

## 关于阻尼振子的量子化处理问题

朱 如 曾

(中国科学院力学研究所)

1980年8月27日收到

### 提 要

本文分析了文献[1]对阻尼振子所提出的直接的量子化方案,其中引进了对易关系  $xp - px = i\hbar e^{-\frac{C}{M}t}$ , 指出这种方法在推广到  $C$  显含时间的情况时将发生困难. 为使  $C$  显含时间的情况也能统一处理,必须保留海森堡对易关系  $xp - px = i\hbar$ , 同时假定对振子的作用力中含有与  $x$  不对易的部分  $f_R$ , 并满足  $xf_R - f_Rx = i\hbar \frac{C}{M}$ . 还具体分析了电子振子.

### 一、文献[1]的量子化方案分析

“阻尼”的实质是多自由度环境对我们感兴趣的系统作用的统计平均结果. 按照通常的观点,应将量子化的环境和量子化的系统一起看作量子化的保守系来进行处理,应用某种技巧,导得系统的量子化运动方程.

文献[1]把阻尼振子当作一个基本的力学对象,从阻尼振子的经典运动方程出发进行直接的量子化. 文献[1]所提出的完整的量子化方案是

$$\dot{x} = \frac{p}{M}, \quad (1.1)$$

$$\dot{p} = -\frac{C}{M}p - Kx + f(t), \quad (1.2)$$

$$xp - px = i\hbar e^{-\frac{C}{M}t}, \quad (1.3)$$

式中常数  $M, C, K$  分别为振子质量, 阻尼力与振子速度的比值, 恢复力与振子位移的比值, 外力  $f(t)$  为  $t$  的任意函数. 文献[1]在论证(1.1)—(1.3)式的相容性时,利用了如下的对易关系:

$$xf - fx = 0. \quad (1.4)$$

现在我们作如下考虑:

如果(1.1)—(1.4)式是可行的,那末应该可以推广到  $C$  显含时间的情况. 这种推广是直截了当的. 借助于与文献[1]完全相同的逻辑,不难得到

$$\dot{x} = \frac{p}{M}, \quad (1.5)$$

$$\dot{p} = -\frac{C(t)}{M} p - Kx + f(t), \quad (1.6)$$

$$xp - px = i\hbar e^{-\int_0^t \frac{C(t')}{M} dt'} \quad (1.7)$$

和

$$X = x e^{\int_0^t \frac{C(t')}{2M} dt'},$$

$$P = M\dot{X} = \left(p + \frac{C(t)}{2} x\right) e^{\int_0^t \frac{C(t')}{2M} dt'}, \quad (1.8)$$

$$\dot{P} = -\left(K - \frac{C^2(t)}{4M} - \frac{\dot{C}(t)}{2}\right) X + f(t) e^{\int_0^t \frac{C(t')}{2M} dt'}, \quad (1.9)$$

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2} \left(K - \frac{C^2(t)}{4M} - \frac{\dot{C}(t)}{2}\right) X^2 - Xf(t) e^{\int_0^t \frac{C(t')}{2M} dt'}. \quad (1.10)$$

这一方案确无内在矛盾, 但存在另一困难, 揭示如下: 取如图 1 所示的函数  $C(t)$ , 当  $0 \leq t < t_0$  时,  $C(t) > 0$ ; 当  $t \geq t_0$  时,  $C(t) = 0$ .

对这种  $C(t)$ , 当  $t > t_0$  时, (1.7) 式成为

$$xp - px = i\hbar e^{-A}, \quad (1.11)$$

$$A = \frac{1}{M} \int_0^{t_0} C(t') dt',$$

$A$  是一个与  $t$  无关的正常数. 可是, 另一方面, 当  $t > t_0$  时, 因为已有  $C = 0$ , 故振子已成为无阻尼简谐振子, 应成立海森堡对易关系

$$xp - px = i\hbar. \quad (1.12)$$

显然, (1.11) 与 (1.12) 式矛盾.

为了调和这一矛盾, 一种可能的解释是: (1.11) 式中的  $p$  和 (1.12) 式中的  $p$  本来就是两个不同的力学量. 为区别起见, 前者记为  $p$ , 后者记为  $p_0$ . 于是

$$xp_0 - p_0x = i\hbar. \quad (1.13)$$

$p_0$  和  $p$  的算符分别为

$$p_0 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.14)$$

$$p = e^{-\int_0^t \frac{C(t')}{2M} dt'} p_0 - \frac{XC(t)}{2} e^{-\int_0^t \frac{C(t')}{2M} dt'} = \frac{\hbar}{i} e^{-\int_0^t \frac{C(t')}{2M} dt'} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{C(t)}{2} x. \quad (1.15)$$

这样, (1.11) 与 (1.12) 式的矛盾消失了, 但又存在如下矛盾:

当  $t < t_0$  时,  $p$  的运动方程 (1.6) 与经典阻尼振子运动方程一致, 而从定义 (1.14) 式极易得  $p_0$  的运动方程为

$$\dot{p}_0 = -\frac{C(t)}{2M} p_0 - Kx + f(t) + \frac{C^2}{4M} x + \frac{\dot{C}(t)}{2} x, \quad (1.16)$$

它与经典方程不一致. 故知, 当  $t < t_0$  时, 与经典动量对应的量子力学量为  $p$  而不是  $p_0$ ; 当  $t > t_0$  时, 已是无阻尼振子, 显然经典动量对应的量子力学量为  $p_0$ . 然而, 从 (1.14) 和 (1.15) 式可知, 当  $t = t_0$  时,  $p = e^{-A} p_0$ , 所以  $p_0 \neq p$ , 而且  $p_0$  和  $p$  的差别是一个比例因

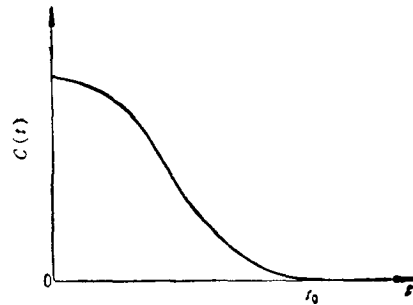


图 1

子  $e^{-A}$ , 当  $\hbar$  趋向零时  $e^{-A}$  并不趋向于 1, 于是当  $t = t_0$  时, 经典动量发生跳跃. 可是函数  $C(t)$  在  $t = t_0$  处可以取得足够光滑, 因此经典动量发生跳跃是不合理的.

由上述分析可知, (1.4)–(1.7) 式不能作为  $C$  显含时间的阻尼振子的直接量子化方案. 可是 (1.7) 式是 (1.4)–(1.6) 式的推论, 现在既然 (1.4)–(1.7) 式不可取, 那末可以肯定, (1.4)–(1.6) 式不可取. 因此 (1.4)–(1.6) 式中至少有一式不可取. 我们倾向于认为 (1.4) 式不可取.

当放弃 (1.4) 式后, 就可以同时保留海森堡对易关系.

## 二、阻尼振子的另一直接量子化方案

根据上节分析, 应该保留 (1.1), (1.2) 式和海森堡对易关系 (1.12) 式. 现在求  $x$  与  $f$  的对易关系. 微分 (1.12) 式, 并将 (1.1) 和 (1.2) 式代入解得

$$xf - fx = i\hbar \frac{C}{M}. \quad (2.1)$$

假定  $f$  可以分为如下两部分:  $f(t) = f_R(t) + f_d(t)$ ,

$$\text{式中 } f_d(t) \text{ 与 } x \text{ 对易} \quad xf_d - f_dx = 0, \quad (2.2)$$

$$\text{而 } f_R \text{ 与 } x \text{ 不对易, 由 (2.1) 式得} \quad xf_R - f_Rx = i\hbar \frac{C}{M}. \quad (2.3)$$

$$\text{这样, 我们的直接量子化方案归纳为} \quad \dot{x} = \frac{p}{M}, \quad (2.4)$$

$$\dot{p} = -Kx - \frac{C}{M}p + f_d(t) + f_R(t), \quad (2.5)$$

$$xp - px = i\hbar, \quad (2.6)$$

$$xf_R - f_Rx = i\hbar \frac{C}{M}, \quad (2.7)$$

$$xf_d - f_dx = 0. \quad (2.8)$$

利用 (2.6) 和 (2.7) 式易得

$$\left(-\frac{C}{M}p + f_R\right)x - x\left(-\frac{C}{M}p + f_R\right) = 0. \quad (2.9)$$

这表示, 阻尼力及非对易力之和与  $x$  是对易的. 方案 (2.4)–(2.8) 式允许  $C$  显含时间, 当然也适用于  $C$  不显含时间的情况.

但是 (2.7) 式不能把非对易力  $f_R(t)$  完全定下来, 而是给出了非对易力的一个必须满足的普适条件. 为了确定  $f_R(t)$  的具体形式, 必须对具体问题作具体分析. 下面我们对一维电子振子的辐射阻尼进行具体分析, 从中可以看出  $f_R$  的实质.

## 三、电子振子情况

作为一个例子, 本节具体讨论沿  $x$  方向振动的一维电子振子. 按直接量子化的要求,

必须先写出阻尼电子振子的运动方程。为了不遗漏任何信息,我们将辐射场作用的随机洛仑兹力也写进去。于是得到电子振子的经典运动方程<sup>[2]</sup>

$$\dot{x} = \frac{p}{M}, \quad (3.1)$$

$$\dot{p} = -\frac{C}{M}p - Kx + f_d(t) + f_R(t), \quad (3.2)$$

式中  $f_d$  为外加任意策动力,  $C$  为经典辐射阻尼常数

$$C = \frac{e^2 K}{6\pi\epsilon_0 c^3 M}, \quad (3.3)$$

$f_R$  为随机洛仑兹力, 忽略磁场作用,  $f_R$  为

$$f_R = eE_{\text{随机}}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_x, \quad (3.4)$$

$e$  为电子电量,  $\epsilon_0$  为真空介电常数,  $E_{\text{随机}}(\mathbf{r}, t)$  为随机电场强度,  $c$  为真空中的光速,  $\mathbf{e}_x$  为  $x$  方向的单位矢量。

为了进行量子化, 像通常一样, 对体积为  $V$  的空间中的电磁波进行驻波分解

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_k q_k(t) \sqrt{\frac{2\omega_k^2}{V\epsilon_0}} \mathbf{U}_k(\mathbf{r}), \quad (3.5)$$

式中  $\omega_k$  为第  $k$  振型的角频率,  $\mathbf{U}_k(\mathbf{r})$  满足

$$\iiint_V \mathbf{U}_k(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{U}_l(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} V \delta_{kl}, \quad (3.6)$$

式中  $\delta_{kl}$  为克朗内克代尔塔函数。若引进

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\omega_k q_k + i\dot{q}_k), \quad (3.7)$$

则 (3.4) 式化为

$$f_R = e \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{V\epsilon_0}} \mathbf{U}_k(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_x [a_k(t_0) e^{-i\omega_k(t-t_0)} + a_k^*(t_0) e^{i\omega_k(t-t_0)}], \quad (3.8)$$

式中为了保证右边仅是随机力, 必须选择  $t_0$ , 使得  $(t-t_0)$  远大于场的相干时间  $\tau_c$ , 但仍应使  $a_k(t) \simeq a_k(t_0) e^{-i\omega_k(t-t_0)}$ , 即  $(t-t_0)$  又不能过大。

量子化方法是将  $p$  看作算符

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.9)$$

并引进对易关系

$$a_k a_l^* - a_l^* a_k = \delta_{l,k}. \quad (3.10)$$

这样, (3.1) 和 (3.2) 式直接成为量子化运动方程, 它们和 (2.4), (2.5) 式形式一致。 (3.9) 式决定了 (2.6) 式成立。同时 (2.8) 式显然成立。为了证明 (2.7) 式成立, 我们注意到, 阻尼力与随机力  $f_R$  之和就是电子受到的总电场力, 所以

$$-\frac{C}{M} p + f_R = \sum_k e E_k(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_x. \quad (3.11)$$

此式右边与  $x$  对易, 所以左边也与  $x$  对易, 因此 (2.9) 式成立, 故 (2.7) 式也成立。

为了确定  $f_R$  中  $a_k$  和  $a_k^*$  的性质, 还必须给出场的密度矩阵或其运动方程. 例如, 在温度为  $T$  时, 第  $k$  振型的密度矩阵为

$$\rho_k = (1 - e^{-\frac{\hbar\omega_k}{kT}}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega_k}{kT}} |n\rangle\langle n|. \quad (3.12)$$

本节处理的电子振子, 它的阻尼常数  $C$  虽然与  $t$  无关, 但方案 (2.4)–(2.8) 式原则上允许  $C$  显含时间.

可以看到, 量子化方程 (3.2) 就是量子朗之万方程<sup>[3]</sup>, 非对易力就是量子力学随机力. 这种一致性并不偶然. 这是因为我们是先在经典电子振子与经典电磁场相互作用下导出阻尼电子振子的经典运动方程, 然后引进 (3.9) 和 (3.10) 式进行了量子化; 而量子朗之万方程的通常导出方法则是先将互相作用着的电子振子和电磁场量子化, 然后直接导出量子朗之万方程, 而不经经典朗之万方程这一步而已; 两种方法都用了同样的量子化规则 (3.9) 和 (3.10) 式.

感谢谈镐生教授和彭桓武教授的指导和帮助.

### 参 考 文 献

- [1] 彭桓武, 物理学报, **29** (1980), 1084.  
 [2] 朱如曾, 物理, **8** (1979), 216.  
 [3] H. Haken, *Rev. Mod. Phys.*, **47**(1975), 67.

## ON THE QUANTUM MECHANICAL TREATMENT OF A DAMPED HARMONIC OSILLATOR

ZHU RU-ZENG

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

### ABSTRACT

We analyse the method of direct quantization suggested in reference [1] for a damped harmonic osillator, in which the quantum condition  $xp - px = i\hbar e^{-\frac{C}{M}t}$  is introduced. It is pointed out that this method can not be generalized to treat the case in which  $C$  is a function of time. In order to treat this case in a general approach, Heisenberg relation  $xp - px = i\hbar$  must be kept and the force acting upon the osillator must be supposed to contain a component  $f_R$  that does not commute with  $x$  and satisfies  $xf_R - f_Rx = i\hbar \frac{C}{M}$ . An electronic osillator is analysed as an example to show that our approach is consistent with quantum mechanical Langevin theory.