第 30 卷 第 11 期　　物 理 学 报　　Vol. 30, No. 11
1981 年 11 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Nov., 1981

关于参量阵近场

钱祖文
(中国科学院声学研究所)
1980 年 12 月 25 日收到

提　　要

本文证明 Berktay 关于参量阵近场表示式中所采用的菲涅耳近似是不合理的。

Berktay[1] 在研究线源参量阵近场时，计算了下述积分：

$$S(R,\theta)=\int\frac{1}{r}\exp\{-(\alpha_1+\alpha_2+jk)x-(\alpha+jk)r\}dx \tag{1}$$

式中 α_1, α_2 和 α 分别为两个原频波及差频波的吸收系数，k 是差频波数，(R,θ) 是场点的极坐标，线源阵是分布在 x 轴上．在计算(1)式时，他用 R^{-1} 代替 r^{-1}，而在相位因子中取近似

$$r=[R^2+x^2-2Rx\cos\theta]^{1/2}\simeq R-x\cos\theta+\frac{x^2}{2R}\sin^2\theta. \tag{2}$$

如果在(2)式中忽略 x^2 的项，则退化为 Westervelt[2] 远场近似．显然．文献 [1] 的近似相应于辐射问题中的菲涅耳近似．在(1)式中，取 $1/r=1/R$，并将 (2) 式代入 (1) 式的相位因子中，通过积分之后，Berktay 得到了场的菲涅耳修正解，他用所得到的理论结果可以部分解释 Smith 的实验(参看文献[1]).本文作者认为，用 R^{-1} 代替 r^{-1} 忽略了近场源的振幅特征，(2)式的相位因子修正对参量阵主波束几乎是没有贡献[3]．这里要证明的是，(2)式对近场来说也是不合理的，其讨论如下．因为

$$r=[R^2+x^2-2xR\cos\theta]^{1/2}=\begin{cases}R(1+t^2-2t\cos\theta)^{1/2}, & t=\dfrac{x}{R}, \quad R>x;\\ x(1+t^2-2t\cos\theta)^{1/2}, & t=\dfrac{R}{x}, \quad R<x.\end{cases} \tag{3}$$

我们只讨论 $R>x$ 的情形，$R<x$ 的情形完全类似．令

$$r=Rg(t)=R(1+t^2-2t\cos\theta)^{1/2}=R\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n. \tag{4}$$

由熟知的关系

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{Rg(t)}=\frac{1}{R}\sum_{m=0}^{\infty}P_m(\cos\theta)t^m, \tag{5}$$

$P_m(\cos\theta)$ 是勒让德多项式．将(4)和(5)式相乘得到

$$r\cdot\frac{1}{r}=1=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_nP_m(\cos\theta)t^{m+n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{n} a_m P_{n-m}(\cos\theta) \right\} t^n. \tag{6}$$

因为上式对于(0,1)区别内任何一个 t 值都成立,则必有

$$a_0 P_0(\cos\theta) = 1,$$

$$\sum_{m=0}^{n} a_m P_{n-m}(\cos\theta) = 0 \quad n \neq 0.$$

解之得

$$\begin{aligned} &a_0 = 1, \qquad a_1 = -\cos\theta, \qquad a_2 = \frac{1}{2}\sin^2\theta \\ &a_3 = \frac{1}{2}\cos\theta\sin^2\theta, \qquad a_4 = -\frac{1}{8}(1 - 5\cos^2\theta)\sin^2\theta \end{aligned} \tag{7}$$

故当 $R > x$ 时,

$$r = R - x\cos\theta + \frac{x^2}{2R}\sin^2\theta + f\left(\frac{x}{R}, \cos\theta\right) R\sin^2\theta. \tag{8}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{R}, \cos\theta\right) = &\frac{x^3}{2R^3}\cos\theta - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{R}\right)^4 (1 - 5\cos^2\theta) \\ &+ \frac{1}{8}\left(\frac{x}{R}\right)^5 (7\cos^2\theta - 3) - \cdots. \end{aligned} \tag{9}$$

对参量阵来说,由于波束很窄,θ 很小,于是有 $\cos\theta$, $\cos^2\theta$, $\cdots \to 1$, 故

$$f\left(\frac{x}{R}, \cos\theta\right) \simeq \frac{x^3}{2R^3}\frac{R}{R-x} \quad R > x. \tag{10}$$

而(2)式中忽略掉的相位部分为

$$\Delta\phi_2 \simeq \frac{x^3}{2R^3}\frac{R}{R-x} kR\sin^2\theta. \tag{11}$$

修正的相位部分为

$$\Delta\phi_1 = \frac{x^2}{2R^2} kR\sin^2\theta. \tag{12}$$

两者之比为

$$\frac{\Delta\phi_2}{\Delta\phi_1} \simeq \frac{x}{R-x}.$$

当 x 减小时(即离场点较远的那些源),这个比值减小,但当 x 增大时(即离场点愈来愈近的那些源),比值增大,当 $x \geqslant \frac{R}{2}$ 时,这个比值大于 1,这说明在近场的右半个阵中,被忽略掉的相位变化比修正了的相位变化大.而在左半阵中,例如 $x \leqslant R/4$, $\Delta\phi_2/\Delta\phi_1 \leqslant 1/3$, 但在 Smith 实验中,$k = 4.2$ 厘米$^{-1}$, $R = 5$ 米,在 $\theta \geqslant 2°$ 时,$kR\sin^2\theta \geqslant 2$, $\Delta\phi_2 \leqslant 1/48$, 但 $\Delta\phi_1 \leqslant 1/16$. 故即使在左四分之一阵中,(2)式的修正意义也不大.

另一个可能是 $kR\sin^2\theta$ 很小,这时 $\Delta\phi_1$, $\Delta\phi_2$ 都很小,从而使 Berktay 的近场近似退化为 Westervelt 近似.

由此可见,Berktay 近场修正对近场辐射源是不合理的.

参 考 文 献

[1] H. O. Berktay, *J. Sound and Vib.* **20**(1972), 135.
[2] P. J. Westervelt, *J. Acoust. Soc. Am.*, **35**(1963), 535.
[3] 钱祖文，本刊本期.

ON THE NEAR FIELD OF PARAMETRIC SOUND ARRAY

QIAN ZU-WEN
(*Institute of Acoustics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, it has been shown that in the near field of parametric sound array, the Fresnel's approximation proposed by Berktay is inappropriate.