

玻璃自聚焦板的成像研究

程 科 华

(中国科学院西安光学精密机械研究所)

1980 年 5 月 10 日收到

提 要

本文研究了光线在自聚焦板内的传播、成像原理及其应用。

1968 年日本研制成玻璃自聚焦透镜,这种透镜的折射率在轴上最高,从中心到边缘折射率抛物形地减少。对于这种圆柱状透镜内的光线传播、成像原理等讨论较多^[1,2],现已在许多方面应用。我们研制成的自聚焦板,将其互相垂直相对排列,每个交点(或网格)即是一个透镜。

一、玻璃自聚焦板的制作

将一块重量百分组成为 48% SiO_2 , 20% PbO , 12% NaO 和 20% Tl_2O 的玻璃板浸泡在盛有熔盐的盐池炉内,在适当的温度下,使玻璃内的 Tl^+ 离子与 K^+ 离子交换来制作。通过交换,导致玻璃中的 Tl^+ 离子从中心到边界逐渐减少, K^+ 离子从中心到边界逐渐增加。由于 Tl^+ 离子的折射率比 K^+ 离子折射率高,因此,导致玻璃板内折射率在厚度方向从中心到边界逐渐减少。玻璃板的折射率分布是与玻璃成份、厚度、盐的成分、扩散温度和扩散时间有关。实验条件是:玻璃厚度为 1.72 mm,熔盐成分为一定比例的 PbCl 和 KCl ,交换温度为 620°C ,交换时间为 3 小时 3 分;玻璃厚度为 1.1 mm,其交换时间为 1 小时 25 分¹⁾。

二、测量方法和结果²⁾

采用双光束干涉仪测量样品的干涉条纹。该仪器是利用双光束干涉原理获得干涉条纹的。其光路如图 1 所示。

图 2 是单片自聚焦板的干涉条纹照片,它有波浪形的干涉纹。

图 3 是两块互相垂直的自聚焦板的干涉环照片。其干涉环是和圆柱状自聚焦透镜的干涉环相似,因此,具有成像特性。通过认真加工后,干涉环会更好些。

1) 刘功成、徐晓授作交换实验。

2) 董新意测量。

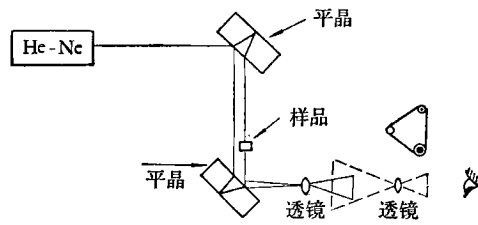


图1 双光束干涉仪光路图

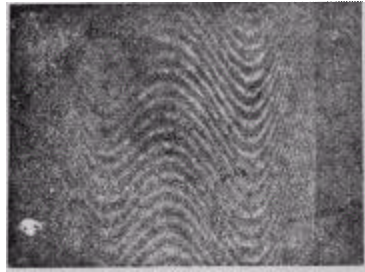


图2 单片自聚焦板的干涉条纹

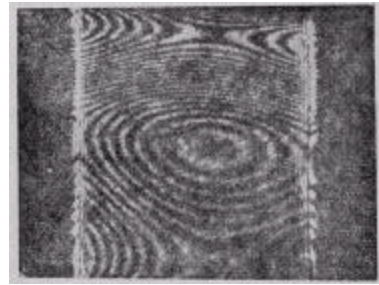


图3 两块互相垂直的自聚焦板干涉环

三、空间直角坐标系中的光线方程

光线的矢量微分方程的形式为

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n, \quad (1)$$

式中 $n(x, y, z)$ 是折射率函数; ds 是无限小的弧长; \mathbf{r} 表示光线上任一点的位置矢量。

但是, 在多数情况下, 方程(1)是不容易求解的。不过, 若只研究光线与 z 轴夹角较小的情况, 则可令 $ds \simeq dz$, 于是, 光线方程就变为

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right) = \nabla n. \quad (2)$$

(2) 式就是所谓的近轴方程。

空间直角坐标系中的光线方程则为

$$\frac{d}{dz} \left[n \left(\frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 \right) \right] = \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (3)$$

四、光线在自聚焦板内的传播

所谓自聚焦板, 如图4所示, 其折射率在 ox 轴对称方向具有如下关系:

$$n = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} Ax^2 \right), \quad (4)$$

式中 n_0 是在平面 $oy'y''z'$ 上的折射率, 其值为常数, A 是分布常数。

n 与 y 轴和 z 轴的变化无关, 只与 x 轴变化有关。

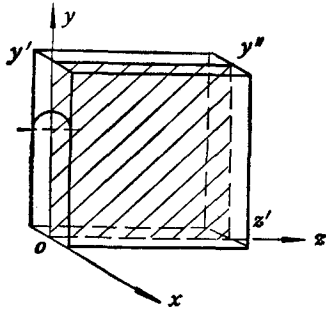
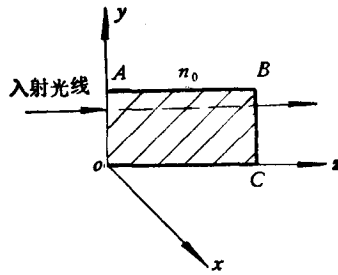


图 4 自聚焦板

图 5 光线垂直于 $oABC$ 平面入射的传播

下面讨论光线以不同角度入射的传播。

当光线垂直于 $oABC$ 平面入射时,如图 5 所示,这时, $n = n_0 =$ 常数。根据方程 (3) 有

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 0, \quad (5)$$

$$x = Az + B. \quad (6)$$

显然,光线是直线穿过自聚焦板。

当光线垂直于 oy 轴而与 ox 轴成一定角度入射时,光线是在与 oy 轴垂直的变折射率平面 $x_1x_2x_3x_4$ 内传播。因为, n 与 y 轴和 z 轴无关,所以,根据方程 (3), 则有

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (7)$$

又

$$n = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} Ax^2 \right),$$

所以

$$\frac{\partial n}{\partial x} = -n_0 Ax.$$

因为

$$\left| \frac{1}{2} Ax^2 \right| \ll 1,$$

所以

$$n \simeq n_0, \quad \frac{d^2x}{dz^2} = -Ax. \quad (8)$$

上式的通解为

$$x = c_1 \cos(\sqrt{A}z) + c_2 \sin(\sqrt{A}z). \quad (9)$$

其边界条件为

$$z = 0 \text{ 时, } x = 0 \text{ (入射光线的位移);}$$

$$z \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{dx}{dz} = p \text{ (入射光线的斜率).}$$

则

$$x = \frac{p}{\sqrt{A}} \sin(\sqrt{A} \cdot z). \quad (10)$$

由此可知,光线在这个平面内以正弦曲线传播. 如图 6 所示.

当光线与 ox 轴和 oy 轴均不相垂直的情况入射时,光线仍在一变折射率平面内传播,如图 7 所示,其折射率变化为

$$n' = n^0 \left(1 - \frac{1}{2} A' x'^2 \right). \quad (11)$$

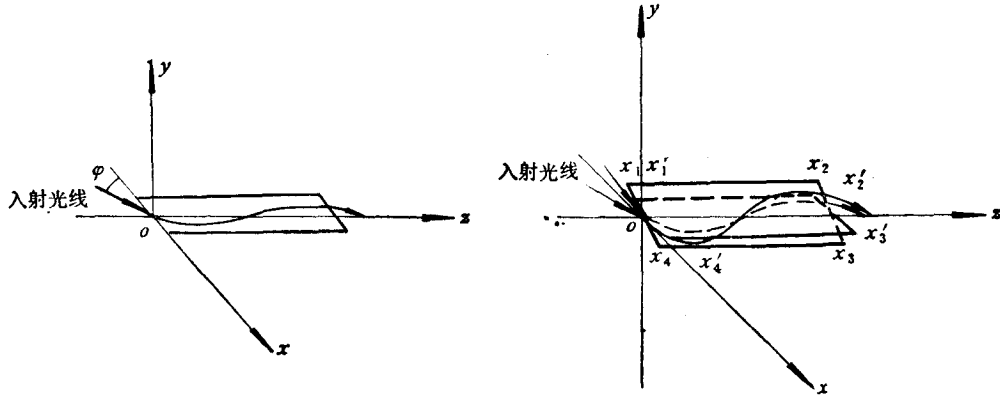


图 6 光线垂直于 oy 轴而与 ox 轴成一定角入射的传播 图 7 光线与 ox 轴和 oy 轴均不相垂直时入射的传播

因为,平面 $x_1x_2x_3x_4$ 和平面 $x'_1x'_2x'_3x'_4$ 之间夹角为 θ , 且直线 x_1x_2 和 $x'_1x'_2$ 上的折射率相等(因为,玻璃板两大面上折射率相等). 即

$$n' = n, \quad x = x' \cos \theta, \quad A = A' / \cos \theta.$$

光线方程的解为

$$x' = c'_1 \cos(\sqrt{A'}z) + c'_2 \sin(\sqrt{A'}z) \quad (12)$$

或

$$x = \cos \theta [c'_1 \cos(\sqrt{A'}z) + c'_2 \sin(\sqrt{A'}z)]. \quad (13)$$

边界条件 $z = 0$ 时, $x' = 0$; $z \rightarrow 0$ 时, $dx/dz = p'$.

则

$$x' = \frac{p'}{\sqrt{A'} \cos \theta} \sin(\sqrt{A'}z), \quad (14)$$

$$x = \frac{p'}{\sqrt{A'}} \sin(\sqrt{A'}z). \quad (15)$$

这时,光线仍以正弦曲线传播,但其形状不同,振幅相差 $1/\sqrt{\cos \theta}$.

五、光线通过两块互相垂直的自聚焦板的传播

自聚焦板互相垂直是指具有折射率分布的面互相垂直,如图 8 所示. 其中板 I[#] 竖直放置,板 II[#] 横向放置,板 I[#] 和 II[#] 紧密接触互相垂直.

首先,讨论光线入射时的传播. 根据上面分析可知,垂直于 $yoze$ 平面的光线在板 I[#] 是直线传播. 如图 9 所示.

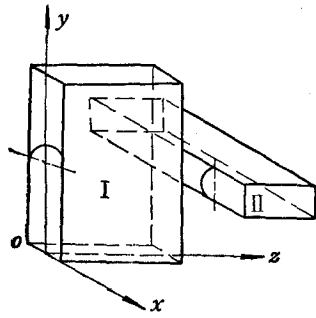


图 8 两块互相垂直的自聚焦板的放置

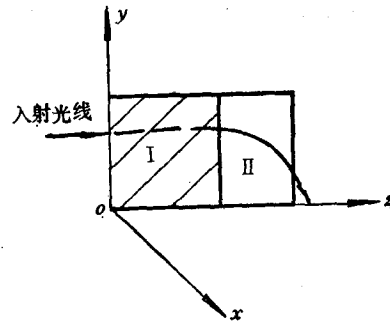


图 9 光线垂直入射时的传播

对于板 II[#], 折射率是 oy 方向变化, 其形式为

$$n = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} A y^2 \right). \quad (16)$$

因为, 玻璃组成相同, 交换条件相同, 所以板 I[#] 和板 II[#] 的 A 值相同. 同时, 板 II[#] 中 n 的变化与 x 和 z 无关, 因此光线方程的解为

$$y = c_1 \cos(\sqrt{A} z) + c_2 \sin(\sqrt{A} z), \quad (17)$$

其边界条件为

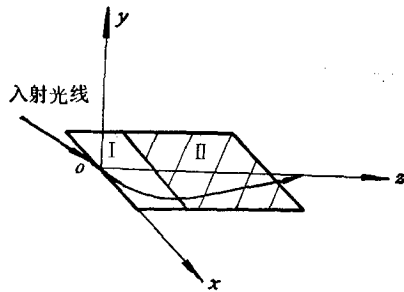
$$z = 0 \text{ 时, } y = y_1; \quad z \rightarrow 0 \text{ 时, } dy/dz = 0.$$

所以

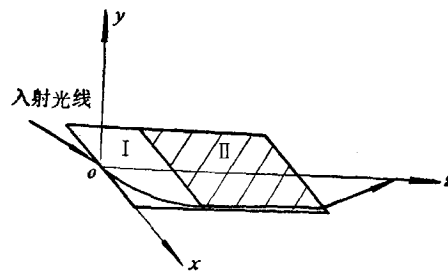
$$y = y_1 \cos(\sqrt{A} z). \quad (18)$$

因此, 光线在板 II[#] 的 yoz 平面内以余弦曲线传播.

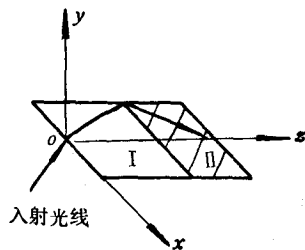
其次, 讨论光线垂直于 oy 轴而与 ox 轴成一定角度入射时的传播. 这时, 光线在板 I[#] 内以正弦曲线传播, 在板 II[#] 内以直线传播. 板 I[#] 厚度不同, 其情况也不一样.



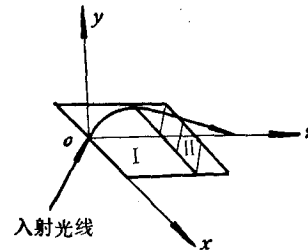
(a) 板 I[#] 厚度小于 1/4 波长时光线的传播



(b) 板 I[#] 厚度等于 1/4 波长时光线的传播



(c) 光线在板 II[#] 内与 oz 轴相交



(d) 光线在板 II[#] 外与 oz 轴相交

图 10

当板 I[#] 厚度小于 1/4 周长时, 光线在板 I[#] 内正弦曲线传播, 在板 II[#] 内直线传播, 并在板 II[#] 的出射端折射与 oz 轴相交, 如图 10(a) 所示。

当板 I[#] 厚度等于 1/4 周长时, 光线的传播如图 10(b) 所示。其特点是在板 II[#] 内光线平行于 oz 轴。

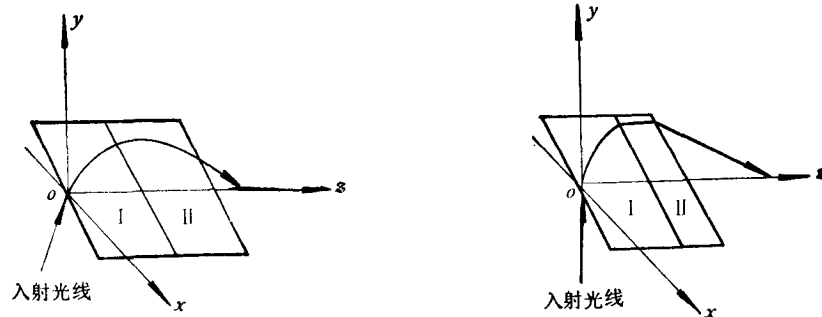
当板 I[#] 厚度在 1/4—1/2 周长之间时光线的传播如图 10 [(c) 和 (d)] 所示。光线可能在板 II[#] 内或板 II[#] 外与 oz 轴相交。

最后, 讨论光线与 ox 轴和 oy 轴均不垂直入射时的传播。这时, 板 I[#] 和板 II[#] 合成为一个变折射率平面。其光线传播情况仍决定于板 I[#] 的厚度。

当板 I[#] 厚度小于 1/4 周长时, 光线的传播如图 11(a) 所示。

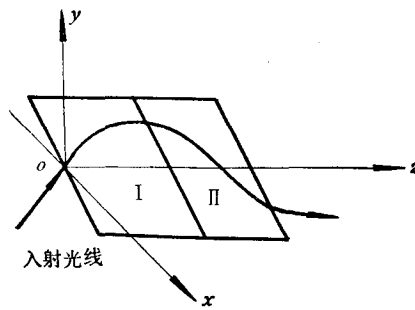
当板 I[#] 厚度等于 1/4 周长时, 光线的传播如图 11(b) 所示。光线在板 I[#] 和板 II[#] 界面时的方向与 oz 轴平行, 故在板 II[#] 的传播是直线传播。

当板 I[#] 厚度在 1/4—1/2 周长时, 光线的传播如图 11(c) 所示。这和图 11(a) 一样。



(a) 板 I[#] 厚度小于 1/4 周长时光线的传播

(b) 板 I[#] 厚度等于 1/4 周长时光线的传播



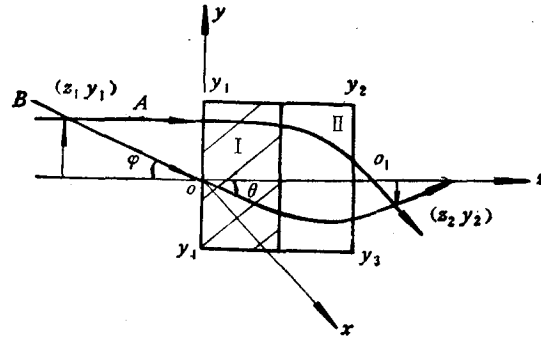
(c) 板 I[#] 厚度在 1/4—1/2 周长之间时光线的传播

图 11

六、自聚焦板成像讨论

首先讨论光线垂直于平面 $y_1y_2y_3y_4$ 入射时的情况。

如图 12 所示。我们把入射端面和板 I[#] 的轴的交点, 称为目标空间的原点 o , $z < 0$ 的空间为折射率均匀的空间, 其折射率为 1。板 I[#] 空间的折射率为 n_1 (此时, n_1 是均匀介

图 12 光线垂直于 xoy 平面入射时的成像分析

质),而板 II[#] 空间的折射率为 n_2 (此时, n_2 是抛物形变化的空间). 把 o_1 称为象空间的原点,它是轴与出射端的交点,而出射端面的空间为折射率均匀的空间,其值为 1.

现在研究物空间中物点 (z_1, y_1) 发出的两条光线 (此处 $z_1 \leq 0$), 并找出光线在象空间的交点,即象点.

这里讨论 A 光线和 B 光线的运动 (如图 12 所示). 对于 A 光线, 在板 I[#] 内是直线传播; 在板 II[#] 内可用方程 (14) 描写, 是余弦运动. 对于 B 光线, 在板 I[#] 内是直线传播; 至于在板 II[#] 内的传播, 根据方程 (3), 其解为

$$y = c_1 \cos(\sqrt{A}z) + c_2 \sin(\sqrt{A}z).$$

B 光线在板 I[#] 的边界条件为

$$z = 0, y = 0; z \rightarrow 0, dy/dz = -\tan\varphi.$$

而在板 II[#] 的边界条件变为

$$z = 0, y = -y_1; z \rightarrow 0, dy/dz = \tan\theta.$$

根据 Snell 定律, 则有

$$\sin\varphi = n_0 \sin\theta,$$

所以

$$\tan\theta = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{n_0^2 - \sin^2\varphi}}.$$

方程的解为

$$y = -y_1 \cos(\sqrt{A}z) - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{A} \sqrt{n_0^2 - \sin^2\varphi}} \sin(\sqrt{A}z). \quad (19)$$

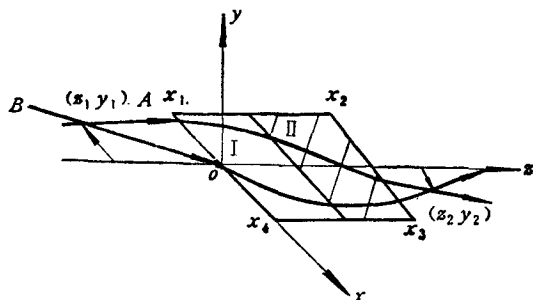
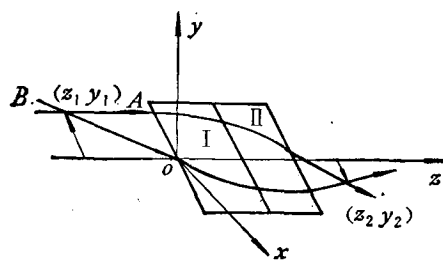
当光线垂直于平面 $x_1x_2x_3x_4$ 入射时的成像情况. 如图 13 所示.

光线垂直于平面 $x'_1x'_2x'_3x'_4$ 入射时的成像情况, 如图 14 所示. 由此可知, 当 A 光线和 B 光线在 oz 轴上部相交, 则有直立实像; 如在 oz 轴下部相交, 则有倒立的实像.

通过以上成像分析, 可以得到如下结论:

1. 不同角度入射的光线传播曲线形状不一样, 但其像点方向是一样的;
2. 选择合适的厚度, 不但能获得直立的实像, 还可获得倒立的实像;
3. 可以获得一比一的像.

自聚焦板成像透镜, 可通过控制板的厚度一次交换而成, 这样易于获得光性一致的透镜, 可考虑在蝇眼板等方面的应用.

图 13 光线垂直于平面 $x_1x_2x_3x_4$ 入射时的成像情况图 14 光线垂直于平面 $x'_1x'_2x'_3x'_4$ 入射时的成像情况

参 考 文 献

- [1] S. E. Miller, *Bell System Technical Journal*, 44(1965), 2017.
 [2] Newly developed glass devices for image transmission, *Proceedings of the Society of Photo-optical Instrumentation Engineers*, Vol. 31, October, 16—17, (1972), p. 23.

THE IMAGING OF A GLASS SELF-FOCUING PLATE

CHENG KE-HUA

(Xian Institute of Optics and Precision Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this article, we studied the propagation of rays in a glass self-focusing plate, its imaging principle and its application.