_{m=0} = \frac{16\pi n_i e^4}{m_e (v_i')^2} \sum_{m'=1}^{\infty} \int dk_{\perp} k_{\perp} J_0^2 e^{-\mu_i} I_{m'}(\mu_i) \cdot \int_0^{\infty} dk_{\parallel} \frac{k_{\parallel} v_{\parallel 0} - m' \Omega_i}{k^4} f_i \left(v_{\parallel 0} - \frac{m' \Omega_i}{k_{\parallel}} \right). \quad (12)$$

$m' = 0$ 的项已经略去, 这是因为当 $m' = 0$ 时, $f_i = (1/(\sqrt{\pi} v_i')) \exp[-v_{\parallel 0}^2/(v_i')^2]$, 在我们感兴趣的范围, 即 $v_{\parallel 0} \geq v_e'$ 范围, 有 $v_{\parallel 0}/v_i' \geq 42$, 因此 f_i 可弃去不计.

当 $m \neq 0$ 时, F_{ei} 中的 $m'\Omega_i$ 可略去. 仿照(12)式的证明过程, 可得到相应的 $(F_{ei})_{m \neq 0}$ 的表达式.

按照(9)式, 把 F_{ei} 写为无量纲形式, 得到

$$\begin{aligned} F_{ei} = (F_{ei})_{m=0} + (F_{ei})_{m \neq 0} = & \frac{16\sqrt{\pi} n_i e^4}{m_e (v_i')^2} l_1 \sum_{m'=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} dx x J_0^2(\sqrt{2} bx) \exp\left(-\frac{m_i T_i}{m_e T_e} x^2\right) \\ & \cdot I_{m'}\left(\frac{m_i T_i}{m_e T_e} x^2\right) \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{y - \frac{m'}{\sqrt{2} l} \frac{m_e}{m_i}}{(x^2 + y^2)^2} \exp\left[-l_1^2 \left(1 - \frac{m'}{\sqrt{2} l y} \frac{m_e}{m_i}\right)^2\right] \\ & + \frac{4\sqrt{2\pi} n_i e^4}{m_e v_i' v_i'} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} dx x^3 [J_{m-1}^2(\sqrt{2} bx) - J_{m+1}^2(\sqrt{2} bx)] \\ & \cdot \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \exp\left[-l_1^2 \left(1 - \frac{m}{\sqrt{2} l y}\right)^2\right] \\ & + \frac{16\sqrt{\pi} n_i e^4}{m_e (v_i')^2} l_1 \sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} dx x J_m^2(\sqrt{2} bx) \\ & \cdot \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{y - \frac{m}{\sqrt{2} l}}{(x^2 + y^2)^2} \exp\left[-l_1^2 \left(1 - \frac{m}{\sqrt{2} l y}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

试探粒子在等离子体内所遇到的总摩擦力为

$$F = F_{ee} + F_{ei}. \quad (14)$$

(10), (13) 和 (14) 式是逃逸电子所受摩擦力的表达式. 求出了摩擦力 F , 就可以立即得到临界速度. 因为在有了 $F(v_{\parallel 0})$ 的关系后, 只要 F 随 $v_{\parallel 0}$ 的上升而下降, 则在等离子体加上平行于磁场的电场 E 后, 对应于 eE 的速度 v_c , 就是临界速度(图 2).

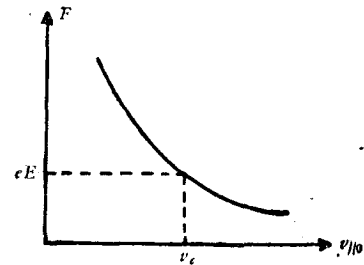


图 2

三、数值计算

在适当选取参数后,对(10),(13)式作了数值积分.数值积分是在6912计算机上作的.

参数选择如下: $n_e = n_i = 3 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$, $T_e = 1 \text{keV}$, $T_i = 0.5 \text{keV}$. 这些参数是当前托卡马克的典型实验值.

图3是 $B = 20 \text{kG}$, $b = 1$ 时的计算结果. 由于我们感兴趣的是 l 比1大的情形, 故

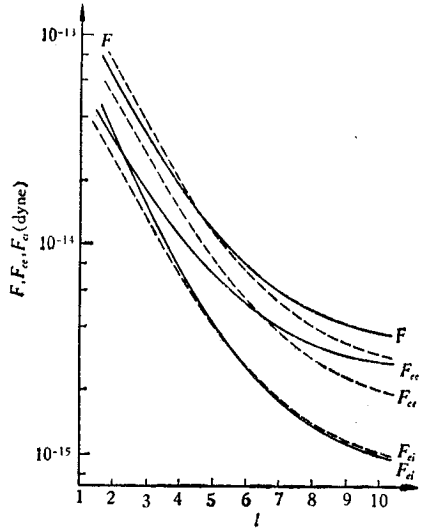


图3 有磁场时摩擦力与平行速度的关系
实线为 $B = 20 \text{kG}$; 虚线为 $B = 0$

只计算了 $v_{\parallel 0} > v'_e$ 时的摩擦力. 为了比较, 图3中画出了在相同参数下 $B = 0$ 时的结果, 这是根据文献[12]的公式计算的. 由图3可见, 在磁场中, 试探电子受到的摩擦力 F , 在 l 小时比无磁场时的有所减少, 但在 l 大时却比无磁场时的增加一个可观的百分数. 而对高能逃逸电子的形成来说, 在 l 大时的摩擦力的性质将起主要作用. 因此, 有磁场时高能逃逸电子较难产生.

这里应该指出的是, 图3中 $B = 20 \text{kG}$ 的曲线是根据本文的结果计算得到的; $B = 0$ 的曲线则是 Harrison 根据 Spitzer 的在无磁场时的理论得到的, 这两种理论并不相同. 一个是适用于 $\Omega > \nu_{\text{coll}}$; 一个是适用于 $\nu_{\text{coll}} > \Omega$, 在特征线积分时所取的轨迹不同. 因此, 不能认为在磁化等离子体情况下动力论的结果当 B 趋于零时会回到 Harrison 的结果.

图4是 $B = 50 \text{kG}$, $b = 1$ 时的结果, 图中画出 $B = 20 \text{kG}$, $b = 1$ 的曲线作比较. 可以看到, 在磁场增加时, 摩擦力略有减少.

图5是 $B = 20 \text{kG}$, $b = 0.2$ 的计算结果. 图中也画出 $B = 20 \text{kG}$, $b = 1$ 的曲线作比较. 可见, 试探电子的横向速度 $v_{\perp 0}$ 的变化, 在 l 大时对摩擦力影响较大. 横向速度越大, 高能逃逸电子将越难产生.

四、结 论

在磁化等离子体中, 逃逸电子的临界速度的计算必须计及磁场的影响. 原来在无磁场假设下得到的结果是不适用的. 从等离子体动力论出发, 不但能得到磁场对临界速度的影响, 也能考察横向速度分量对临界速度的影响.

数值计算表明, 在典型的托卡马克参数范围内, 磁场对摩擦力 F 的影响是, 当 l 较小时使 F 有所减少, 而在 l 较大时 F 有所增加, 因此高能逃逸电子比在无磁场时较难产生.

伴随磁场的上升, F 略有下降.

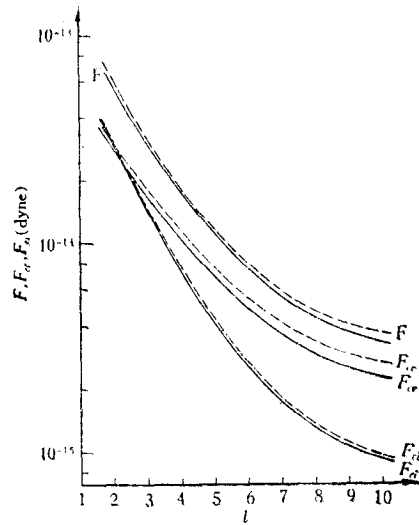


图4 磁场变化时摩擦力与平行速度的关系
实线为 $B = 50\text{kG}$; 虚线为 $B = 20\text{kG}$

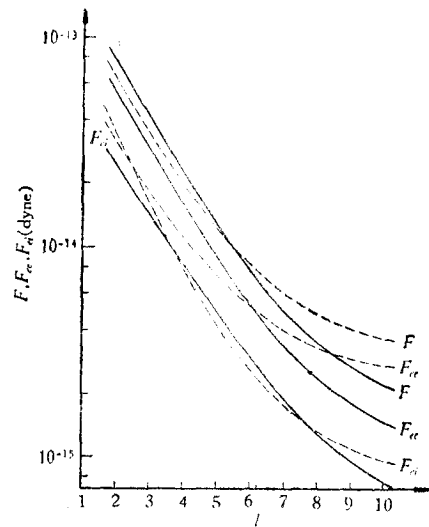


图5 横向速度分量变化时摩擦力与平行速度的关系
实线为 $b = 0.2$; 虚线为 $b = 1$

在纵向速度较大时,逃逸电子横向速度分量对动摩擦的影响较显著. 横向速度越大,摩擦力也越大. 由此可见, $v_{\parallel 0}$ 越大的逃逸电子,其垂直速度 $v_{\perp 0}$ 必定越小,也就是说, $v_{\parallel 0}$ 越大的电子,其 $v_{\perp 0}$ 的分布越狭.

作者对吴京生教授建议了这个题目和提出很多有益的意见深表感谢,并感谢夏蒙芬同志在数值计算过程中所给予的帮助.

附 录

(3) 式证明如下:

已知

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\parallel 0}}{dt} = \int d^3 v v_{\parallel} S_e = \frac{1}{m_e^2} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \sum_{m, m'} \int d^3 v v_{\parallel} \int d^3 v' d^3 k \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right)_m Q \\ \cdot \left\{ \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right)_m - \frac{m_e}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \right)_{m'} \right\} f_{\alpha}(\mathbf{v}, t) f_{\alpha}(\mathbf{v}', t). \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

(A1) 式两部分分别计算如下:

$$\begin{aligned} (\text{A1})_1 = \frac{1}{m_e^2} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \sum_{m, m'} \int d^3 v v_{\parallel} \int d^3 v' d^3 k \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right)_m Q \\ \cdot \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right)_m f_{\alpha}(\mathbf{v}, t) f_{\alpha}(\mathbf{v}', t), \end{aligned} \quad (\text{A1})_1$$

(A1)₂ 项为剩余部分.

令

$$\Phi = \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right)_m \frac{1}{2\pi v_{\perp 0}} \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0}) \delta(v_{\parallel} - v_{\parallel 0}) f_{\alpha}(\mathbf{v}', t),$$

有

$$\begin{aligned} \int d^3 v v_{\parallel} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right)_m Q \Phi &= \int d^3 v v_{\parallel} \left(k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{m \Omega_e}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \right) Q \Phi \\ &= k_{\parallel} \int dv_{\perp} 2\pi v_{\perp} [v_{\parallel} Q \Phi] \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int dv_{\parallel} Q \Phi + 2\pi m \Omega_e \int dv_{\parallel} v_{\parallel} [Q \Phi] \Big|_0^{\infty} \\ &= -k_{\parallel} \int d^3 v Q \Phi \end{aligned}$$

$$= -\frac{k_{\rho}}{2\pi v_{10}} \int d^3 v Q \left(k_{\rho} \frac{\partial}{\partial v_{\rho}} + \frac{m Q_i}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \right) \delta(v_{\rho} - v_{\rho 0}) \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0}) f_a(v', t).$$

计及

$$\begin{aligned} \int d^3 v Q \frac{\partial}{\partial v_{\rho}} \delta(v_{\rho} - v_{\rho 0}) \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0}) &= \int d v_{\rho} \frac{\partial}{\partial v_{\rho}} \delta(v_{\rho} - v_{\rho 0}) \int d v_{\perp} 2\pi v_{\perp} Q \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0}) \\ &= 2\pi v_{\perp 0} \int d v_{\rho} Q_{\perp 0} \frac{\partial}{\partial v_{\rho}} \delta(v_{\rho} - v_{\rho 0}) = -2\pi v_{\perp 0} \int d v_{\rho} \delta(v_{\rho} - v_{\rho 0}) \frac{\partial}{\partial v_{\rho}} Q_{\perp 0} \\ &= 2\pi v_{\perp 0} \int d v_{\rho} \delta(v_{\rho} - v_{\rho 0}) \frac{\partial}{\partial v'_{\rho}} Q_{\perp 0} = 2\pi v_{\perp 0} \frac{\partial}{\partial v'_{\rho}} Q_0, \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \int d^3 v Q \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \delta(v_{\rho} - v_{\rho 0}) \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0}) &= \int d v_{\rho} \delta(v_{\rho} - v_{\rho 0}) \int d v_{\perp} 2\pi Q \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0}) \\ &= -2\pi \int d v_{\rho} \delta(v_{\rho} - v_{\rho 0}) \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} Q \right)_{\perp 0} = -2\pi \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} Q \right)_0, \end{aligned}$$

于是, (A1)₁ 式成为

$$(A1)_1 = \frac{-1}{m_e^2} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \sum_{m, m'} \int d^3 k k_{\rho} \int d^3 v' f_{\alpha} \left(k_{\rho} \frac{\partial}{\partial v'_{\rho}} Q_0 - \frac{m Q_i}{v_{\perp 0}} \left(\frac{\partial Q}{\partial v_{\perp}} \right)_0 \right). \quad (A2)$$

再令

$$\Psi = \left(k \cdot \frac{\partial}{\partial v'} \right)_{m'} \frac{1}{2\pi v_{\perp 0}} \delta(v_{\rho} - v_{\rho 0}) \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0}) f_a(v', t),$$

有

$$\begin{aligned} \int d^3 v v_{\rho} \left(k \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right)_m Q \Psi &= -k_{\rho} \int d^3 v Q \Psi \\ &= -k_{\rho} \left(k \cdot \frac{\partial}{\partial v'} \right)_{m'} f_a(v', t) \int d^3 v Q \frac{1}{2\pi v_{\perp 0}} \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0}) \delta(v_{\rho} - v_{\rho 0}) \\ &= -k_{\rho} Q_0 \left(k \cdot \frac{\partial}{\partial v'} \right)_{m'} f_a(v', t), \end{aligned}$$

于是 (A1)₂ 项成为

$$(A1)_2 = \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{m_e m_{\alpha}} \sum_{m, m'} \int d^3 v' d^3 k k_{\rho} Q_0 \left(k \cdot \frac{\partial}{\partial v'} \right)_{m'} f_a(v', t). \quad (A3)$$

将 (A2), (A3) 式代入 (A1) 式得

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\rho 0}}{dt} &= \frac{-1}{m_e^2} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \sum_{m, m'} \int d^3 k k_{\rho}^2 \int d^3 v' f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial v'_{\rho}} Q_0 \\ &\quad + \frac{1}{m_e^2} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \sum_{m, m'} \int d^3 k k_{\rho} \int d^3 v' f_{\alpha} \frac{m Q_i}{v_{\perp 0}} \left(\frac{\partial Q}{\partial v_{\perp}} \right)_0 \\ &\quad + \frac{1}{m_e} \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{m_{\alpha}} \sum_{m, m'} \int d^3 k \int d^3 v' k_{\rho} Q_0 \left(k \cdot \frac{\partial}{\partial v'} \right)_{m'} f_{\alpha}. \end{aligned} \quad (A4)$$

不难看出, (A4) 式右方第一项可进一步简化为

$$\frac{1}{m_e^2} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \sum_{m, m'} \int d^3 k k_{\rho}^2 \int d^3 v' Q_0 \frac{\partial}{\partial v'_{\rho}} f_a(v', t). \quad (A5)$$

把 (A5) 式合并到 (A4) 式第三项中去, 就得到 (3) 式. (12) 式证明如下:

已有

$$(F_{ei})_{m=0} = \frac{4n_i e^4}{m_e (v'_i)^2} \sum_{m'} \int d^3 k \frac{k_{\rho} (k_{\rho} v_{\rho 0} - m' Q_i)}{k^4 |k_{\rho}|} J_0^2 e^{-\mu_i} I_{m'}(\mu_i) f_i \left(v_{\rho 0} - \frac{m' Q_i}{k_{\rho}} \right). \quad (A6)$$

(A6) 式右方第一项为

$$(A6)_1 = \frac{4n_i e^4}{m_e (v'_i)^2} \sum_{m'} \int d^3 k \frac{k_{\rho}^2 v_{\rho 0}}{k^4 |k_{\rho}|} J_0^2 e^{-\mu_i} I_{m'}(\mu_i) f_i \left(v_{\rho 0} - \frac{m' Q_i}{k_{\rho}} \right),$$

故 (A6)₁ 项为

$$\begin{aligned} (A6)_1 &= \frac{16\pi n_i e^4}{m_e (v'_i)^2} \sum_{m'=1}^{\infty} \int d k_{\perp} k_{\perp} \int_0^{\infty} d k_{\rho} \frac{k_{\rho} v_{\rho 0}}{k^4} J_0^2 e^{-\mu_i} I_{m'}(\mu_i) \\ &\quad \cdot \left[f_i \left(v_{\rho 0} - \frac{m' Q_i}{k_{\rho}} \right) + f_i \left(v_{\rho 0} + \frac{m' Q_i}{k_{\rho}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{16\pi n_i e^4}{m_e (v_i)^2} \sum_{m'=1}^{\infty} \int dk_{\perp} k_{\perp} \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} v_{\parallel 0} / k_{\parallel}^2 J_0^2 e^{-\mu_i} I_m(\mu_i) f_i \left(v_{\parallel 0} - \frac{m' \Omega_i}{k_{\parallel}} \right). \quad (A7)$$

在此我们略去了 $m' = 0$ 的项,并在最后一步略去了 $f_i(v_{\parallel 0} + m' \Omega_i / k_{\parallel})$ 的项. 因为 $m' \geq 0$ ($k_{\parallel} > 0$, $\Omega_i > 0$) 时, $f_i(v_{\parallel 0})$ 和 $f_i(v_{\parallel 0} + m' \Omega_i / k_{\parallel})$ 在感兴趣的范围内 ($v_{\parallel 0} / v_i \gg 1$) 非常小,可以略去. 再对 (A6)₂ 项作类似化简,就得到 (12) 式.

参 考 文 献

- [1] H. Knoepfel, D. A. Spong, *Nuclear Fusion*, 即将发表.
- [2] C. S. Liu, Y. Mok, *Phys. Rev. Lett.*, **38**(1977), 162.
- [3] H. P. Freund, C. S. Wu, L. C. Lee, D. Dillenburg, *Phys. Fluids*, **21**(1978), 1502.
- [4] H. P. Freund, L. C. Lee, C. S. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 1563.
- [5] B. B. Kadomtsev, O. P. Pogutse, *Ж. Э. Т. Ф.*, **53** (1968), 2025.
- [6] V. V. Parail, O. P. Pogutse, *Физ. Плазмы* **2**(1976), 125.
- [7] L. C. Lee, C. S. Wu, H. P. Freund, D. Dillenburg, J. Goedert, Institute for Physical Science and Technology, Uni. of Maryland, Report BN-893 (1978).
- [8] C. S. Liu, Y. Mok, K. Papadopoulos, F. Engelmann, M. Bornatici, *Phys. Rev. Lett.*, **39**(1977), 701.
- [9] K. Molvig, M. S. Tekula, A. Bers, *Phys. Rev. Lett.*, **38**(1977), 1404.
- [10] H. Dreicer, *Phys. Rev.*, **115**(1959), 238; **117**(1960), 329.
- [11] B. A. Trubnikov, *Rev. of Plasma Physics*, Vol. 1, p. 180 (Consultants Bureau, New York) (1965).
- [12] E. R. Harrison, *J. Nucl. Energy, Pt. C: Plasma Phys.*, **1**(1960), 105.
- [13] U. L. Klimontovich, *Statistical Theory of Non-Equilibrium Process in a Plasma*, Chap. 4 (MIT Press, Mass) (1967).
- [14] 蔡诗东、吴京生, *物理学报*, **29**(1980), 225.

THE CRITICAL VELOCITY OF RUNAWAY ELECTRONS IN A MAGNETIZED PLASMA

KANG SHOU-WAN CAI SHI-DONG (S. T. TSAI)

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The critical velocity of runaway electrons in a magnetized plasma is investigated from a kinetic theoretical approach. The results of numerical calculation are obtained for the parameter regions of tokamaks. The frictional force along the magnetic field encountered by the higher velocity runaway electrons is greater than that in a field free plasma. This means a higher critical velocity in a magnetized plasma. For an electron with large longitudinal velocity, the transverse velocity enhances the dynamic friction. This gives rise to the results of a higher critical velocity for the electrons with larger transverse velocity.