

# 电磁迴旋不稳定性的准线性理论

柯孚久 陈雁萍 周玉美

(中国科学院物理研究所)

吴 京 生

(美国马利兰大学物理科学与技术研究所)

1980年12月5日收到; 1981年5月3日收到修改稿

## 提 要

在有弱相对论性电子时,在电子迴旋频率  $\Omega_e$  附近存在快  $x$  模的不稳定性. 从这一事实出发,我们用准线性理论分析了具有粒子数倒转的分布函数引起的不稳定性最后达到饱和的物理机制. 进行了一些近似的计算,求出了电磁迴旋不稳定性的饱和时间和饱和能量及垂直、平行分布函数随时间的演化过程. 发现用此理论算出的饱和能级与观察到的 AKR 结果是一致的.

## 一、引 言

从近年来发表的一些理论<sup>[1,2]</sup>可知,当电子的分布函数具有粒子数倒转的特性时,在某些情况下,电磁波可以被放大. 这些电磁波的频率非常接近电子的迴旋频率,这一类的不稳定性可以被认为是以前文献中讨论过的微波激射不稳定性<sup>[3,4]</sup>的推广. 大多数有关微波激射不稳定性的讨论都假设电子的分布函数在  $v_{\parallel}$  和  $v_{\perp}$  的空间上可以用 delta 函数来表达. 当然,速度的色散并不是在任何情况下都是可以忽略的,因此将现有的理论进一步推广亦是很必要的. 近来 Uhm 和 Davidson<sup>[5]</sup> 考虑和讨论了速度色散对微波激射不稳定性的影响,但是他们的工作主要是为了发展迴旋仪 (gyrotron) 的理论,和我们的工作<sup>[1,2]</sup>所考虑的情况是基本上不同的,后者主要是为了讨论空间物理与天体物理的射电过程. 在这些情况里,电子的分布函数可以具有相当大的速度色散,并且还可能存在能量比较低的背景等离子体.

诚然,不稳定性对解释电磁波的放大过程来说是重要的,但是由于不稳定性的讨论往往局限于线性理论的范围,对能量的转换效率不能作出估计. 换言之,假如我们要进一步了解能量的转换过程,(例如讨论多少自由能可以转换成波能) 那么就必须超出线性理论的范畴. 因为在这方面的讨论必然涉及波的饱和问题,而饱和机制必须依靠非线性的物理过程.

由此可以看出对讨论千米辐射一类的射电现象来说,线性理论推测的电磁波不稳定性并不能充分地解释射电的机制. 因此推广在文献 [1,2] 中谈到的不稳定性理论并且讨论其饱和过程是一项极其必要的工作,这亦是本文的主要目的.

## 二、一些基本设想和线性理论

在某些等离子体中, 电子的迴旋频率  $\Omega_e$  可以远离电子的等离子体频率  $\omega_{pe}$ , 而满足  $\Omega_e^2 \gg \omega_{pe}^2$  这一条件. 在地磁层的极区, 木星的內磁层和某些磁镜装置內的等离子体就是很好的例子. 在这种条件下, 快异常模的截断频率  $\omega_x$  可以用下列的近似式子来表达:

$$\omega_x = \Omega_e \left( 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \right). \quad (1)$$

由于  $\omega_x$  非常接近  $\Omega_e$ , 快异常模与电子可以满足下列共振条件

$$\omega_r - \Omega_e \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0 \quad (2)$$

的可能性就大大增加. 其中  $\omega_r > \omega_x$  是波的频率,  $k_{\parallel}$  与  $v_{\parallel}$  是波矢与速度在平行外磁场方向的分量,  $c$  为光速. 对弱相对论性的电子我们可以将(2)式写成

$$\omega_r - \Omega_e \left( 1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0. \quad (3)$$

在(3)式中, 由弱相对论性引起的修正项虽然是一个小项, 可是它的物理意义是很深刻的. 由于  $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$ , 电子在垂直方向的速度  $v_{\perp}$  通过相对论性效应而出现于共振条件(方程式(3)中), 因此使得电子在垂直方向的运动能够与波相互作用. 通过这样一个渠道, 等离子体在横向的自由能可以转换成波能, 而使波的振幅放大. 这一点在稍后的不稳定性的讨论中可以明显看出来.

在本文中, 我们考虑的物理情况基本上与文献[2]的设想是一致的. 亦就是说电子具有二个部分: 一部分是背景电子, 它们的能量比较低; 另一部分是超热电子, 能量比较高, 但仍属于弱相对论性(大约最多一万电子伏). 前者的密度  $n_0$  比后者的密度  $n_s$  大. 我们主要讨论的是反射向上运动的电子, 这些电子具有“损失锥”的分布函数. 但是即使由于投射角散射 (pitch angle scattering) 而引起的速度空间扩散亦不会导致电子的损失(至少在短期内), 因为只有向下运动的电子才会进入上大气层而损失. 再者源区的特征尺度是地球半径, 远较波长为大, 故可以将体系处理为一个无限均匀的等离子体. 第三、由于电子的密度低, 碰撞频率极低, 大约为  $10^{-9} \text{sec}^{-1}$ , 故碰撞在我们考虑的问题中不起作用.

本来关于不稳定性及准线性过程的讨论可以按照文献[2]的精神来进行, 但是我们认为在目前一个简化的和定性的讨论似乎更为可取. 一则我们想了解的是整个不稳定性与饱和过程的主要物理机制; 再则我们的兴趣在探索一些定性的讨论, 至少在目前并不要求理论的严谨与计算的精确, 我们想要得到的是对基本物理图象的了解.

根据以上设想, 将考虑用下列的近似方法来讨论不稳定性及其准线性理论. 其要点为: 1) 静电效应相对来说可忽略不计, 2) 快异常模的频率因此可以用下述近似色散关系来表达

$$1 - \frac{c^2 k^2}{\omega_r^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2 - \Omega_e^2} = 0$$

或

$$\omega_r^2 = \frac{1}{2} \{ \omega_{pe}^2 + \Omega_e^2 + c^2 k^2 + [(\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2 + c^2 k^2)^2 - 4c^2 k^2 \Omega_e^2]^{1/2} \}. \quad (4)$$

在(4)式中  $\omega_{pe}$  是决定于背景电子的等离子体频率, 这里我们已经隐含地考虑了  $k_{\parallel}^2 \ll k_{\perp}^2$  的情况, 假设  $o$  模与  $x$  模是近似独立的, 3) 决定增长率的主要因素是超热电子, 背景电子由于能量低可以被忽略, 其表达式可以写成

$$\omega_i = \frac{\pi^2 \omega_{pe}^2 n_s}{4 \omega_r n_o} \frac{\frac{\omega_r^2}{c^2 k^2}}{\left( 1 + \frac{\omega_r^4}{c^2 k^2 \omega_{pe}^2} + \frac{c^2 k^2}{\omega_{pe}^2} - \frac{2\omega_r^2}{\omega_{pe}^2} \right)} \mathcal{F}, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\equiv \int_0^{\infty} v_{\perp}^3 dv_{\perp} \int_{v_1}^{v_2} dv_{\parallel} \delta \left[ \omega_r - \Omega_e \left( 1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - k_{\parallel} v_{\parallel} \right] \left( \Omega_e \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}} \right), \\ v_{1,2} &= \frac{c}{\Omega_e} \left( k_{\parallel} c \mp \sqrt{k_{\parallel}^2 c^2 + 2\Delta\omega\Omega_e^2} \right), \\ \Delta\omega &= 1 - \frac{\omega_r}{\Omega_e}. \end{aligned} \quad (6)$$

在(5)式中  $n_s$  是超热电子的密度,  $n_o$  是背景电子的密度. 同时我们指出在(6)式中, 假如  $F$  是近似各向同性, 则

$$k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}} \ll \Omega_e \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}}.$$

因此在  $\mathcal{F}$  的表达式中, 前者可以忽略不计.

在以后的讨论中我们将考虑  $F$  在初始时刻具有下列形式:

$$F = \frac{1}{\pi^{3/2} \alpha (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} e^{-\frac{(v_{\parallel} - v_s)^2}{\alpha^2}} \left( e^{-\frac{v_{\perp}^2}{\alpha_1^2}} - e^{-\frac{v_{\perp}^2}{\alpha_2^2}} \right), \quad (7)$$

其中  $\alpha_1^2 > \alpha_2^2$ ,  $v_s$  是纵向流速,  $\alpha$  是电子的纵向热速度. 显然, 当  $v_{\perp} = 0$  时,  $F = 0$ . 这一类的分布函数具有“粒子数倒转”的特性, 它对静电扰动的不稳定性曾经在文献中被考虑过. 将(7)式代入(5)式和(6)式, 可以求得  $\omega_i$  的表达式, 但是所得到的只代表  $t = 0$  的初始增长率. 在准线性方程式中,  $F$  是时间的函数, 要讨论  $\omega_i$  在整个过程里的变化, 必须先讨论在  $t \neq 0$  时的一般解, 这一点在下一节中将予以研讨.

### 三、准线性过程的理论

根据(7)式和(5)式可以证明不稳定性在  $t = 0$  的时候存在, 于是异常模的电磁波可以被放大而引起在速度空间的扩散. 而对于由粒子数倒转引起的不稳定性饱和机制, 我们认为在速度空间的扩散过程是主要的原因. 放大的电磁波的电场可以引起增强的扩散, 因而使得最初存在的粒子数倒转逐渐消失, 相应的增长率亦逐渐减小, 甚至演变为阻尼. 基于这种设想, 我们将以准线性理论为出发点来分析和讨论这一问题.

由于我们考虑电子具有弱相对论性以及电磁波的频率是在迴旋频率附近, 因此

$$\frac{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{\Omega_c^2} \approx \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \ll 1.$$

这时准线性的动力方程式可以写成<sup>[6]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & \left[ \left( 1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right] D v_{\perp}^2 \left[ \left( 1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \right. \\ & \left. + \frac{k_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right] F(v_{\parallel}, v_{\perp}, t), \end{aligned} \quad (8)$$

其中扩散系数  $D$  的定义为

$$\begin{aligned} D = & \frac{\pi e^2}{m^2} \int d^3 k \frac{\left| E_x - iE_y + \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\Omega_c} E_z \right|^2}{4} \delta \left[ \omega - k_{\parallel} v_{\parallel} \right. \\ & \left. - \Omega_c \left( 1 - \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{2c^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

在(9)式中已考虑了贝塞耳函数  $J_1^2$  的小宗量展开. 因为在考虑的情况里,  $k_{\parallel} v_{\parallel} \ll \Omega_c$  的条件是存在的, 故(8)式可用下列近似方程式代替:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} D v_{\perp} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}}. \quad (10)$$

同时考虑  $\mathbf{k} = k_{\parallel} \hat{e}_z + k_{\perp} \hat{e}_y$ , 扩散系数  $D$  可重写为

$$D = \frac{\pi^2 e^2}{m^2} \int d^3 k \mathcal{E}(k_{\perp}, k_{\parallel}, t) \delta \left[ \omega - \Omega_c \left( 1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) - k_{\parallel} v_{\parallel} \right], \quad (11)$$

其中  $\mathcal{E} = |E_x|^2/4\pi$ . 它随时间的变化可用下式描述:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 2\omega_i \mathcal{E}, \quad (12)$$

此处  $\omega_i = \omega_i(\mathbf{k}, t)$ .

从(10), (11) 及 (12) 三式可以讨论下列初值问题. 在  $t = 0$  时,  $F$  满足(7)式同时  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ . 此处  $\mathcal{E}_0$  可以用热涨落场来决定, 即

$$\mathcal{E}_0 \approx m_e \alpha^2. \quad (13)$$

从(12)式可得到

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{E}_0(\mathbf{k}) e^{2 \int_0^t \omega_i(\mathbf{k}, t') dt'}. \quad (14)$$

现在我们考虑(10)式能满足(7)式(初条件)的解. 显然在一般情形下扩散系数  $D$  是  $v_{\parallel}$  和  $v_{\perp}$  的函数, 但在我们考虑的近似计算中将假设

$$\frac{D}{v_{\perp}} \gg \frac{\partial D}{\partial v_{\perp}}.$$

这样从(10)式可得到下列形式的解:

$$F = \frac{e^{-(v_{\parallel} - v_s)^2/\alpha^2}}{\pi^{3/2} \alpha (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\tau}{\alpha_1^2}} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{\alpha_1^2 + \tau}} - \frac{1}{1 + \frac{\tau}{\alpha_2^2}} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{\alpha_2^2 + \tau}} \right\}, \quad (15)$$

其中

$$\tau = \int_0^t dt' D(\mathbf{v}, t'). \quad (16)$$

这个解不但在  $t = 0$  时满足(7)式,并且归一条件

$$\int d^3v F = 1$$

在  $t > 0$  时,亦是成立的.

随着时间增长在  $v_{\perp}$  接近零的范围内  $F$  逐渐增加,粒子数倒转的现象越来越弱,增长率  $\omega_i$  亦会逐渐减少甚至演变成阻尼.

上述讨论似乎很简单,但是实际存在的复杂性是值得提的.第一、扩散系数的计算牵涉到  $\mathbf{k}$  空间与  $\mathbf{v}$  空间,由于共振条件

$$\omega_r(\mathbf{k}) - \Omega_c \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0 \quad (17)$$

引起的关系,它直接影响  $D$  的  $\mathbf{k}$  积分.第二、在扩散系数  $D$  的被积函数中存在波能  $\mathcal{E}(\mathbf{k})$  的谱,而从(14)式可以看出  $\mathcal{E}(\mathbf{k})$  与  $F(\mathbf{v}, t)$  的复杂关系.第三、在计算  $\omega_i(t)$  时  $F(\mathbf{v}, t)$  中由于  $\tau$  的出现而使得  $\omega_i(t)$  的解析表达式无法得到.

从这些具体的困难可以体会到整个问题的难度是较高的,因此我们仅打算进行一些近似甚至粗糙的讨论,将不要求数学的精确与严格.

先从(15)式说起.在一般情形下,  $\tau$  是速度  $\mathbf{v}$  和时间  $t$  的函数,但是它具有两个特点.第一、当时间  $t > 0$  但波动的能量  $\mathcal{E}$  还不到饱和以前,  $\tau/c^2$  是很小的,也就是说那时  $\tau/c^2 \ll 10^{-5}$ . 第二、当  $\tau/c^2$  接近  $10^{-2}$  量级的时候,分布函数  $F$  的变化使得增长率减少到接近零或小于零的程度,亦就是说趋近饱和的情况.因此总的来说  $\tau(\mathbf{v}, t)$  随速度  $\mathbf{v}$  的变化并不十分重要,但是对计算来说却带来许多困难.为了避免这些困难同时仍旧能保留原来问题的精神,我们在下面将采取一种近似的算法.这种方法的主要部分是在计算增长率  $\omega_i(t)$  的时候,是根据一个近似的分布函数  $\tilde{F}(\mathbf{v})$ . 此处

$$\tilde{F} = \frac{e^{-(v_{\parallel} - v_s)^2/\alpha^2}}{\pi^{3/2} \alpha (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\langle \tau \rangle}{\alpha_1^2}} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{\alpha_1^2 + \langle \tau \rangle}} - \frac{1}{1 + \frac{\langle \tau \rangle}{\alpha_2^2}} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{\alpha_2^2 + \langle \tau \rangle}} \right\}, \quad (18)$$

其中的  $\langle \tau \rangle$  是原来  $\tau$  的平均值.具体的数值计算方法则在下一节中说明.

这儿说明一下这一近似的物理意义.本来  $\tau$  的量纲是速度的平方,从(15)式可以看出  $\tau$  实在代表了随机能量随时间的变化(初始时的值为  $\alpha_1^2$  和  $\alpha_2^2$ ).这一变化的原因是电子与波的相互作用引起的.因此  $\langle \tau \rangle$  亦代表了这一个量的平均值.需要牢记的是这仅仅是一种近似,并不是精确的.

#### 四、数值计算的方法和结果

显然解析工作只能进行到某一程度,以后就需要以数值计算的手段来获得我们希望得到的结果.本节将给出具体的方法和程序.

首先介绍几个定义.假如将某一时间  $t$  (从零开始)定为  $t_n$  而将  $t_n$  划分为几个小段.

例如  $t_n = n\Delta t$ ,

这样, 可以从初始条件  $\tilde{F}(\mathbf{v}, 0)$  算出  $\tilde{F}(\mathbf{v}, \Delta t)$ , 而

$$\tilde{F}(\mathbf{v}, \Delta t) \equiv F(\mathbf{v}, \langle \tau \rangle_1), \quad (19)$$

其中

$$\langle \tau \rangle_1 \equiv \int d^3v F(\mathbf{v}, 0) \tau(\mathbf{v}, t_1). \quad (20)$$

(20)式可以进一步推广到

$$\langle \tau \rangle_n \equiv \int d^3v F(\mathbf{v}, t_{n-1}) \tau(\mathbf{v}, t_n). \quad (21)$$

整个计算过程可以说明如下:

1) 首先算出  $\langle \tau \rangle_1$  而写出

$$\langle \tau \rangle_1 = \Delta t \frac{\pi^2 e^2}{m^2} \int d^3k \mathcal{E}(t_1) \int d^3v F(\mathbf{v}, 0) \delta \left[ \omega - \Omega_c \left( 1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) - k_{\parallel} v_{\parallel} \right], \quad (22)$$

其中

$$\mathcal{E}(t_1) = \mathcal{E}(0) \exp[2\omega_i(0)\Delta t].$$

2) 从  $F(\mathbf{v}, \Delta t)$  求  $\omega_i(\mathbf{k}, \Delta t)$ , 再求

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t_2) &= \mathcal{E}(t_1) \exp[2\omega_i(t_1)\Delta t] \\ &= \mathcal{E}(0) \exp[2\omega_i(0)\Delta t + 2\omega_i(t_1)\Delta t]. \end{aligned}$$

表 1

序号	参 量				初始时刻
	$\alpha/c$	$\alpha_1/c$	$\alpha_2/c$	$\omega_{pe}^2/\Omega_e^2$	$\tau_{\max}/\Omega_e$
1	0.09	0.15	0.14	0.04	$0.27 \times 10^{-2}$
2	0.09	0.15	0.10	0.04	$0.33 \times 10^{-2}$
3	0.11	0.15	0.14	0.04	$0.43 \times 10^{-2}$
4	0.09	0.13	0.10	0.04	$0.56 \times 10^{-2}$
5	0.09	0.15	0.14	0.01	$0.19 \times 10^{-2}$
6	0.09	0.15	0.10	0.01	$0.30 \times 10^{-2}$
7	0.11	0.15	0.14	0.01	$0.25 \times 10^{-2}$
8	0.09	0.13	0.10	0.01	$0.48 \times 10^{-2}$

序号	饱 和 时 刻			按文献[7]算出的饱和能量
	饱和时间(ms)	最大饱和能谱 $\mathcal{E}_k/\mathcal{E}_k(0)$	饱和能量密度(erg/cm <sup>3</sup> )	密度上限 (erg/cm <sup>3</sup> )
1	25.5	$0.42 \times 10^{16}$	$0.14 \times 10^{-9}$	$0.49 \times 10^{-8}$
2	24.5	$0.54 \times 10^{17}$	$0.82 \times 10^{-10}$	$0.31 \times 10^{-8}$
3	16.5	$0.72 \times 10^{16}$	$0.20 \times 10^{-9}$	$0.37 \times 10^{-8}$
4	14.5	$0.22 \times 10^{17}$	$0.90 \times 10^{-10}$	$0.23 \times 10^{-8}$
5	17.8	$0.37 \times 10^{16}$	$0.18 \times 10^{-8}$	$0.49 \times 10^{-8}$
6	13.2	$0.87 \times 10^{16}$	$0.98 \times 10^{-9}$	$0.31 \times 10^{-8}$
7	14.3	$0.10 \times 10^{16}$	$0.26 \times 10^{-8}$	$0.37 \times 10^{-8}$
8	8.3	$0.93 \times 10^{16}$	$0.10 \times 10^{-8}$	$0.23 \times 10^{-8}$

$\alpha_i/c = 0.14$ ,  $n_i/n_0 = 0.1$ ,  $\mathcal{E}_k(0)$ 为初始时刻的热扰动值.

3) 从  $\mathcal{E}(t_2)$  可以计算  $w(t_2)$  和  $\tau(\mathbf{v}, t_2)$ , 这儿

$$w(t_2) = \int d^3k \mathcal{E}(t_2).$$

4) 根据  $F(\mathbf{v}, \Delta t)$  和  $\tau(\mathbf{v}, t_2)$  可以求  $\langle \tau \rangle_2$ .

5) 然后依此类推一直到  $t_n = n\Delta t$  时,  $w(t_n)$  达到峰值为止.

我们一共选取了八组参量进行计算. 表 1 给出了初始时刻的最大增长率、饱和时间、饱和能量密度以及最大的饱和能谱值. (我们认为, 当总的波能密度不再上升时, 波就达到饱和了). 在取  $n_s/n_o = 0.1$ ,  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  取值范围从 2—6keV 时, 饱和时间为毫秒的量级, 而饱和能谱的最大值  $\mathcal{E}_{k, \max}$  为  $10^{15}$ — $10^{16} \mathcal{E}_k(0)$  的量级, 饱和能量密度为  $10^{-9}$ — $10^{-11}$  erg/cm<sup>3</sup> 的量级. 表 1 中还列出了按文献[7]中所给的方法算出的每组参量的饱和能量密度的上限. 由表 1 可知, 我们得到的每组参数相应的饱和能量密度值都在上述上限之下, 且相差亦不远. 另一方面, 按文献[7], 我们得到的饱和能量亦与观察到的 AKR 结果是一致的.

图 1、图 2<sup>1)</sup> 画出了  $F_{\perp}, F_{\parallel}$  随时间的演化过程( $F_{\perp}$  的定义为: 将束速度  $v_s$  值作为

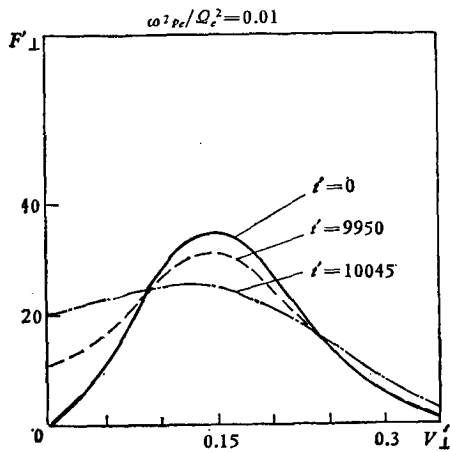


图 1

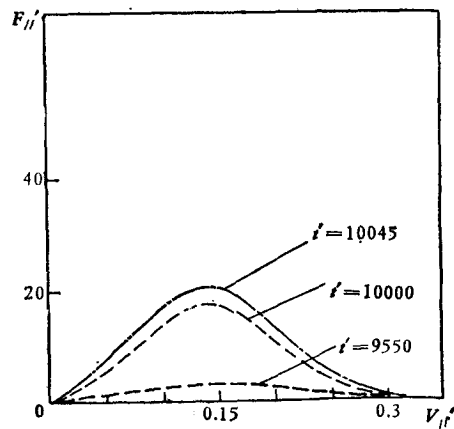


图 2

参量代入(15)式, 即得到  $F_{\perp}$  的表达式. 在计算时固定  $v_s = 0.14c$ .  $F_{\parallel}$  的定义为: 将  $v_{\perp}$  值作为参量代入(15)式即得到  $F_{\parallel}$  的表达式. 在计算时固定  $v_{\perp} = 0$ . 其中实线表示初始时刻, 点划线表示饱和时刻, 虚线表示这两时刻中间的某一时刻的  $F_{\perp}$  或  $F_{\parallel}$  之值.

从图 1 可以很清楚地看到: 当  $t = 0$  时,  $F_{\perp}$  确有正斜率存在, 这使得  $t = 0$  时刻的快  $x$  模可以被放大. 当不稳定性发展起来后, 由于速度空间的扩散, 电子分布函数随时间开始演化. 由于电子与快  $x$  模的共振效应, 电子把能量传给波, 故低能电子数目逐渐增加, 表现为  $F_{\perp}$  在  $v_{\perp} = 0$  处之值逐渐往上提高, 并使得  $\partial F_{\perp} / \partial v_{\perp}$  的陡度逐渐减小, 从而增长率从  $t = 0$  之值逐渐下降. 但只要增长率不为零, 波能将继续增长, 直到最终增长

1) 我们仅选取了表 1 中第 5 组参数相应的  $F_{\perp}, F_{\parallel}$  曲线及  $\gamma > 0$  图. 因为别组参数的相应图与此类似, 故略去.

率减到零为止,此时波能不再增长而达到饱和,即不稳定性此时被抑制住. 文献[7]中正是用此饱和机制去解释了极光千米辐射过程.

图3给出了初始时刻增长率  $\gamma > 0$  的区域. 随着时间的演化,  $\gamma$  值开始下降,  $k$  空间

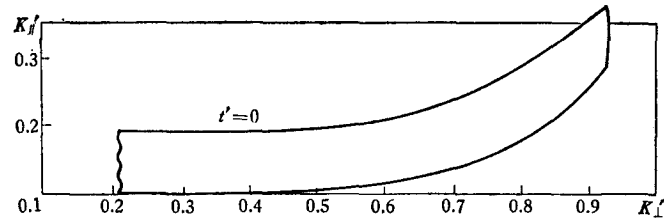


图 3

的一些点的  $\gamma$  值逐渐为负,这些点对波能的增长不再有贡献.  $k$  空间的能谱  $\mathcal{E}_k(t)$  是张在  $k_{\perp}$ ,  $k_{\parallel}$  二维平面上的一个曲面,我们没有画出,但我们可以想象出来,随着时间的增长,这个曲面越上升越高,直到饱和为止.

在计算  $F_{\parallel}$  的演化时,之所以选择  $v_{\perp} = 0$  的点是因为这点的粒子数反转效应最明显. 在这点  $F_{\perp}$  值随时间增长是单调上升的,所以对对应这点的  $F_{\parallel} \sim v_{\parallel}$  曲线亦随时间单调上升. 但对  $v_{\perp} \neq 0$  的其它  $v_{\perp}$  之值,  $F_{\parallel} \sim v_{\parallel}$  曲线随时间的演化过程则不一定是这种方式,有的下降,有的不动.

我们还发现饱和能量密度与等离子体热能之比是远小于 1 的,所以是符合准线性理论的基本假设的.

## 五、讨论和结论

一开始,我们就略去了在稳定化过程中进入损失锥内的电子的损失,即认为通过损失锥损失的电子数目对于总电子数相比是个小量,可以略去. 这也就是我们之所以称电子的分布函数在  $t = 0$  时刻具有粒子数反转的特点而不称它具有损失锥特性的原因.

我们在用线性理论计算等离子体的色散关系时,算  $\omega_r$  用了冷等离子体近似,并假设磁场均匀(即不稳定性是在一个局部出现,在局域磁场有明显变化之前不稳定性已被有效地放大). 进一步的工作可将热效应加进去计算  $\omega_r$ .

我们还发现  $n_s/n_0$  小一个量级时,相应的增长率就小一个量级,饱和时间相应大一个量级. 本文的结论是: 考虑了弱相对论性电子对波-电子共振条件的修正,即通过弱相对论性效应使电子在垂直方向的运动可以与波相互作用,从而可把等离子体在横向的自由能传授给快  $x$  模,使电磁波可以被放大. 给出了  $t = 0$  时特点为粒子数反转的分布函数的演化过程,计算了饱和时间、饱和能量、初始增长率等物理量. 发现饱和能量与 AKR 的观察结果是符合的,并与文献[7]中所给出的饱和能量的热力学上限相差不远.



## 附 录

一、各物理量的无量纲化表达式<sup>1)</sup>

用光速  $c$  除各速度量  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_i$  和  $\alpha_s$ , 得到其相应的无量纲量。

$$\text{波矢 } k' = \frac{k c}{\Omega_e}.$$

能量  $\mathcal{E}'_k = \mathcal{E}_k / \mathcal{E}_k(0)$ , 其中  $\mathcal{E}_k(0)$  是  $t = 0$  时的能量。

$$\text{增长率 } \gamma' = \frac{\gamma}{\Omega_e}.$$

$$\tau' = \tau / c^2. \text{ 时间 } t' = \Omega_e t.$$

## 二、计算所用的无量纲化的公式

## 1. 色散关系

$$\omega'_i = \frac{\omega_i}{\Omega_e} = \frac{\pi^2 \omega_{pe}^2 n_i}{4 \Omega_e \omega_r n_o} \omega_r'^2 \left/ \left( 1 + \frac{\omega_r'^4}{\omega_{pe}^2} + \frac{1}{\omega_{pe}^2} - \frac{2\omega_r'^2}{\omega_{pe}^2} \right) \right. \times I,$$

其中

$$I = \int_0^{\infty} v_{\perp}^2 dv_{\perp} \int_{v_{\perp 1}}^{v_{\perp 2}} dv_{\parallel} \delta[\omega'_i - (1 - v'^2) - k'_{\parallel} v_{\parallel}] \left( \frac{\partial F'}{\partial v_{\perp}} \right),$$

$$v_{i,\perp} = k'_{\parallel} \mp \sqrt{k_{\parallel}'^2 + 2\Delta\omega'},$$

$$\Delta\omega' = 1 - \omega_r',$$

$$\omega_r'^2 = \left( \frac{\omega_r}{\Omega_e} \right)^2 = \frac{1}{2} \{ 1 + \omega_{pe}^2 + k'^2 + \sqrt{(1 - k'^2)^2 + \omega_{pe}^2 [\omega_{pe}^2 + 2(1 + k'^2)]} \}.$$

## 2. 分布函数

$$\begin{aligned} \bar{F}'(v_{\perp}, v_{\parallel}, t) &= c^2 \bar{F} \\ &= \frac{e^{-(v'_{\parallel} - v'_{\parallel 0})^2 / \alpha^2}}{\pi^{3/2} \alpha' (\alpha_i'^2 - \alpha_s'^2)} \left\{ \frac{e^{-v_{\perp 1}'^2 / (\alpha_i'^2 + \langle \tau \rangle'_n)}}{1 + \frac{\langle \tau \rangle'_n}{\alpha_i'^2}} - \frac{e^{-v_{\perp 2}'^2 / (\alpha_s'^2 + \langle \tau \rangle'_n)}}{1 + \frac{\langle \tau \rangle'_n}{\alpha_s'^2}} \right\}. \end{aligned}$$

## 3. 增长率

$$\begin{aligned} \gamma' = \frac{\gamma}{\Omega_e} &= \frac{A' \pi^2 \omega_{pe}^2 n_i}{4 \omega_r' \Omega_e^2 n_o} \left\{ -\frac{1}{\xi_i'^2 \alpha_i'^2} e^{\frac{b_i'^2}{\alpha_i'^2} - c_i'} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{a_i'}} \left( f' - \frac{E' b_i'}{a_i'} - \frac{1}{2a_i'} - \frac{b_i'^2}{a_i'^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \times \operatorname{erf}(x_i') + \frac{1}{a_i'} e^{-x_i'^2} \left. \left( v'_{\parallel} - \frac{b_i'}{a_i'} - E' \right) \right]_{v_{\perp 1}'}^{v_{\perp 2}'} - ({}^{1n} \rightarrow {}^{2n}) \left. \right\} / \\ &\quad \left[ \frac{k'^2}{\omega_r'^2} + \omega_r'^2 \left( 1 - \frac{k'^2}{\omega_r'^2} \right)^2 / \omega_{pe}^2 \right], \end{aligned}$$

其中:  $A' = 1 / [\pi^{3/2} \alpha' (\alpha_i'^2 - \alpha_s'^2)]$ ,  $E' = 2k'_{\parallel}$ ,  $f' = 2\Delta\omega'$ ,

$$a_i' = \left( \frac{1}{\alpha_i'^2} - \frac{1}{\xi_i' \alpha_i'^2} \right), \quad b_i' = \frac{k'_{\parallel}}{\xi_i' \alpha_i'^2} - \frac{v'_{\parallel}}{\alpha_i'^2}, \quad \xi_i' = 1 + \frac{\langle \tau \rangle'_n}{\alpha_i'^2},$$

$$c_i' = \frac{2\Delta\omega'}{\xi_i' \alpha_i'^2} + \frac{v'_{\parallel}}{\alpha_i'^2}, \quad x_i' = \sqrt{a_i'} v'_{\parallel} + \frac{b_i'}{\sqrt{a_i'}} \quad (i = 1, 2).$$

## 4. 能量

$$\mathcal{E}'_k^{(n+1)} = \mathcal{E}'_k^{(n)} e^{2\gamma' \Delta t'} \quad \text{当 } \langle \tau \rangle'_n < 10^{-5},$$

$$\mathcal{E}'_k^{(n+1)} = \frac{2 + (\gamma'_n + \gamma'_{n+1}) \Delta t'}{2 - (\gamma'_n + \gamma'_{n+1}) \Delta t'} \mathcal{E}'_k^{(n)} \quad \text{当 } \langle \tau \rangle'_n \geq 10^{-5},$$

其中  $(n)$  表示计算的步数。

5.  $\langle \tau \rangle'_n$ 

$$\langle \tau \rangle'_n = \frac{\langle \tau \rangle'_n}{c^2} = \frac{2\pi^2 e^2 \mathcal{E}(0) 4\tau \Omega_e}{c^2 m_e^2} \Delta t' \sum_{m=1}^n \int k'_{\perp} dk'_{\perp} \int dk'_{\parallel} \mathcal{E}'_k(t_m) G'(k', t_{m-1})$$

1) 凡有“ $n$ ”上标者, 皆表示无量纲量。

2) “ $1n \rightarrow 2n$ ”: 表示把花括弧中第一项里每个量的下标都从 1 改为 2, 即得到花括弧中的第二项。

其中

$$G' = G\Omega_e = \frac{1}{\pi^{1/2}\alpha'(\alpha_1'^2 - \alpha_2'^2)} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\langle \tau \rangle'_m}{\alpha_1'^2}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1'}} e^{\left(\frac{b_1'^2}{\alpha_1'} - \epsilon_1'\right)} \right. \\ \left. \times \operatorname{erf} \left( \sqrt{\alpha_1'} v_1' + \frac{b_1'}{\sqrt{\alpha_1'}} \right)_{v_1'}^{v_2'} - (\alpha_1' \rightarrow \alpha_2') \right\},$$

( )<sub>v\_1'}^{v\_2'}</sub> 表示把  $v_2'$  代替 ( ) 中的  $v_1'$  后, 减去把  $v_1'$  代替 ( ) 中的  $v_2'$  后得到的值。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] C. S. Wu and L. C. Lee, *Astrophys. J.*, **230**(1979), 621.
- [ 2 ] L. C. Lee and C. S. Wu, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 1348.
- [ 3 ] P. Sprangle, V. L. Granatstein and A. Drobot, *J. Phys. (Paris)*, **38**(1977), C6-135.
- [ 4 ] H. S. Uhm, R. C. Davidson and K. R. Chu, *Phys. Fluids*, **21**(1978), 1866; **21**(1978), 1877.
- [ 5 ] H. S. Uhm and R. C. Davidson, *Phys. Fluids*, **22**(1979), 1804.
- [ 6 ] A. I. Akhiezer, I. A. Akhiezer, R. V. Polovin, A. G. Sitenko and K. N. Stepanov, "Plasma Electrodynamics", Pergamon Press, Vol. 2, p. 67(1975).
- [ 7 ] C. S. Wu and S. T. Tsai, M. J. Xu, J. W. Shen, 1980. (将提交 *Astrophys. J.*)

## THE QAUSILINEAR THEORY OF AN ELECTROMAGNETIC CYCLOTRON INSTABILITY

KE FU-JIU CHEN YIAN-PING ZHOU YU-MEI

(Institute of Physics, Academia Sinica)

C. S. WU

(Institute for Physical Science and Technology University of Maryland,  
College Park, Maryland 20742, U. S. A.)

### ABSTRACT

We consider the nonlinear saturation of a fast  $\mathbf{x}$  mode instability near the electron cyclotron frequency due to electron population inversion. A quasilinear theory is discussed. The corresponding saturation time, amplitudes as well as the temporal evolution of the electron distribution functions are also studied.