

McMillan T_c 公式的解析推导 (I)

$\mu^* = 0$ 情形

吴杭生 茅德强 顾一鸣

(中国科学技术大学)

1980 年 11 月 15 日收到

提 要

作者在 $\mu^* = 0$ 情形, 从 Eliashberg 方程解析地导出如下的 T_c 公式:

$$T_c = a\omega_{\log} \exp \left\{ -b \frac{1 + c\lambda}{\lambda} \right\},$$

式中 $a = 2\gamma/\pi$, $b = c = 1$; $\ln \gamma = C = 0.5772$ 是 Euler 常数.

这个 T_c 公式只有在 $T_c \leq \frac{0.36}{\alpha}$ (K) 以下才是正确的, α 是个大于 1 并随材料而异的常数.

我们推测, 当 T_c 超过上述范围后, T_c 公式的函数结构很可能不同于 McMillan T_c 公式, 至少 a , b 和 c 等参量不再是个不依赖于材料的常数了.

一、引 言

1968 年, McMillan^[1] 用弥合 Eliashberg 方程数值解方法提出了如下的 T_c 公式:

$$T_c = a\omega_0 \exp \left\{ -b \frac{1 + c\lambda}{\lambda - d\mu^*(1 + q\lambda)} \right\}, \quad (1)$$

式中 ω_0 是德拜温度 Θ ; $a = \frac{1}{1.45}$, $b = 1.04$, $c = d = 1$, $q = 0.62$.

这个 T_c 公式经过很多作者的讨论^[2-16], 看来在基本上已没有多少分歧. 这就是: 在 λ 足够小的区域, 这个 T_c 公式在函数结构上是正确的. 可是, 在枝节问题上, 人们的看法并不一致. 例如, McMillan T_c 公式适用范围究竟有多宽? 不少人认为, 它约在 $\lambda < 1$ 区域中适用 (例见文献 [10]). 但也有人不同意这个看法. 认为这个区域因有效声子谱 $\alpha^2 F(\omega)$ 形状不同而不一样. 对一些材料, 这个范围宽些; 对另一些材料却很窄 (例见文献 [17]). 又例如, 特征频率 ω_0 的意义究竟是什么? 有人同意 McMillan 的说法, 认为它是德拜温度^[7,12], 但也有人认为它应是 $\langle \omega \rangle$ ^[8], $\sqrt{\langle \omega^2 \rangle}$ ^[14] 或 ω_{\log} ^[10], 或其它更复杂的定义^[4]. 另外, a , b 和 c 等参量是常数呢? 还是 λ , μ^* 和有效声子谱谱形的函数呢? 如果是常数, 它们的真实数值是什么? 对这个问题的说法也同样是很很多的 (例见文献 [2, 4, 9, 15, 16]).

实际情况是, 在 McMillan 提出他的 T_c 公式后的十多年内, 上述混乱是在逐年增加

的. 出现这个情况的原因是, Eliashberg 方程过于复杂, 以至很难由此方程“干净地”导出一个适用于小 λ 区域的超导临界温度表示式, 因而迫使人们不得不在他们推导 T_c 公式的过程中, 采取一些牵强的数学步骤, 或者正确性很难说明的简化近似. 这就使得他们得到的结果因他们采用的简化近似不同而不同了^[2-7]. 为了回避数学困难, 不少作者采用弥合数值解方法来研究. 这是一个纯经验方法. 用它得到的 T_c 公式不仅缺少理论根据, 而且任意性很大. 这个缺点更促成了上述混乱情况的出现.

本文试图在 $\mu^* = 0$ 情形, 把适用于小 λ 区域的 T_c 公式从 Eliashberg 方程“干净地”推导出来. 为了保证所得结果的正确性, 对所作的近似进行了分析, 并弄清它们的适用范围. 本文得到的结果为

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \cdot \omega_{\log} \cdot \exp \left\{ -\frac{1+\lambda}{\lambda} \right\}. \quad (2)$$

$\ln \gamma = C = 0.5772$ 是 Euler 常数. 自然, 这就是 McMillan T_c 公式(1). 其中特征频率 ω_0 正好是 ω_{\log} , 和文献 [10] 指出的符合; 参量 a , b 和 c 分别等于 $2\gamma/\pi$, 1 和 1.

本文的分析表明了, T_c 公式(2)只有在 $T_c \leq 0.36/\alpha$ 以下才是正确的, α 是个大于 1 的依赖材料的常数. 我们推测, 当温度超过 $0.36/\alpha$ 后, T_c 公式很可能在函数结构上发生变化, 至少 a , b 和 c 等参量不再是些不依赖材料的常数了.

二、线性 Eliashberg 方程

当 $\mu^* = 0$ 时, 超导临界温度可以从下面的线性 Eliashberg 方程计算得到^[20,21]:

$$G_n \bar{\Delta}_n = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_{n-m} + \lambda_{n+m+1}) \bar{\Delta}_m, \quad (3)$$

其中

$$G_n = 2n + 1 + \lambda + 2 \sum_{l=1}^n \lambda_l; \quad (4)$$

$$\lambda_l = \lambda \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega^2 + l^2(2\pi T)^2}; \quad (5)$$

$g(\omega)$ 是规一的有效声子谱; ω_{ph} 是声子最大的频率; $\bar{\Delta}_n$ 是在 Matsubara 表象中适当定义的能隙函数. 方程(3)的数值解表明了, 当 $\mu^* = 0$ 时, $\bar{\Delta}_l$ 随着 l 增大单调地趋于零. 图 1 是个例子. 它画出 $T = 0.56\text{K}$ 和 2.8K 时, Pb 的能隙函数 $\bar{\Delta}_l$. Pb 的有效声子谱数据取自文献 [25].

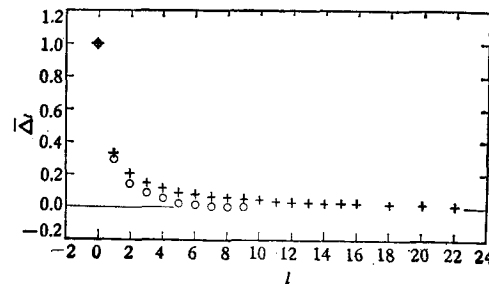


图 1

Eliashberg 方程原来是个复杂的奇异积分方程^[18,19]. 后来, Owen 和 Scalapino 在 Matsubara 表象中把它变换成联立的方程组^[20]. 在线性近似下, 这就是方程 (3). 这种形式下的 Eliashberg 方程不仅使数值计算超导临界温度任务变得容易进行^[10,14], 而且还允许用一些比较简单的数学方法解析地导出适用于 $\lambda > \Lambda$ 区域中的 T_c 级数解^[22], $1/\Lambda$ 是级数解的收敛半径^[23,24]. 可是, 在 $\lambda < \Lambda$ 区域, 特别是当 λ 很小时, 方程 (3) 是很难解析求解的. 为了适合本文所研究的问题, 需把它变换成另一种形式.

引入变换

$$\frac{\omega}{\omega^2 + l^2(2\pi T)^2} = \int_0^\infty d\xi e^{-\xi\omega} \cos(2\pi l T \xi), \quad (6)$$

把 (5) 式改写为^[24]

$$\lambda_l = \lambda \int_0^\infty d\xi K(\xi) \cos(2\pi l T \xi). \quad (7)$$

这里, 引入了一个函数

$$K(\xi) = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \omega e^{-\xi\omega} = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\omega_{ph}} d\omega \alpha^2 F(\omega) e^{-\xi\omega}. \quad (8)$$

它实际上就是有效声子谱 $\alpha^2 F(\omega)$ 的 Laplace 变换. 以后, 把这个函数叫做谱函数. 它具有下列性质^[24]:

$$\int_0^\infty d\xi K(\xi) = 1; \quad (9)$$

$$\frac{d^n K(\xi)}{d\xi^n} = (-)^n \langle \omega^{n+1} \rangle. \quad (10)$$

把 (7) 式代入方程 (3) 和 (4) 中, 经过简单运算后, 得到如下的方程:

$$\left\{ 1 + \frac{\lambda}{2\pi T} \int_0^\infty dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{(2n+1)\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \right\} \bar{\Delta}_n \\ = \frac{\lambda}{\pi T} \int_0^\infty dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2n+1} \bar{\Delta}(x). \quad (11)$$

在上式中, 引进了一个新定义的能隙函数 $\bar{\Delta}(x)$. 它的定义是

$$\bar{\Delta}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \bar{\Delta}_l \cos\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)x\right]. \quad (12)$$

它是 x 的周期函数, 周期是 4π . 用 $\bar{\Delta}_l$ 的数值解, 由 (12) 式可直接算出 $\bar{\Delta}(x)$. 图 2 画出

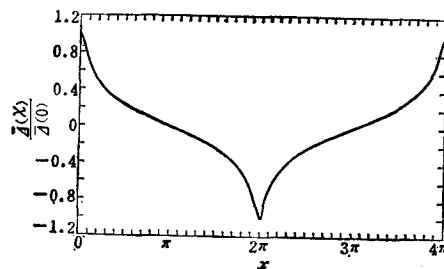


图 2

$T = 1.3\text{K}$ 时, 用 Hg 谱^[25]算出的函数 $\frac{\bar{\Delta}(x)}{\bar{\Delta}(0)}$ 在一个周期中的全貌. $\bar{\Delta}(0)$ 是 $x=0$ 时 $\bar{\Delta}(x)$ 的数值.

把方程 (11) 两端乘以 $\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]$, 并对 n 求和, 得到

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(y) + \frac{\lambda}{2\pi T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]}{2n+1} \bar{\Delta}_n \int_0^{\infty} dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \\ = \frac{\lambda}{\pi T} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right] \int_0^{\infty} dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2n+1} \bar{\Delta}(x). \end{aligned} \quad (13)$$

由于级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]}{2n+1} \cdot \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \bar{\Delta}_n$$

对 x 一致收敛, 又积分 $\int_0^{\infty} dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right)$ 是收敛的, 所以可以把上方程左端第二项中的积分和求和交换次序. 不难证明方程 (13) 左端第二项等于

$$\frac{\lambda}{2\pi T} \int_0^{\infty} dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \Phi(x, y), \quad (14)$$

式中

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right] \bar{\Delta}_n \\ &= \frac{1}{4 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \left\{ \int_0^{y+x} d\xi \bar{\Delta}(\xi) - \int_0^{y-x} d\xi \bar{\Delta}(\xi) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

图 3 画出 $T = 1.3\text{K}$ 时, 函数 $\Phi(x, 0)/\bar{\Delta}(0)$ 在一个周期中的全貌.

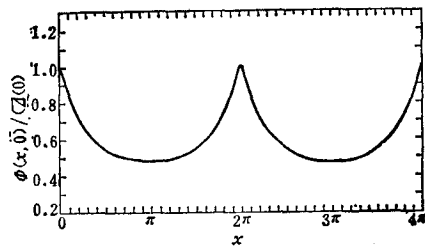


图 3

把 (14) 式代入 (13) 式, 得到

$$\bar{\Delta}(y) + \frac{\lambda}{2\pi T} \int_0^{\infty} dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \Phi(x, y)$$

$$= \frac{\lambda}{\pi T} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) y \right] \int_0^{\infty} dx K \left(\frac{x}{2\pi T} \right) \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]}{2n+1} \Delta(x). \quad (16)$$

这样, 我们便把线性 Eliashberg 方程改写成上面的积分方程, 其中出现的函数都是解析的. 不过, 应注意到, 此方程右边那一项求和和积分的次序是不能交换的.

三、超导临界温度

用数值积分方法算出 Hg 和非晶态 Ga 的谱函数

$$K \left(\frac{x}{2\pi T} \right) = \int_0^{\omega_{\text{ph}}} d\omega g(\omega) \omega \exp \left\{ -\frac{\omega x}{2\pi T} \right\}. \quad (17)$$

这两个材料的有效声子谱数据取自文献 [25] 和 [26]. 计算结果画在图 4 中. 纵坐标是 $\frac{K \left(\frac{x}{2\pi T} \right)}{K(0)}$, 横坐标是 $\frac{x}{2\pi T}$. 从图 4 看出: 尽管有效声子谱 $\omega^2 F(\omega)$ 是一个很复杂的函数, 可是它的 Laplace 变换 $K \left(\frac{x}{2\pi T} \right)$ 却是一个光滑的单调减函数. 随着 x 增大, 这个函数趋于零很快, 实际上仅在一个小区间 $0 \leq x \lesssim x_0$ 内不为零. 为了获得一个数量级的概念, 我们粗略地把 x_0 定义为

$$K \left(\frac{x_0}{2\pi T} \right) = 1 \times 10^{-2} \text{ meV}. \quad (18)$$

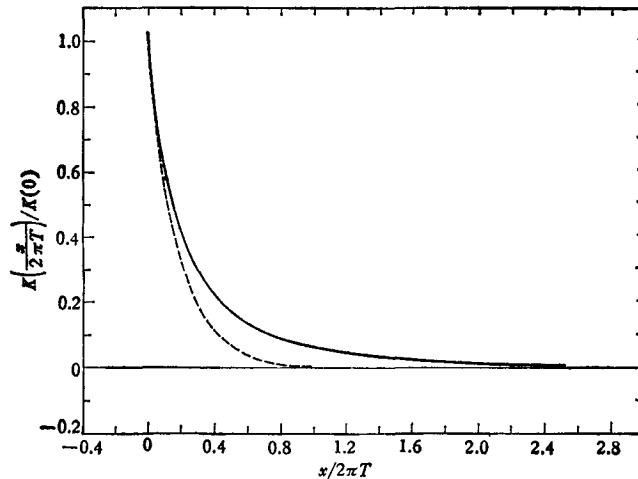


图 4

—为 Hg, $\langle \omega \rangle = 3.25 \text{ meV}$; ---为非晶态 Ga, $\langle \omega \rangle = 5.44 \text{ meV}$

用数值计算方法, 计算出 Hg^[25], Pb^[25], 非晶态 Ga 和 Bi^[26] 在不同温度下的 x_0 值. 计算结果画在图 5 中, 并近似地用下面的经验公式表示出来:

$$x_0 = \alpha T. \quad (19)$$

α 的数值见表 1. 利用谱函数这个性质, 可以把方程 (16) 大加简化. 这样, 我们便能很

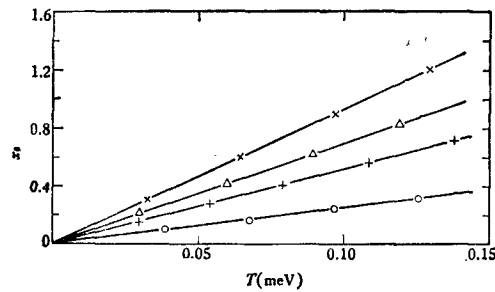


图 5

+ 为 Hg; ○ 为 Pb; ▲ 为非晶态 Ga; × 为非晶态 Bi

表 1

材 料	α (meV ⁻¹)	(34) 式
Pb	2.51	$T_c \lesssim 0.15\text{K}$
Hg	5.18	$T_c \lesssim 0.07\text{K}$
非晶态 Ga	6.98	$T_c \lesssim 0.05\text{K}$
非晶态 Bi	9.28	$T_c \lesssim 0.03\text{K}$

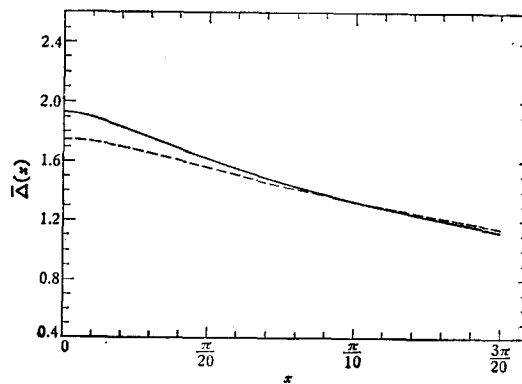


图 6

容易地把它解出来。

首先,我们来简化方程(16)的右端. 把 $T = 1.3$ 和 2.4K 时, $\Delta(x)$ 曲线在 $x = 0$ 附近的部分放大画在图 6 中. 它们是用 Hg 的有效声子谱数据计算出的^[25]. 从图 6 看出, 在 $x \lesssim \frac{\pi}{100}$ 区间内, $\Delta(x)$ 近似地等于 $\Delta(0)$. 考虑到上面讲到的谱函数 $K\left(\frac{x}{2\pi T}\right)$ 的性质, 不难看出, 方程(16)右端的积分仅来自 $0 \leq x \leq x_0$ 区间内被积函数的贡献. 因此, 只要温度 T 足够低, 使得

$$x_0 \lesssim \frac{\pi}{100} \quad (20)$$

时, 积分号下的能隙函数 $\Delta(x)$ 便可近似地用 $\Delta(0)$ 替代, 即方程(16)右端等于

$$\Delta(0) \frac{\lambda}{\pi T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]}{2n + 1} \int_0^{\infty} dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]. \quad (21)$$

由于此式中对 n 求和和对 x 积分的次序不能互换, 所以我们需要把对 x 的积分先积出来. 利用 (17) 式, 不难证明

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi T} \int_0^{\infty} dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \\ &= 2 \int_0^{\omega_{\text{ph}}} d\omega g(\omega) \frac{\frac{\omega^2}{T^2}}{(2n+1)^2\pi^2 + \frac{\omega^2}{T^2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

把它代入 (21) 式, 并把对 ω 积分和对 n 求和交换次序, 得到方程 (16) 的右端等于

$$= 2\lambda \int_0^{\omega_{\text{ph}}} d\omega g(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]}{2n+1} \frac{\frac{\omega^2}{T^2}}{(2n+1)^2\pi^2 + \frac{\omega^2}{T^2}}. \quad (23)$$

再来简化方程 (16) 左端. 把 $T = 1.3\text{K}$ 和 $y = 0$ 时, $\Phi(x, y)$ 曲线在 $x = 0$ 附近的一段放大画在图 7 中¹⁾. 它们是用 Hg 谱^[25] 和非晶态 Ga 谱^[26] 计算出的. 从图 7 可见, 当条件 (20) 成立时, 方程 (16) 左端第二项的积分中的函数 $\Phi(x, y)$ 可以用 $\Phi(0, y)$ 替代. 在这个近似下, 利用谱函数满足的规一条件 (9) 式以及下面等式:

$$\Phi(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \left\{ \int_0^{y+x} d\xi \bar{\Delta}(\xi) - \int_0^{y-x} d\xi \bar{\Delta}(\xi) \right\} = \bar{\Delta}(y), \quad (24)$$

立刻得到

$$\text{方程 (16) 左端} = (1 + \lambda)\bar{\Delta}(y). \quad (25)$$

让 (23) 和 (25) 两式相等, 得到

$$\frac{1 + \lambda}{\lambda} \bar{\Delta}(y) = 2\bar{\Delta}(0) \int_0^{\omega_{\text{ph}}} d\omega g(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]}{2n+1} \frac{\frac{\omega^2}{T^2}}{(2n+1)^2\pi^2 + \frac{\omega^2}{T^2}}. \quad (26)$$

由此方程立刻得到如下的定临界温度 T_c 方程:

$$\frac{1 + \lambda}{\lambda} = \int_0^{\omega_{\text{ph}}} d\omega g(\omega) S\left(\frac{\omega}{T_c}\right), \quad (27)$$

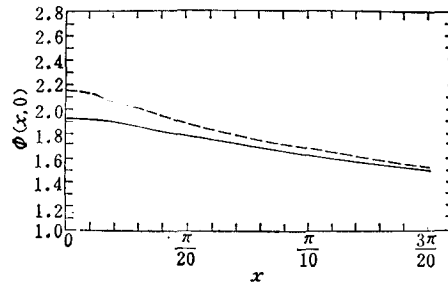


图 7

——为 Hg; ——为非晶态 Ga

1) 由于下面关心的是 $y \rightarrow 0$ 时方程 (16) 的解, 所以图 7 中只画了 $\Phi(x, 0)$ 曲线. 显然, 它也反映出 y 不等于零但很小时, $\Phi(x, y)$ 曲线的性质.

其中

$$S(\eta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\eta^2}{(2n+1)^2 \pi^2 + \eta^2}. \quad (28)$$

在附录一中,我们证明了

$$S\left(\frac{\omega}{T_c}\right) = \ln\left(\frac{2\gamma\omega}{\pi T_c}\right) + \frac{\omega}{4T_c} \int_0^{\infty} dx \ln|1-x^2| \operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{\omega x}{2T_c}\right). \quad (29)$$

$\ln \gamma = C = 0.5772$ 是 Euler 常数. 把(29)式代入(27)式,得到

$$\frac{1+\lambda}{\lambda} = \ln(2\gamma\omega_{\log}/\pi T_c) + \delta(T_c), \quad (30)$$

式中

$$\delta(T_c) = \frac{1}{T_c} \int_0^{\infty} dx \ln|1-x^2| \Gamma\left(\frac{x}{T_c}\right), \quad (31a)$$

$$\Gamma\left(\frac{x}{T_c}\right) = \int_0^{\omega_{\text{ph}}} d\omega \log(\omega) \omega \exp\left(-\frac{\omega x}{T_c}\right) \left\{1 + \exp\left(-\frac{\omega x}{T_c}\right)\right\}^{-1}. \quad (31b)$$

在使(20)式成立的温度区间内, $\delta(T_c)$ 很小,可以略去不计(见附录二). 这样,便获得下面的 T_c 公式:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \cdot \omega_{\log} \cdot \exp\left\{-\frac{1+\lambda}{\lambda}\right\}. \quad (32)$$

这就是 McMillan T_c 公式(1),其中 $\omega_0 = \omega_{\log}$, $a = 2\gamma/\pi$, $b = c = 1$.

四、适用范围

导出 T_c 公式(32)需要用到三个近似:(1)把方程(16)右端积分号下的 $\Delta(x)$ 近似地用 $\Delta(0)$ 替代.(2)把此方程左端第二项积分号下的函数 $\Phi(x, y)$ 用 $\bar{\Delta}(y)$ 替代.(3)忽略(30)式右端第二项的贡献. 上面一节的分析表明了,在不等式(20)成立的温区内,这些近似引起的误差是可以忽略的.

因此, T_c 公式(32)的适用范围可由不等式(20)估计得到. 利用(19)式并把其中 T 用 T_c 代替,由(20)式得到

$$T_c \lesssim \frac{\pi}{100\alpha} \text{ (meV)} \quad (33)$$

或者

$$T_c \lesssim \frac{0.36}{\alpha} \text{ (K)}. \quad (34)$$

表1列出了由此式估计出数值. 它表明了, T_c 公式(32)适用的温度范围因材料而异,一般仅约 0.1K.

一旦温度超过(34)式允许的范围之外,导出 T_c 公式(32)所用到的三个近似,特别是头两个近似,迅速变坏. 这样, T_c 公式很可能在函数结构上不再保持 T_c 公式(1)的函数形式了,至少其中 a , b 和 c 等参量均不再是些不依赖于材料的常数了.

附 录 一

把 $S(\eta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\eta^2}{(2n+1)^2 \pi^2 + \eta^2}$ 表示为下面的回路积分:

$$S(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{2} \oint_{C_n} dz \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right)}{z} \cdot \frac{\eta^2}{z^2 + \eta^2}, \quad (\text{A.1})$$

C_n 是如图 8 所示的过 $z = 2n\pi$ 点的半圆. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 沿大圆弧积分的贡献等于零, 只剩下沿虚轴的积分. 不难证明

$$S(\eta) = \int_0^{\infty} dy \frac{\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}y\right)}{y} \frac{\eta^2}{\eta^2 - y^2}. \quad (\text{A.2})$$

积分号上的一撇表示积分取主值. 利用部份积分方法, 立刻得到

$$S(\eta) = \ln\left(\frac{2r\eta}{\pi}\right) + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} dx \ln|1-x^2| \frac{\eta}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{2}\eta x\right)}. \quad (\text{A.3})$$

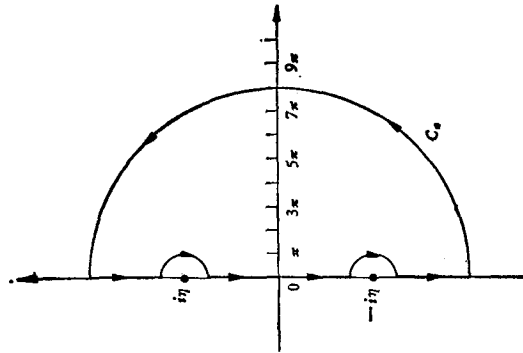


图 8

附 录 二

把下面的展开式

$$\left[1 + \exp\left(-\frac{\omega x}{T_c}\right)\right]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n (n+1) \exp\left(-\frac{\omega n x}{T_c}\right) \quad (\text{A.4})$$

代入 (31b) 和 (31a) 式, 得到

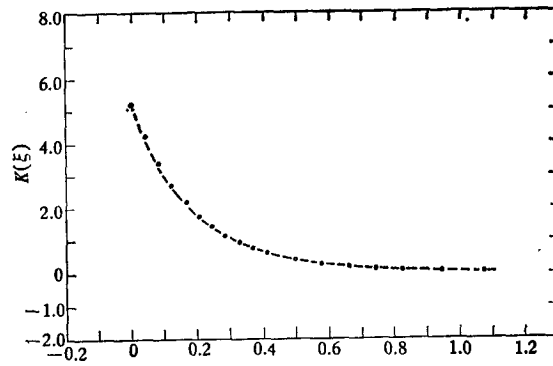
$$\delta(T_c) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{n+1}{T_c} \int_0^{\infty} dx \ln|1-x^2| K\left(\frac{(n+1)x}{T_c}\right). \quad (\text{A.5})$$

为了估算积分 $\delta(T_c)$ 的数值, 我们用弥合数值解方法, 用一个简单的函数来逼近 $K(\xi)$. 图 9 中的实线是用 Pb 谱^[25]算出的谱函数 $K(\xi)$, $\langle\omega\rangle$ 为 5.20 meV, 圆点“o”是根据函数 $\langle\omega\rangle \exp[-\langle\omega\rangle\xi]$ 算出的. 两者吻合较好. 把 (A.5) 式中的谱函数用 $\langle\omega\rangle \exp(-\langle\omega\rangle\xi)$ 替代, 并只保留求和的第一项, 得到

$$\begin{aligned} \delta(T_c) &\doteq \frac{\langle\omega\rangle}{T_c} \int_0^{\infty} dx \ln|1-x^2| \exp\left(-\frac{\langle\omega\rangle x}{T_c}\right) \\ &= -\exp\left(-\frac{\langle\omega\rangle}{T_c}\right) Ei\left(\frac{\langle\omega\rangle}{T_c}\right) - \exp\left(\frac{\langle\omega\rangle}{T_c}\right) Ei\left(-\frac{\langle\omega\rangle}{T_c}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

其中 $Ei(x)$ 是指数积分函数. 它的数值可从数学表^[27]中查出.

已知 Pb 的 $\langle\omega\rangle$ 等于 5.20 meV^[25], 由 (A.6) 式估算出 $\delta(T_c)$ 数值. 从表 2 中列出的数据可以看出在使 (20) 式成立的温度区间内, $|\delta(T_c)|$ 的数值在 10^{-2} 以下, 因而可以略去不计.



ξ
图 9

表 2

$T_c(K)$	$\delta(T_c)$	$T_c(K)$	$\delta(T_c)$
0.13	-2×10^{-3}	0.9	-3×10^{-2}
0.3	-1×10^{-2}	1.5	-5×10^{-2}
0.6	-2×10^{-2}	3.0	-1×10^{-1}

参 考 文 献

- [1] W. L. McMillan, *Phys. Rev.*, **167**(1968), 331.
- [2] A. E. Каракозов, Е. Г. Максимов, С. А. Мащков, *ЖЭТФ*, **68** (1975), 1937.
- [3] Л. Б. Дубовский, А. Н. Козолов, *ЖЭТФ*, **68** (1975), 2224.
- [4] W. Kessel, *Zeit. Naturforsch.*, **29A**(1974), 445.
- [5] H. Nowotny, *Phys. Stat. Sol.*, (b), **77**(1976), 623.
- [6] H. Nowotny, O. Hittair, *Phys. Stat. Sol.*, (b), **91**(1979), 647.
- [7] W. Klose and P. Hertel, *Zeit. Physik*, **239**(1970), 331.
- [8] R. C. Dynes, *Solid State Communication*, **10**(1972), 615.
- [9] J. W. Garland and P. B. Allen, *Physica.*, **55**(1971), 669.
- [10] P. B. Allen and R. C. Dynes, *Phys. Rev.*, **B12**(1975), 905.
- [11] D. A. Kirznit, E. G. Maximov, D. I. Khomskii, *J. Low Temp. Phys.*, **10**(1973), 791.
- [12] M. Dayam and J. Bar Sagi, *J. Low Temp. Phys.*, **37**(1979), 695.
- [13] C. R. Leavens and J. R. Carbotte, *Can. J. Phys.*, **49**(1971), 724.
- [14] S. G. Louis and M. L. Cohen, *Solid State Communication*, **22**(1977), 1.
- [15] 吴杭生、周子舫、王钟炎、张锡祥, *物理学报*, **29**(1980), 409.
- [16] 王钟炎、周子舫、茅德强、张锡祥、吴杭生, *物理学报*, **29**(1980), 843.
- [17] 周子舫、顾一鸣、茅德强、吴杭生, *物理学报*, **30**(1981), 277.
- [18] Г. М. Элиашберг, *ЖЭТФ*, **39** (1960), 1437.
- [19] D. J. Scalapino, *Superconductivity*, ed. by R. D. Parks, **1**(1969), 500.
- [20] C. S. Owen and J. Scalapino, *Physica*, **55**(1971), 691.
- [21] G. Bergmann and D. Rainer, *Zeit. Phys.*, **263**(1973), 59.
- [22] 吴杭生、蔡建华、龚昌德、吉光达、蔡俊道, *物理学报*, **26**(1977), 509.
- [23] 蔡俊道、吉光达、吴杭生、蔡建华、龚昌德, *物理学报*, **28**(1979), 393.
- [24] 周子舫、吴杭生、茅德强、顾一鸣, *物理学报*, **29**(1980), 1187.
- [25] J. M. Rowell, W. L. McMillan and R. C. Dynes, *A Tabulation of the Electron-phonon Interaction in Superconducting Metals and Alloys*, Part 1.
- [26] J. D. Leslie 等, 非晶态和无序超导体 Ga, Bi, Pb, PbBi 合金的 $\alpha^2F(\omega)$ 数据.
- [27] *Handbook of Mathematical Functions*, ed. by M. Abramowitz and I. A. Stegun.

AN ANALYTIC DERIVATION FOR THE MCMILLAN T_c FORMULA (I)

CASE OF $\mu^* = 0$

WU HANG-SHENG MAO DE-QIANG GU YI-MING
(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

In the case of $\mu^* = 0$, the following T_c formula is derived analytically from the Eliashberg equation

$$T_c = a\omega_{\log} \exp \left\{ -b \frac{1 + c\lambda}{\lambda} \right\}, \quad (1)$$

where, $a = 2\gamma/\pi$, $b = c = 1$ and $\ln \gamma = C = 0.5772$ which is the Euler constant.

The formula obtained by the authors holds only when T_c is less than $0.36/a$ (K), where α is a constant larger than 1 and differs from one material to another. We conjecture, it is very likely that, when T_c is larger than $0.36/\alpha$, the functional structure of the T_c formula differs from that of McMillan's or at least the parameters a , b , and c are no longer constants independent of materials.