

Born-Infeld 电动力学的 U_1 主丛表述

安 瑛 陈 时 郭 汉 英

(中国科学院理论物理研究所)

1981 年 1 月 29 日收到

提 要

本文给出了 Born-Infeld 电动力学的 U_1 主丛表述, 以及检验粒子在 Born-Infeld 电磁场中的运动方程, 检验粒子受到两个力, 一个相当于 Lorentz 力, 一个相当于 Poincaré 压力。

Born-Infeld 电动力学^[1] 是一个很有趣的非线性理论。在假设存在一个最大电场强度 b 的前提下, 作者建议了一个非线性拉氏量, 将这个拉氏量线性化时, 回到通常的 Maxwell 理论, 而它的球对称静态解相应于一个具有有限能量的电子。事实上引进最大电场强度 b , 相当于引进了一个特征长度, 或者说特征荷质比 $b^{-1/2}$ 。这对于在经典意义下解决电子自能问题是有意义的。但是, 也正是理论的非线性性质给进一步研究带来了很大的困难。近年来, 由于对广延费密子模型的兴趣, 一些作者又开始了对它的研究^[2]。

本文给出 Born-Infeld 电动力学的 U_1 主丛表述。并指出, 只要适当选取 U_1 主丛丛空间的 Riemann 度量, Born-Infeld 电动力学的拉氏函数就可以从这个主丛的标量曲率得出。同时, 我们给出了检验粒子在 Born-Infeld 电磁场中的运动方程, 这个运动方程就是主丛上的测地线方程。由于检验粒子同时受到两个力, 一个相应于 Lorentz 力, 一个相应于 Poincaré 压力, 这使讨论广延荷电粒子模型成为可能。

考虑以四维 Minkowski 时空为底, U_1 群为结构群的主丛, 并在丛空间中引入度规

$$dX^2 = f_{ij}(x)dX^i dX^j = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - b^{-1}h(d\theta + A_\mu(x)dx^\mu)^2, \quad (1)$$

其中 $i, j = 0-3, 5$; $\mu, \nu = 0-3$, $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, $e^{i\theta}$ 是 U_1 群的元素, $A_\mu(x)$ 是电磁势, b 是最大电场强度, 在我们所取的单位制下其量纲为 $[L]^{-2}$, 而 h 是电场强度 $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ 的下述无量纲泛函

$$h = \left[\frac{b^2 \left\{ 1 - \left[1 + \frac{1}{2b^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16b^4} (F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu})^2 \right]^{1/2} \right\}^{2/3}}{-\frac{1}{4} F_{\lambda\tau} F^{\lambda\tau}} \right]^{2/3}. \quad (2)$$

这里 $*F^{\mu\nu}$ 是 $F^{\mu\nu}$ 的对偶张量。具有这样度规的丛空间的 Riemann 几何可以给出 Born-Infeld 电动力学的几何描述。

由度规 f_{ij} 计算相应的 Christoffel 符号

1) 本文取 $c = \hbar = e = 1$ 的单位制。

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} f^{il} (\partial_{il} f_{jk} + \partial_{kl} f_{ij} - \partial_{il} f_{jk}) \quad (3)$$

和 Ricci 曲率张量

$$\mathcal{R}_{jl} = \partial_i \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{ji}^i + \Gamma_{hi}^i \Gamma_{jl}^h - \Gamma_{hi}^j \Gamma_{jl}^i, \quad (4)$$

得到主丛空间的标量曲率为

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{h} \partial_\mu \partial^\mu h + \frac{1}{2h^2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{4} b^{-1} h F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5)$$

取作用量积分为

$$I = -b(2\pi)^{-1} \int \mathcal{R} \sqrt{|\det f_{ij}|} d^5 X, \quad (6)$$

得到拉氏密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} h^{3/2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= b^2 \left\{ 1 - \left[1 + \frac{1}{2b^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16b^4} (F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu})^2 \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

这就是 Born-Infeld 电动力学的拉氏密度. 其场方程为

$$\partial_\lambda \left(\frac{F^{\lambda\tau} - \frac{1}{4b^2} (F_{\rho\sigma} * F^{\rho\sigma}) * F^{\lambda\tau}}{\left[1 + \frac{1}{2b^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16b^4} (F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu})^2 \right]^{1/2}} \right) = 0. \quad (8)$$

同时,由丛上度规相应的基的 Bianchi 恒等式可以得到第一套 Maxwell 方程,

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0. \quad (9)$$

此外,质量为 μ 、电荷为 q 的检验粒子在 Born-Infeld 电磁场中的运动方程,也就是从空间上的测地线方程为

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} &= q \left[\frac{h}{h - \frac{q^2 b}{\mu^2} (h - 1)} \right]^{1/2} F_\tau^\lambda \frac{dx^\tau}{ds} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{q^2 b}{\mu} \left[h^2 - \frac{q^2 b}{\mu^2} (h - 1) h \right]^{-1} \partial_\tau h \left(\frac{dx^\tau}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} - \eta^{\tau\lambda} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

可见,在 Born-Infeld 非线性电动力学中检验粒子受到两个力,一个是相应于 Lorentz 力的与电磁场强有关的力,一个是相应于 Poincaré 压力的与电磁场强的导数有关的力. 由于这类 Poincaré 压力的存在,有可能给出广延荷电粒子的图象¹⁾. 就我们所知,这是第一次给出了 Born-Infeld 电磁场中的检验粒子运动方程.

显然,(2)式中的 h 线性化为 1,则上述理论正好给出 Maxwell 理论的 U_1 主丛表述. 这样,本文事实上给出了 Maxwell 电动力学和 Born-Infeld 电动力学的统一表述. 显然,可以用类似的办法来处理其它的拉氏量是电磁势的非线性泛函的电动力学,我们将在别处详细讨论这个问题^[3].

此外,采用主丛表述便于讨论问题的拓扑性质^[4],这一点在这里也是适用的.

感谢彭桓武教授的有益讨论.

1) 彭桓武: 内部讨论会上的报告, 1980 年 10 月.

参 考 文 献

- [1] M. Born, *Proc. Roy. Soc. London*, **A143**(1934), 410; M. Born & L. Infeld, *ibid.*, **A144**(1934), 425.
- [2] M. Soler, *Phys. Rev. D*, **8**(1973), 3424; G. Boillat, *J. Math. Phys.*, **11**(1970), 941; A. F. Rañada, J. Usón & L. Vázquez, *Phys. Rev. D*, **22**(1980), 2423.
- [3] An Ing, Chen Shi & Guo Han-ying, "A Principal Fibre Bundle Theory for the Scalar-Vector Gauge Field and U_1 dynamics", to be published.
- [4] T. T. Wu & C. N. Yang, *Phys. Rev. D*, **12**(1975), 3845.

A U_1 PRINCIPAL BUNDLE THEORY FOR THE BORN-INFELD ELECTRODYNAMICS

AN YING CHEN SHI GUO HAN-YING

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

A U_1 -bundle formalism for the Born-Infeld electrodynamics is proposed and the equation of motion for a test particle in the Born-Infeld electromagnetic field is given. There are two forces acting on the test particle, one corresponds to the Lorentz force and the other the Poincaré stress.