

聚变等离子体中 α 粒子的慢化-扩散*1)

霍 裕 昆

(郑州大学物理系)

提 要

本文讨论 α 粒子在聚变堆中的分布. 将 α 粒子分为高能的和热化的两部分, 并引用慢化密度概念, 得到了 α 粒子分布函数所满足的慢化-扩散方程组. 对于典型的托卡马克聚变堆参数, 在简化的条件下解析地求解了方程组, 得到了 α 粒子的分布和自加热率. 最后, 比较了用不同扩散系数的计算结果.

一、前 言

本文以托卡马克型聚变堆为例, 讨论聚变反应产生的 α 粒子在等离子体中的分布. 对于典型的聚变堆参数, α 粒子在等离子体中的慢化时间是秒的量级, 在这一时间间隔内, 粒子在空间的扩散是不能忽略的. 因此对于 α 粒子的慢化与扩散现象, 必须同时予以考虑. 过去的一些工作^[1-6]没有把这两者结合起来研究, 也就无法讨论与 α 粒子的能量和空间分布同时有关的物理现象. 例如, 一些高能 α 粒子可能在慢化的过程中由等离子体边界扩散出去, 这不仅造成高能粒子直接轰击第一壁, 而且就加热等离子体来说, 每个 α 粒子贡献的平均能量将减少, 加热能量的空间分布与 α 粒子本身的初始分布也将不一样.

我们在研究聚变等离子体中的 α 粒子慢化过程时, 考虑到了扩散现象. 由于高能 α 粒子的漂移轨道对磁面有较大的偏离, 我们在新经典输运概念的基础上, 使用了与能量有关的输运系数(见文中(10)式), 即 α 粒子随机游动的平均径向步长取为粒子漂移轨道偏离磁面距离的大小, 因此粒子的能量愈高, 步长就愈大, 并且碰撞频率也和能量有关.

本文讨论的内容并不要求限于某种特定的位形, 仅仅是为了方便, 以一个托卡马克型聚变堆为模型进行讨论. 在这种聚变堆中, 氘气的能耗是很低的, 因此在 α 粒子慢化过程中不考虑它们相互之间的作用.

由于高能 α 粒子的漂移轨道对磁面有较大的偏离, 因此存在着一些 α 粒子, 当它们形成的时候就已处于非约束轨道, 从而直接轰击第一壁, 造成了器壁的损伤和 α 粒子能量的丢失. 需要指出的是, 对于这一现象不能简单地利用计算单粒子轨道来估计其损失, 因为伴随着部分高能 α 粒子直接打到壁上, 在等离子体边界区域要形成很强的径向电场, 它的后果之一是减缓和阻止 α 粒子直接轰击壁, 这是一个很有趣的研究课题, 已超出本文的范

* 1979年1月27日收到.

1) 本文的初稿是作者在五八五研究所工作期间完成的.

围。此外,对于实际情况下的等离子体密度和温度的分布, α 粒子集中在磁轴附近产生。例如,设离子的密度和温度的分布为 $1 - (r/a)^2$ 形式, r 是磁面半径, a 是等离子体半径,磁轴上离子的温度取为 10 千电子伏,则很容易估算出 α 粒子初始分布的半宽度为 $r/a = 0.37$,仅有少于 2% 的 α 粒子是产生在 $r/a = 0.7$ 的磁面外面。对于在磁轴附近产生的 α 粒子,它们要通过扩散才能到达边界区域并轰击器壁。

二、 α 粒子的慢化-扩散方程组

设聚变 α 粒子的分布函数为 $n_\alpha(r, E, t)$, 它定义为单位体积单位能量间隔的粒子数,与通常所用的分布函数 $f_\alpha(r, v, t)$ 的关系为

$$n_\alpha(r, E, t) = \frac{4\pi v}{m} f_\alpha(r, v, t). \quad (1)$$

设磁面是一套同心圆,用同轴圆柱坐标,所研究的是对磁面平均后的量。又设 α 粒子在速度空间的分布各向同性, v 是速度, m 是 α 粒子的质量。

聚变 α 粒子的初始能量为 $E_0 = 3.5$ 兆电子伏,通过与等离子体粒子碰撞而慢化,并最终与等离子体达到热平衡。可以预测, α 粒子的能量分布应当如图 1 所示。为了便于处理,我们将它分成两部分,即高能 α 粒子部分 $n(r, E, t)$ 与热化 α 粒子部分 $n_c(r, t)$,并分别求之。后者可以用一个表征与等离子体达到热平衡的温度参数 T 描写。

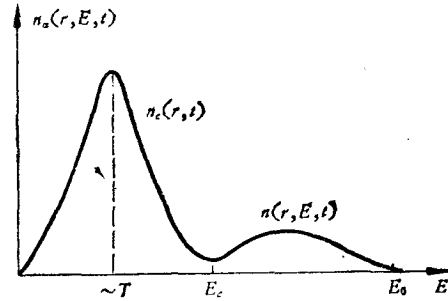


图 1 α 粒子的能量分布

1. 高能 α 粒子的分布

用线性的福克-普朗克碰撞项描述高能 α 粒子在速度空间的迁移

$$\left(\frac{\partial n(r, E, t)}{\partial t}\right)_c = -\frac{\partial}{\partial E} [K_1 n(r, E, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} [K_2 n(r, E, t)], \quad (2)$$

式中

$$K_1 = m\Gamma \left(v \frac{\partial H}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} + \frac{1}{v} \frac{\partial G}{\partial v} \right); \quad (3)$$

$$K_2 = m^2 \Gamma v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial v^2};$$

$$\Gamma = \frac{4\pi e^4 \ln \Lambda}{m^2};$$

$$H = \sum_j n_j \left(\frac{e_j}{e} \right)^2 \left(1 + \frac{m}{m_j} \right) \int d\mathbf{v}_j \frac{f_j}{g_j};$$

$$G = \sum_j n_j \left(\frac{e_j}{e} \right)^2 \int d\mathbf{v}_j g_j f_j. \quad (4)$$

上式中 n_j , m_j , e_j , v_j 和 T_j 分别是第 j 种等离子体成分粒子的密度、质量、电荷、速度和温度。用不带下标的量表示 α 粒子相应的量。 $g_j = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_j|$ 。 (2) 式的推导见附录一。如果等离子体是麦氏分布, 则有

$$H = \sum_j n_j \left(\frac{e_j}{e}\right)^2 \left(1 + \frac{m}{m_j}\right) \frac{1}{v} \operatorname{erf}(W_j),$$

$$G = \sum_j n_j \left(\frac{e_j}{e}\right)^2 v \left[\left(1 + \frac{1}{2W_j^2}\right) \operatorname{erf}(W_j) + \frac{1}{\sqrt{\pi} W_j} e^{-W_j^2} \right],$$

$$K_1 = m\Gamma \sum_j n_j \left(\frac{e_j}{e}\right)^2 \frac{1}{v_j} \left[\left(1 + \frac{m}{m_j}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-W_j^2} - \frac{m}{m_j} \frac{\operatorname{erf}(W_j)}{W_j} \right], \quad (5)$$

$$K_2 = m^2 T v^2 \sum_j n_j \left(\frac{e_j}{e}\right)^2 \frac{1}{v_j} \left[\frac{1}{W_j^3} \operatorname{erf}(W_j) - \frac{1}{W_j^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-W_j^2} \right], \quad (6)$$

式中, $W_j = v/v_j$, $v_j^2 = 2T_j/m_j$, $\operatorname{erf}(W_j)$ 是误差函数。

为了说明 (2) 式各项的物理意义, 暂时先考虑空间均匀的情况。引入符号

$$\bar{x} = \int x n(E, t) dE,$$

求得

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \int E n(E, t) dE \equiv \bar{K}_1.$$

因此, $K_1(E)$ 是单能粒子束在能量轴上的慢化速率

$$K_1(E) = \frac{dE}{d\tau}, \quad (7)$$

式中

$$\tau = \int_{E_0}^E \frac{dE}{K_1(E)} \quad (8)$$

是单能粒子束由能量 E_0 慢化至 E 所用的时间。令 $q(E, t) = -K_1(E)n(E, t)$, 则 $q(E, t)$ 是在单位体积单位时间内由于碰撞慢化而通过能量断面 E 的粒子数, 我们称之为“慢化密度”(这一概念最初是费密等人在研究裂变堆中子慢化时使用的, 由于带电粒子之间的库仑碰撞主要是小角散射, 粒子能量的改变近乎是连续的, 因此使用慢化密度这一概念更为适合)。

从 (2) 式得到

$$\frac{d}{dt} (\overline{E - \bar{E}})^2 = 2\overline{EK_1(E)} - 2\overline{EK_1(E)} + \overline{K_2(E)}, \quad (9)$$

对于单能粒子束, 上式右方前两项抵消, 因此 $K_2(E)$ 的大小反映了单能粒子束在能量轴上扩展的速率。称 (2) 式右方第一项为“能量慢化项”, 第二项为“能量扩展项”。

按照新经典输运的概念, α 粒子在慢化的同时于位置空间的扩散系数可以取作

$$D = \bar{a}\rho_s^2 v_\perp \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2}, \quad (10)$$

式中 $\rho_s = \frac{m v c}{e B_s}$ 是粒子在极向磁场 B_s 中的拉摩半径, $v_\perp = \frac{8\pi \sum_j (e e_j)^2 n_j \ln \Lambda \operatorname{erf}(W_j)}{m^2 v^3}$

是 90° 偏转的库仑散射频率, \bar{a} 是量级为 1 的系数因子。

α 粒子在聚变等离子体中产生的速率是 $n_T n_D \langle \sigma_i u_i \rangle$, 式中 σ_i 是氘氚反应截面, u_i 是氘核相对运动速度, $\langle \rangle$ 表示对离子分布函数的平均.

综合上述, 对于稳态、准稳态运行的聚变堆, 高能 α 粒子满足方程

$$\nabla \cdot D \nabla n(r, E) - \frac{\partial}{\partial E} [K_1 n(r, E)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} [K_2 n(r, E)] + n_D n_T \langle \sigma_i u_i \rangle \delta(E - E_0) = 0, \quad (11)$$

方程(11)的边界条件是

$$\left. \frac{\partial n(r, E)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad n(r, E)|_{r=a} = 0. \quad (12)$$

2. 热化 α 粒子的分布

高能 α 粒子不断地产生并被等离子体慢化而补充到热化 α 粒子部分中去, 这相当于热化 α 粒子的源, 它的大小是 $q(r, E_c) = -K_1(E_c)n(r, E_c)$, E_c 是高能 α 粒子与热化 α 粒子间的能量界面, 可以取为 $E_c \simeq 5T$.

则 $n_c(r, t)$ 应当满足方程

$$\nabla \cdot D_c \nabla n_c(r, t) + q(r, E_c) = \frac{\partial n_c(r, t)}{\partial t} \quad (13)$$

及边值条件

$$n_c(r, t)|_{r=a} = 0, \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial n_c(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (15)$$

$$n_c(r, t)|_{t=0} = 0. \quad (16)$$

(13) 式中 D_c 是热化 α 粒子的扩散系数, 按照新经典理论

$$D_c = \bar{a} \rho_c^2 v_c \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2}, \quad (17)$$

式中

$$\rho_c^2 = \frac{3mTc^2}{e^2 B_0^2}, \quad v_c = \frac{8\pi \sum_j (e e_j)^2 n_j \ln \Lambda \operatorname{erf}(W_j)}{3\sqrt{3m} T^{3/2}}, \quad W_j = \left(\frac{T m_j}{T_j m} \right)^{1/2}.$$

3. α 粒子的自加热率

设 η_α 是 α 粒子的自加热率, 定义

$$Q(E) = \int_0^a q(r, E) r dr, \quad (18)$$

得到

$$\eta_\alpha = 1 - \frac{\int_{E_c}^{E_0} \frac{dQ(E)}{dE} E dE}{E_0 Q(E_0)},$$

作分部积分, 得到

$$\eta_\alpha = \frac{E_c Q(E_c) + \int_{E_c}^{E_0} Q(E) dE}{E_0 Q(E_0)}. \quad (19)$$

三、环形聚变堆中 α 粒子的分布

对于典型的托卡马克聚变堆参数,在简化的条件下解析求解上述定解问题(11),(12)和(13)–(16)式,并计算 η_α . 设等离子体的密度、温度和电流密度的分布都是均匀的. 在作数值计算时采用如下一组参数: 等离子体中仅包含一种离子成分,它的电荷是 e_0 (e_0 是电子电量), 质量是 $m_i = 2.5m_p$ (m_p 是质子质量), α 粒子的电荷是 $e = 2e_0$, 质量是 $m = 4m_p$, 等离子体密度 $n_i = n_e = 10^{14}$ /立方厘米, 等离子体温度 $T_i = T_e = 10$ 千电子伏, 等离子体电流 $I = 4 \times 10^6$ 安, 等离子体半径 $a = 100$ 厘米, 大环半径 $R = 500$ 厘米, 库仑对数取为 $\ln \Lambda = 20$, 这组参数简称为条件 (1).

1. 高能 α 粒子的分布

首先比较 (2) 式中两项的相对大小. 高能 α 粒子满足不等式

$$\bar{v}_e \gg v > \bar{v}_i, \quad (20)$$

即 $W_e \ll 1$, $W_i > 1$. 利用误差函数 $\text{erf}(W)$ 的渐近值得到

$$K_1 \simeq -\frac{m^2 T n_e}{4\nu} \left(\frac{1}{m_i} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{m_e} W_e^3 \right), \quad K_2 \simeq -2TK_1,$$

(2) 式中两项的相对比值估计为

$$\frac{|K_1|}{|K_2|} \simeq \frac{E}{T} \gg 1,$$

略去 (11) 式中的能量扩展项, 得到

$$\nabla \cdot D \nabla n(r, E) + \frac{\partial}{\partial E} q(r, E) + \frac{1}{4} n_i^2 \langle \sigma_i u_i \rangle \delta(E - E_0) = 0. \quad (21)$$

引入无量纲自变量 $x = r/a$, 且令

$$n_j(r) = n_j(x) = n_{0j} \rho(x), \quad (22)$$

式中 n_{0j} 与 x 无关, $\rho(x)$ 是数量级为 1 的等离子体密度分布的形状因子, 均匀密度分布是

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases} \quad (23)$$

利用 (22) 式, (5) 式可写作

$$K_1 = \frac{dE}{d\tau} = \left(\frac{dE}{d\tau} \right)_0 \rho(x), \quad (24)$$

式中 $(dE/d\tau)_0$ 与 x 无关,

$$\left(\frac{dE}{d\tau} \right)_0 = m\Gamma \sum_j n_{0j} \left(\frac{e_j}{e} \right)^2 \frac{1}{v_j} \left[\left(1 + \frac{m}{m_j} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-W_j^2} - \frac{m}{m_j} \frac{\text{erf}(W_j)}{W_j} \right]. \quad (25)$$

(10) 式可以写作

$$D = D_a \rho(x) x^{-\frac{3}{2}}, \quad (26)$$

式中 D_a 与 x 无关,

$$D_a = \bar{a} \left(\frac{c}{eB_{\theta a}} \right)^2 8\pi \left(\frac{a}{R} \right)^{1/2} \sum_j \frac{(ee_j)^2 n_{0j} \ln \Lambda}{\nu} \text{erf}(W_j), \quad (27)$$

$$B_{\vartheta a} = 2I/ac.$$

引入另一无量纲自变量

$$y = \int_{E_0}^E \frac{D_a}{a^2} \frac{1}{\left(\frac{dE}{d\tau}\right)_0} dE, \quad (28)$$

则边值问题 (12), (21) 式化成

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} x^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} q(x, y) = \frac{\partial q(x, y)}{\partial y}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial q(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (30)$$

$$q(x, y) \Big|_{x=1} = 0, \quad (31)$$

$$q(x, y) \Big|_{y=0} = q_0 \equiv \frac{1}{4} n_{0i} \langle \sigma_i u_i \rangle. \quad (32)$$

现在研究 y 的物理意义. 将 (28) 式分子分母都乘以 $\int_{E_0}^E n(E) dE$, 式中 $n(E) = \frac{q_0}{\left(\frac{dE}{d\tau}\right)_0}$ 是无限大均匀等离子体中高能 α 粒子的分布函数 (即方程 (21) 略去第一项的解), 得到

$$y = \frac{\int_E^{E_0} \frac{D_a}{a^2} n(E) dE}{\int_E^{E_0} n(E) dE} \cdot \int_{E_0}^E \frac{1}{\left(\frac{dE}{d\tau}\right)_0} dE.$$

定义 $\tau_0(E) = \int_{E_0}^E \frac{1}{\left(\frac{dE}{d\tau}\right)_0} dE$, 根据 (8) 式, $\tau_0(E)$ 是 α 粒子在无限均匀等离子体中从 E_0 慢化到 E 所需要的时间. 又定义 $1/t_D(E) = \int_E^{E_0} (D_a/a^2) n(E) dE / \int_E^{E_0} n(E) dE$, 它是 D_a/a^2 用 $n(E)$ 作权重函数的平均值, 而 a^2/D_a 是 α 粒子扩散漏失时间的度量, 因此 y 是慢化时间与扩散漏失时间比值的度量. 从 (8) 和 (28) 式可见, E, τ, y 是互相一一对应的, 都可以作为描述慢化过程的自变量.

用条件 (1) 及 (20) 式, 求得

$$y = y_0 \left[\left(1 + \frac{N_1}{3}\right) \ln \frac{\varepsilon_0 - \sqrt{\varepsilon_0 + 1}}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon + 1}} + \left(1 - \frac{2}{3} N_1\right) \ln \frac{\sqrt{\varepsilon_0 + 1}}{\sqrt{\varepsilon + 1}} + \frac{2}{\sqrt{3}} N_1 \left(\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\varepsilon_0 - 1}}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\varepsilon - 1}}{\sqrt{3}} \right) \right],$$

式中

$$y_0 = 2\bar{a} \left(\frac{c}{acB_{\vartheta a}} \right)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^{1/2} mT, \quad N_1 = \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/3} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{2/3},$$

$$\varepsilon = \frac{E}{E_k}, \quad \varepsilon_0 = \frac{E_0}{E_k}, \quad E_k = \left(\frac{3\sqrt{\pi} m_e}{4m_i} \right)^{2/3} \frac{m}{m_e} T.$$

当 $E > E_k$, 对 α 粒子的慢化, 电子的贡献是主要的; 当 $E < E_k$, 离子的贡献是主要的.

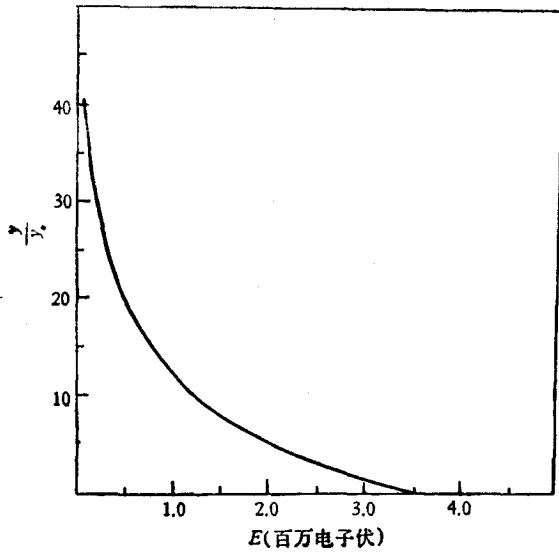


图2 y - E 曲线

$[y_0 = 0.583 \times 10^{-3}$, 参数见条件(1)]

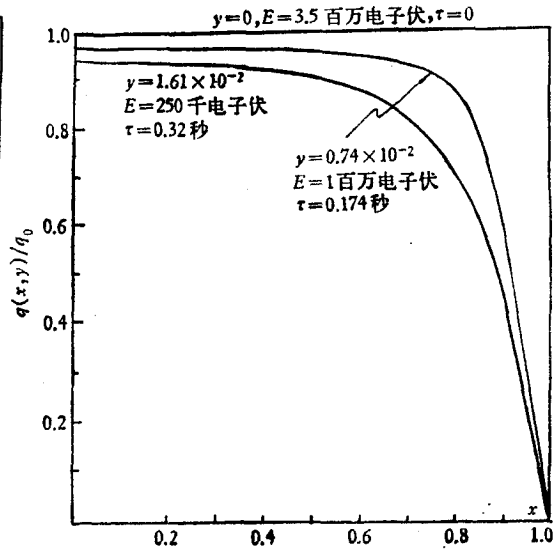


图3 慢化密度 $q(x, y)$

图2 示出 y 随 E 的变化。

用分离变量法解问题 (29)–(32) 式。令 $q(x, y) = R(x)P(y)$, 则

$$\frac{1}{xR(x)} \frac{d}{dx} x^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} R(x) = \frac{1}{P(y)} \frac{d}{dy} P(y) = -\alpha^2,$$

得到 $P(y) = e^{-\alpha^2 y}$ 及本征值方程

$$\frac{d^2}{dx^2} R(x) - \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} R(x) + \alpha^2 x^{3/2} R(x) = 0,$$

作变换 $x = u^{4/7}$, $R(u) = u^{3/7} S(u)$, 则 $S(u)$ 满足贝塞耳方程

$$\frac{d^2}{du^2} S(u) + \frac{1}{u} \frac{d}{du} S(u) + \left[\left(\frac{4}{7} \alpha \right)^2 - \frac{(3/7)^2}{u^2} \right] S(u) = 0.$$

考虑到 (30) 式得到

$$R(x) = x^{3/4} J_{-3/7} \left(\frac{4}{7} \alpha x^{7/4} \right),$$

令 K_i 是 $J_{-3/7}(x)$ 的第 i 个零点, 用 (31) 式得到

$$q_i(x, y) = x^{3/4} J_{-3/7}(K_i x^{7/4}) e^{-\alpha_i^2 y},$$

本征值 $\alpha_i = (7/4)K_i$.

作傅里叶-贝塞耳展开, 以满足 (32) 式, 求得边值问题的解

$$q(x, y) = \sum_i f_i x^{3/4} J_{-3/7}(K_i x^{7/4}) e^{-\alpha_i^2 y}, \tag{33}$$

式中 $f_i = 2q_0 / K_i J_{4/7}(K_i)$.

图3 根据 (33) 式给出了 $q(x, y)$ 在不同的 y 值下随 x 变化的曲线。因为 y, E, τ 是互为一一对应的, 也可以从另一个角度来看图3: 在 $\tau = 0$ 时刻, 空间产生一簇能量为 E_0 的 α 粒子, 其初始分布对应图3上 $y = 0$ 曲线。图3 相当于追踪这群 α 粒子给出在不

同的慢化时刻它的空间分布. 由图 3 可看到伴随着慢化过程的扩散漏失现象.

2. 热化 α 粒子的分布

用 (22) 式, (17) 式可以写作 $D_c = D_{ca}\rho(x)x^{-3/2}$, 式中 D_{ca} 与 x 无关. 将上式及 (33) 式代入方程 (13), 得到

$$\frac{D_{ca}}{a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} x^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} n_c(x, t) + \sum_i f_i x^{3/4} J_{-3/7}(K_i x^{7/4}) e^{-\alpha_i^2 y_c} = \frac{\partial n_c(x, t)}{\partial t}, \quad (34)$$

式中

$$n_c(x, t) = n_c(r, t).$$

令

$$n_c(x, t) = \sum_i x^{3/4} J_{-3/7}(K_i x^{7/4}) B_i(t)$$

并代入 (34) 式, 式中 $B_i(t)$ 待定, 利用恒等式

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} x^{3/4} J_{-3/7}(K_i x^{7/4}) = -\alpha_i^2 x^{3/4} J_{-3/7}(K_i x^{7/4})$$

以及贝塞耳函数的正交性, 得到 $B_i(t)$ 满足的方程为

$$\frac{d}{dt} B_i(t) + D_{ca} \left(\frac{\alpha_i}{a} \right)^2 B_i(t) - f_i e^{-\alpha_i^2 y_c} = 0. \quad (35)$$

方程 (35) 满足条件 (16) 式的解为

$$B_i(t) = (1 - e^{-\beta_i^2 t}) \frac{f_i e^{-\alpha_i^2 y_c}}{\beta_i^2},$$

式中 $\beta_i^2 = D_{ca}(\alpha_i/a)^2$. 最后, 求得方程 (34) 满足边值条件 (14)–(16) 式的解为

$$n_c(x, t) = \sum_i \frac{f_i}{\beta_i^2} e^{-\alpha_i^2 y_c} x^{3/4} J_{-3/7}(K_i x^{7/4}) (1 - e^{-\beta_i^2 t}). \quad (36)$$

(36) 式中 $i=1$ 项的时间常数最大, β_1^2 的数量级为秒, 因此对于准稳态装置, 经过几秒钟的过渡过程后, 热化 α 粒子的密度趋向于恒定的分布,

$$n_c(x) = \sum_i \frac{f_i}{\beta_i^2} e^{-\alpha_i^2 y_c} x^{3/4} J_{-3/7}(K_i x^{7/4}).$$

3. 聚变等离子体中 α 粒子的自加热率

把 (33) 式代入 (18) 和 (19) 式, 求得

$$Q(y) = \frac{8}{7} a^2 q_0 \sum_i \frac{1}{K_i^2} e^{-\alpha_i^2 y},$$

以及

$$\eta_\alpha = 0.86.$$

附 录 一

(2) 式的推导

我们从福克-普朗克碰撞项的一般表达式出发 [见文献 [7] 的 (21) 式] 并推广到任意电荷比的情形

$$\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = - \frac{\partial}{\partial v} \cdot \left(f \frac{\partial H}{\partial v} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v \partial v} : \left(f \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial v} \right),$$

设 α 粒子及等离子体粒子在速度空间的分布是各向同性, 即 f, H, G 都仅是 v 的函数, 利用下列恒等式:

$$\frac{\partial}{\partial v} L(v) = \frac{v}{v} \frac{\partial}{\partial v} L(v),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v \partial v} L(v) = \left(1 - \frac{vv}{v^2}\right) \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} L(v) + \frac{vv}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} L(v),$$

式中 $L(v)$ 是 v 的任意函数, 得到

$$\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = -\frac{\partial}{\partial v} \cdot \left(f \frac{v}{v} \frac{\partial H}{\partial v}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v \partial v} : \left\{ f \left[\left(1 - \frac{vv}{v^2}\right) \frac{1}{v} \frac{\partial G}{\partial v} + \frac{vv}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \right] \right\},$$

再利用下列恒等式:

$$\frac{\partial^2}{\partial v \partial v} : \left(L(v) \frac{vv}{v^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^3 \left[v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{L(v)}{v^2} \right) + 4 \frac{L(v)}{v^2} \right] \right\},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v \partial v} : (L(v) \mathbf{1}) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{\partial L}{\partial v} \right),$$

得到

$$\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \left[-v^2 \frac{\partial H}{\partial v} + \frac{v^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} + v \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} - \frac{\partial G}{\partial v} \right] f + \frac{v^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right\},$$

用(1)式将 f 换成函数 n , 并作下列变换: $\partial/\partial v \Rightarrow mv\partial/\partial E$, 得到

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c = m\Gamma \frac{\partial}{\partial E} \left[-\left(v \frac{\partial H}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} + \frac{1}{v} \frac{\partial G}{\partial v}\right) n + \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{1}{2} m v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} n \right) \right].$$

附 录 二

文献 [8] 给出 α 粒子扩散系数的另一形式

$$D' = \bar{a} \frac{\rho_v^2}{\tau_{11}} \left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}, \quad (\text{A1})$$

式中

$$\tau_{11} = \frac{mv^3}{4\pi \sum_i \frac{(ee_i)^2 n_i \ln \Lambda}{\mu_i} \left(\text{erf}(W_i) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} W_i e^{-W_i^2} \right)}$$

是粒子沿初始速度方向分量的慢化时间, $\mu_i = m_i m / (m_i + m)$.

以下用 D' 代替 (11) 式中的 D , 并计算相应的 α 粒子分布和自加热率. 为了区别起见, 这里有关的量都加上标 α .

在均匀密度、温度和电流分布的条件下, 将 (A1) 式改写为 $D' = D'_0 \rho(x) x^{-1/2}$, 式中

$$D'_0 = \bar{a} \left(\frac{c}{eB_{0z}}\right)^2 4\pi \left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} \sum_i \frac{(ee_i)^2 n_{0i} \ln \Lambda m \left(\text{erf}(W_i) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} W_i e^{-W_i^2} \right)}{\mu_i v}$$

与 x 无关. 相应的慢化-扩散方程为

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} x^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} q'(x, y') = \frac{\partial q'(x, y')}{\partial y'},$$

边值条件同 (30)–(32) 式, 式中

$$y' = \int_{E_0}^E \frac{D'_0}{a^2} \frac{1}{\left(\frac{dE}{d\tau}\right)_0} dE$$

$$= y'_0 \left[\frac{E_0 - E}{T} + \left(1 + \frac{N_1}{3}\right) \ln \frac{\varepsilon_0 - \sqrt{\varepsilon_0 + 1}}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon + 1}} + \left(1 - \frac{2}{3} N_1\right) \ln \frac{\sqrt{\varepsilon_0 + 1}}{\sqrt{\varepsilon + 1}} \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} N_1 \left(\text{arctg} \frac{2\sqrt{\varepsilon_0 - 1}}{\sqrt{3}} - \text{arctg} \frac{2\sqrt{\varepsilon - 1}}{\sqrt{3}} \right) \right],$$

$$y'_0 = \left(\frac{c}{acB_{0z}}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} mT.$$

上述边值问题的解为

$$q'(x, y') = \sum_i f'_i x^{1/4} J_{-1/2}(K'_i x^{3/4}) e^{-a_i^2 y'},$$

式中 $K'_i = (4/5)\alpha'_i$ 是 $J_{-1/2}(x)$ 的第 i 个零点, $f'_i = 2q_0/K'_i J_{3/2}(K'_i)$. α 粒子自加热率 $\eta'_\alpha = 0.79$, 它与前面用 D 计算的 η_α 值相差不大, 这是因为自加热率是一种积分量, 它的大小与 α 粒子分布函数的整体有关. 由慢化密度的定义得到 $n(r, E) = -q(r, E)/(dE/d\tau)$, 其中, $q(r, E)$ 是随 E 慢变化的函数, 而 $dE/d\tau \propto (1/\sqrt{\varepsilon})(1 + \varepsilon^{3/2})$, 当 $\varepsilon = 2^{-2/r}$ 时, $dE/d\tau$ 取极小值, 因此高能 α 粒子的分布主要集中在 $E \sim E_k$ 附近. 而 $D/D' \simeq \frac{R}{r} \frac{2m_i}{m} / \left(\frac{m_i}{\mu_i} + \varepsilon^{3/2} \right)$, 因此当 $\varepsilon \gg 1$, $D' \gg D$; $\varepsilon \leq 1$, $D' \sim D$. 这表明, 在 α 粒子最集中的地方, D' 与 D 相差不大.

参 考 文 献

- [1] Д. В. Сивухин, *Вопросы теории плазмы*, 4 (1964).
- [2] D. J. Sigmar, G. Joree, *Nucl. Fusion*, 11(1971), 447.
- [3] T. Kammash *et al.*, *Nucl. Fusion*, 13(1973), 133.
- [4] R. W. Conn *et al.*, *Proc. Symp. Austin (1972)*, conf-721111.
- [5] W. Horton, *Nucl. Fusion*, 13(1973), 753.
- [6] T. Kammash *et al.*, *Nucl. Fusion*, 14(1974), 909.
- [7] M. N. Rosenbluth, W. M. MacDonald, D. L. Judd, *Phys. Rev.*, 167(1957), 1.
- [8] A. Nocentini *et al.*, *Proc. 6th European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Moscow (1973)*, p. 329.

THE SLOWING DOWN-DIFFUSION OF α PARTICLES IN FUSION PLASMA

HO YU-KUN

(Physics Department, Chengchow University)

ABSTRACT

This article discusses the distribution of α particles in fusion reactor. We divide these particles into two parts: i.e., a high energy part and a thermalized part, and introduce the concept of slowing down density. A set of slowing down—diffusion equations satisfied by distribution function of α particles are then obtained. For the parameters of typical tokamak fusion reactor, the set of equations are solved analytically with simplified conditions. Thus the distribution of α particles and the rate of self heating are obtained. Finally, the results computed by using different diffusion coefficients are compared.