第31卷 第11期 物 理 学 报 Vol. 31, No. 11
1982年11月 ACTA PHYSICA SINICA Nov., 1982

闭路格林函数和非线性响应理论（II）

王维镛 林中衡 苏肇冰 郝柏林
（复 旦 大 学） （中国科学院理论物理研究所）
1981年12月5日收到

提 要

本文是关于非线性响应理论的文章的后半部分．我们利用文献[1]的结果将线性情形的涨落耗散定理形式地推广到含有 n 点关联和响应函数的非线性情形．

一、引 言

在前一篇文章[1]中，从闭路格林函数（以下简称 CTPGF）的生成泛函的展开式得到非线性响应的一般表示式．同时讨论了推导多点函数之间关系的四种一般考虑：代数关系、KMS 条件、时间反演不变性、谱表示．本文利用这些条件推导 $\tilde{G}_n$ 分量间的关系，其中包括涨落耗散定理在非线性情形的一种可能的推广．

由 CTPGF 的展开定理[1]

$$G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}(1,2,\cdots,n)=2^{1-n}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2}(\alpha_1)^{i_1}(\alpha_2)^{i_2}\cdots(\alpha_n)^{i_n}G_{i_1i_2\cdots i_n}(1,2,\cdots,n),\quad(1)$$

$$G_{-\alpha_1-\alpha_2\cdots-\alpha_n}(1,2,\cdots,n)=2^{1-n}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2}(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n}\times(\alpha_1)^{i_1}(\alpha_2)^{i_2}\cdots(\alpha_n)^{i_n}G_{i_1i_2\cdots i_n}(1,2,\cdots,n).\quad(2)$$

左端令 $\alpha\to-\alpha$，即编时 T 变为反编时 $\tilde{T}$ 就相当于使右端的 G_{n,l_e} 型分量不变号而 G_{n,l_o} 型分量变号，这里脚标 l_σ（$\sigma=e$ 表偶数或零，$\sigma=o$ 表奇数）是 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 中 1 的个数．于是 $\tilde{G}_n$ 分量自然地分成 G_{n,l_e} 型和 G_{n,l_o} 型这两大类．

相应地变换矩阵 M_n^{-1} 可分为偶部分 $(M_n^{-1})^e$ 和奇部分 $(M_n^{-1})^o$．

下面将看到同一大类的 $\tilde{G}_n$ 分量间有简单的代数关系，而不同类的 $\tilde{G}_n$ 分量间没有简单的代数关系．考虑 KMS 条件则是寻求 G_{n,l_e} 型分量与 G_{n,l_o} 型分量间的关系的有效途径，这将直接导致线性的涨落耗散定理及其在非线性情形的一种可能的推广形式．

二、G_{n,l_σ} 间的一般关系

取 G_{n,l_σ} 型分量的对称组合

$$G_{l_\sigma}^{S(n)}\equiv\sum_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2\\ \text{只有 } l_\sigma \text{ 个} 1}}{}'\frac{1}{2}(1+(-1)^{l_\sigma+i_1+i_2+\cdots+i_n})G_{i_1i_2\cdots i_n}(1,2,\cdots,n),\quad(3)$$

则

$$\sum_{0\leqslant l_\sigma\leqslant n} G_{l_\sigma}^{S(n)} \equiv \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2} \frac{1}{2}(1+(-1)^{l_\sigma+i_1+i_2+\cdots+i_n}) G_{i_1 i_2\cdots i_n}(1,2,\cdots,n). \tag{4}$$

于是对有时间反演不变性的系统存在一般关系

$$\sum_{0\leqslant l_\sigma\leqslant n} (G_{l_\sigma}^{S(n)} - \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n G_{l_\sigma}^{(-)S(n)}) = 0, \tag{5}$$

其中

$$G_{i_1 i_2\cdots i_n}^{(-)}(1,2,\cdots,n) \equiv G_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1,-2,\cdots,-n), \tag{6}$$

$$\varepsilon_i = \pm 1. \tag{7}$$

实际上,由(1)—(2)式容易得

$$G_{++\cdots+}(1,2,\cdots,n) = 2^{1-n} \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2} G_{i_1 i_2\cdots i_n}(1,2,\cdots,n), \tag{8}$$

$$G_{--\cdots-}(1,2,\cdots,n) = 2^{1-n} \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n} G_{i_1 i_2\cdots i_n}(1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

或

$$\begin{aligned} &G_{++\cdots+}(1,2,\cdots,n) \pm G_{--\cdots-}(1,2,\cdots,n) \\ &= 2^{1-n} \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2} (1\pm(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n}) G_{i_1 i_2\cdots i_n}(1,2,\cdots,n). \end{aligned} \tag{10}$$

以(10)式代入(4)式,并注意到[1,2]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n G_{\alpha\alpha\cdots\alpha}(-1,-2,\cdots,-n) &= G_{\alpha\alpha\cdots\alpha}(1,2,\cdots,n) \\ \alpha &= \pm, \end{aligned} \tag{11}$$

即得(5)式. 作傅里叶变换后有

$$\sum_{0\leqslant l_\sigma\leqslant n} (\bar{G}_{l_\sigma}^{S(n)}(\omega) - \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n \bar{G}_{l_\sigma}^{S(n)}(-\omega)) = 0,$$

$$\bar{G}_n(\omega) \equiv \bar{G}_n(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n). \tag{12}$$

而 $G_{i_1 i_2\cdots i_n}(\omega)$ 与 $G_{i_1 i_2\cdots i_n}(-\omega)$ 或者为复共轭,或者差一符号为复共轭(详细的讨论列在后面第四节),因而 $G_{n,\sigma}$ 型分量之间或者实部线性相关,或者虚部线性相关,视 ε_i 的符号和 (n,σ) 的取值而定. 显然 $G_{n,e}$ 型分量与 $G_{n,o}$ 型分量之间线性无关.

三、非线性涨落耗散定理的一种可能形式

对厄米算子 $A, B, \cdots, D$ 有

$$\mathrm{Tr}(AB\cdots D) = \mathrm{Tr}^*(D\cdots BA). \tag{13}$$

将(13)式用于 CTPGF 导致

$$G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}^*(1,2,\cdots,n) = (-1)^{n-1} G_{-\alpha_1-\alpha_2\cdots-\alpha_n}(1,2,\cdots,n). \tag{14}$$

于是取(1)式的线性组合就得到

$$\begin{aligned} &2^{1-n} \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2} (1\pm(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n})(\alpha_1)^{i_1}(\alpha_2)^{i_2}\cdots(\alpha_n)^{i_n} G_{i_1 i_2\cdots i_n}(1,2,\cdots,n) \\ &= G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}(1,2,\cdots,n) \pm G_{-\alpha_1-\alpha_2\cdots-\alpha_n}(1,2,\cdots,n). \end{aligned} \tag{15}$$

(15)式是纯代数的关系，它的任何形式的线性组合不会带来新的内容，故可将(15)式看成基本的，让 $(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 取一切可能情形共得 2^{n-1} 个不同式子，而由于 CTPGF 的基本性质 $G_{11\cdots1}=0$[3]，应只有 $2^{n-1}-1$ 个是独立的．我们把 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=1$ 的一个式子去掉而将所剩式子作为基本的独立式，并由此展开本节的讨论．

$n=2$ 时只有一个基本独立关系

$$\begin{aligned}G_{21}-G_{12}&=G_{-+}-G_{+-}=-i(\langle 12\rangle_0-\langle 21\rangle_0),\\ G_{22}&=G_{-+}+G_{+-}=-i(\langle 12\rangle_0+\langle 21\rangle_0).\end{aligned}\tag{16}$$

加 KMS 条件就解出线性的涨落耗散定理[1,4]

$$\bar{G}_{22}(\omega)=\operatorname{cth}\frac{\beta\omega}{2}\left[\bar{G}_{21}(\omega)-\bar{G}_{12}(\omega)\right].\tag{17}$$

当 $n\geqslant 3$ 时，为着推广(17)式，还须系统满足时间反演不变性的要求[1]．

设 $j_1,j_2,\cdots,j_m$（限制 $1\leqslant m\leqslant n-1$）是 $1,2,\cdots,n$ 中的 m 个数，

$$\{j_\pm\}:(j_1,j_2,\cdots,j_m)$$

表示 $(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 中

$$\alpha_{j_1}=\alpha_{j_2}=\cdots=\alpha_{j_m}=\mp,\text{其它为 }\alpha_{i_k}=\pm.$$

则由[2,3]

$$G_{\{j\}}(1,2,\cdots,n)=(-i)^{n-1}\langle\tilde{T}(j_1j_2\cdots j_m)\mathrm{T}(i_1i_2\cdots i_{n-m})\rangle.\tag{18}$$

和文献[1]中(35)和(45)式有

$$G_{\{j\}}(-1,-2,\cdots,-n)=\varepsilon_n e^{-i\beta\sum\limits_{i=1}^{m}\partial_{j_i}}G_{\{j\}}(1,2,\cdots,n)$$

$$\left(\partial_{j_i}\equiv\frac{\partial}{\partial t_{j_i}}\quad \varepsilon_n\equiv\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n\right).\tag{19}$$

而对于两点的 $\hat{G}$ 分量，不必考虑时间反演不变性即有

$$G_{-+}(1,2)=e^{i\beta\frac{\partial}{\partial t_1}}G_{+-}(1,2).\tag{20}$$

对比(19)与(20)式，可以预期：对任意的 n，均能获得(17)式型的关系式．

先改写(15)式的左端有（简记 $i_{j_r}\equiv j'_r$）

$$\begin{aligned}&2^{1-n}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2}(1\pm(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n})(-1)^{j'_1+j'_2+\cdots+j'_m}G_{i_1i_2\cdots i_n}(1,2,\cdots,n)\\&=G_{\{j+\}}(1,2,\cdots,n)\pm G_{\{j-\}}(1,2,\cdots,n).\end{aligned}\tag{21}$$

于是取

$$\begin{aligned}G_{l_e,\{j\}}(1,2,\cdots,n)&\equiv\sum_{\left\{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2\\ \text{只有 }l_e\text{ 个 }1}\right.}{}'\frac{1}{2}(1+(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n})\\&\quad\times(-1)^{j'_1+j'_2+\cdots+j'_m}G_{i_1i_2\cdots i_n}(1,2,\cdots,n),\\ G_{l_o,\{j\}}(1,2,\cdots,n)&\equiv\sum_{\left\{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2\\ \text{只有 }l_o\text{ 个 }1}\right.}{}'\frac{1}{2}(1-(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n})\\&\quad\times(-1)^{j'_1+j'_2+\cdots+j'_m}G_{i_1i_2\cdots i_n}(1,2,\cdots,n),\end{aligned}\tag{22}$$

就是取 G_{n,l_σ} 型分量的可能非对称的组合，(15)式进一步成为

$$\sum_{0\leqslant l_e\leqslant n} G_{l_e,\{j\}}(1,2,\cdots,n)=2^{n-2}[G_{\{j+\}}(1,2,\cdots,n)+G_{\{j-\}}(1,2,\cdots,n)],$$

$$\sum_{1\leqslant l_o\leqslant n} G_{l_o,\{j\}}(1,2,\cdots,n)=2^{n-2}[G_{\{j+\}}(1,2,\cdots,n)-G_{\{j-\}}(1,2,\cdots,n)]. \tag{23}$$

作线性组合

$$G_{\{j+\}}(1,2,\cdots,n)+\epsilon_n G_{\{j+\}}(-1,-2,\cdots,-n)\pm G_{\{j-\}}(1,2,\cdots,n)$$
$$\pm\,\epsilon_n G_{\{j-\}}(-1,-2,\cdots,-n),$$

再利用(29)和(23)式得

$$\begin{aligned}&\Big(1\pm 1-e^{-i\beta\sum_{i=1}^{m}\partial_{j_i}}\mp e^{i\beta\sum_{i=1}^{m}\partial_{j_i}}\Big)\Big(\sum_{0\leqslant l_e\leqslant n} G_{l_e,\{j\}}(1,2,\cdots,n)\Big)\\&\quad+\epsilon_n\Big(1\pm 1-e^{i\beta\sum_{i=1}^{m}\partial_{j_i}}\mp e^{-i\beta\sum_{i=1}^{m}\partial_{j_i}}\Big)\Big(\sum_{0\leqslant l_e\leqslant n} G_{l_e,\{j\}}(-1,-2,\cdots,-n)\Big)\\&\quad=\Big(-1\pm 1+e^{-i\beta\sum_{i=1}^{m}\partial_{j_i}}\mp e^{i\beta\sum_{i=1}^{m}\partial_{j_i}}\Big)\Big(\sum_{1\leqslant l_o\leqslant n} G_{l_o,\{j\}}(1,2,\cdots,n)\Big)\\&\quad+\epsilon_n\Big(-1\pm 1+e^{i\beta\sum_{i=1}^{m}\partial_{j_i}}\mp e^{-i\beta\sum_{i=1}^{m}\partial_{j_i}}\Big)\\&\quad\times\Big(\sum_{1\leqslant l_o\leqslant n} G_{l_o,\{j\}}(-1,-2,\cdots,-n)\Big).\end{aligned}\tag{24}$$

作傅氏变换后再约去公因子得

$$\begin{aligned}&\sum_{0\leqslant l_e\leqslant n}[\bar G_{l_e,\{j\}}(\omega)+\epsilon_n\bar G_{l_e,\{j\}}(-\omega)]\\&=\mathrm{cth}\,\frac{\beta}{2}(\omega_{i_1}+\omega_{i_2}+\cdots+\omega_j)\sum_{1\leqslant l_o\leqslant n}[\bar G_{l_o,\{j\}}(\omega)-\epsilon_n\bar G_{l_o,\{j\}}(-\omega)]\end{aligned}\tag{25}$$

及

$$\begin{aligned}&\sum_{0\leqslant l_e\leqslant n}[\bar G_{l_e,\{j\}}(\omega)-\epsilon_n\bar G_{l_e,\{j\}}(-\omega)]\\&=\mathrm{th}\,\frac{\beta}{2}(\omega_{i_1}+\omega_{i_2}+\cdots+\omega_{i_m})\sum_{1\leqslant l_o\leqslant n}[\bar G_{l_o,\{j\}}(\omega)+\epsilon_n\bar G_{l_o,\{j\}}(-\omega)].\end{aligned}\tag{26}$$

此处简记 $\bar F(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\equiv\bar F(\omega)$, $\bar F_1(\omega_1,\omega_2,\cdots,\hat\omega_k,\cdots,\omega_n)\equiv\bar F_1(\omega)$, $\hat\omega_k$ 表示缺少 ω_k. 不标明 $\bar F$ 还是 $\bar F_1$, 是因为两种傅氏分量都满足(25),(26)式.

上面 $G_{l_\sigma,\{j\}}(1,2,\cdots,n)$ 是 $C_n^{l_\sigma}$ 个 G_{n,l_σ} 型分量的非对称组合，对任何的 l_σ，不同的 $G_{l_\sigma,\{j\}}(1,2,\cdots,n)$ 有

$$C_n^m\text{ 个}\quad\text{若 } m\neq n/2;\qquad \frac{1}{2}C_n^m\text{ 个}\quad\text{若 } m=n/2.$$

故(25)和(26)式型的式子各有 $\frac{1}{2}\Big(\sum_{m=0}^{n}C_n^m-2\Big)=2^{n-1}-1$ 个.

$n=2$ 时,(26)式退化为零零恒等式而(25)式成为

$$\frac{1}{2}[\bar G_{22}(\omega)+\epsilon_2\bar G_{22}(-\omega)]=\mathrm{cth}\,\frac{\beta\omega}{2}[\bar G_{21}(\omega)-\epsilon_2\bar G_{21}(-\omega)].\tag{27}$$

这意味着(25),(26)式是线性涨落耗散定理向非线性情形的一种自然的推广.

$n=3$ 时,易写出

$$
\begin{aligned}
&G_{0,\{1\}}=G_{0,\{3\}}=G_{0,\{2\}}=G_{222};\\
&G_{1,\{1\}}=-G_{122}+G_{212}+G_{221}, \quad G_{2,\{1\}}=-G_{112}-G_{121}+G_{211},\\
&G_{1,\{2\}}=G_{122}-G_{212}+G_{221}, \quad G_{2,\{2\}}=-G_{112}+G_{121}-G_{211},\\
&G_{1,\{3\}}=G_{122}+G_{212}-G_{221}; \quad G_{2,\{3\}}=G_{112}-G_{121}-G_{211};
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{G}_{2,\{k\}}(\omega)+\epsilon_3\bar{G}_{2,\{k\}}(-\omega)+\bar{G}_{222}(\omega)+\epsilon_3\bar{G}_{222}(-\omega)\\
&\quad=\operatorname{cth}\frac{\beta\omega_k}{2}\left[\bar{G}_{1,\{k\}}(\omega)-\epsilon_3\bar{G}_{1,\{k\}}(-\omega)\right],\\
&\bar{G}_{2,\{k\}}(\omega)-\epsilon_3\bar{G}_{2,\{k\}}(-\omega)+\bar{G}_{222}(\omega)-\epsilon_3\bar{G}_{222}(-\omega)\\
&\quad=\operatorname{th}\frac{\beta\omega_k}{2}\left[\bar{G}_{1,\{k\}}(\omega)+\epsilon_3\bar{G}_{1,\{k\}}(-\omega)\right]\quad(k=1,2,3).
\end{aligned} \tag{29}
$$

由另一种线性组合

$$
\begin{aligned}
&G_{\{j+\}}(1,2,\cdots,n)-\epsilon_n G_{\{j+\}}(-1,-2,\cdots,-n)\\
&\quad\pm G_{\{j-\}}(1,2,\cdots,n)\mp\epsilon_n G_{\{j-\}}(-1,-2,\cdots,-n)
\end{aligned}
$$

出发仍导致上述结果. 事实上,n 点函数的基本独立代数关系(15)或(23)式共 $2^{n-1}-1$ 个,加 KMS 条件能获得的关系数不能超过 $2^{n-1}-1$,时间反演的考虑使 n 点函数的虚实部自然分开,而表现为(25),(26)式所包含的 $2\times 2^{n-1}-2$ 个式子. 从另一角度看,(25),(26)式的统一形式反映了 CTPGF 的变换性质. 若在(22)式中允许 $m=0,n$,便自动包含了对称组合的定义(3),(4)式,显然 $\sum\limits_{0\leqslant l_e\leqslant n} G_{l_e,\{j\}}(1,2,\cdots,n)$按矩阵 $(M_n^{-1})^e$ 的 $\{j\}$ 行变换,而

$$
\sum_{1\leqslant l_o\leqslant n} G_{l_o,\{j\}}(1,2,\cdots,n)
$$

按矩阵 $(M_n^{-1})^o$ 的 $\{j\}$ 行变换,(7)式和(25),(26)式都一致地表现了这一内在的性质. 可在

$$
\sum_{0\leqslant l_\sigma\leqslant n} G_{l_\sigma,\{j\}}(1,2,\cdots,n)
$$

(其中取 $0\leqslant m\leqslant[n/2]$, $\sigma=e$, o) 中任取 2^n-1 个作为基本的独立函数. 在 $n=3$ 时有求和规则

$$
\sum_{k=1}^{3} G_{1,\{k\}}(1,2,3)=G_1^{S(3)}, \quad \sum_{k=1}^{3} G_{2,\{k\}}(1,2,3)=-G_2^{S(3)}. \tag{30}
$$

容易写出任何 n 点情形的求和规则,这里不去详加列举.

作为本节的结尾,我们给出表 1.

表 1

m	1				2		
$\{j\}$	{4}	{3}	{2}	{1}	{4, 3}	{4, 2}	{3, 2}
$\sum\limits_{1}^{m}\omega_{j_i}$	ω_4	ω_3	ω_2	ω_1	$\omega_4+\omega_3$	$\omega_4+\omega_2$	$\omega_3+\omega_2$

由此可很方便地写出前面所得到的四点关系，照此，就能准确地写出更高阶的函数关系．

四、谱　性　质

按照文献[1]中(52)式所阐明的规则容易写出 $\tilde{G}_n$ 分量的谱表示．

以三点情形为例，取形如

$$\langle 123\rangle = \langle 1-2, 2-3\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} e^{-i\omega_1(t_1-t_2)-i\omega_2(t_2-t_3)} \overline{\langle \omega_1, \omega_2\rangle} \tag{31}$$

的傅里叶变换，则

$$\langle 321\rangle = \langle 123\rangle^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} e^{-i\omega_1(t_1-t_2)-i\omega_2(t_2-t_3)} \overline{\langle -\omega_1, -\omega_2\rangle}^*. \tag{32}$$

由

$$G_{211}(123) = -\theta(123)\langle[[1,2],3]\rangle_0 - \theta(132)\langle[[1,3],2]\rangle_0,$$

应用 KMS 条件得

$$\begin{aligned}\overline{G}_{211}(\omega_1, \omega_2) = &-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega_1 d\Omega_2}{(\omega_1-\Omega_1+i\varepsilon)(\omega_1+\omega_2-\Omega_2+i\varepsilon)} \\ &\times[(1-e^{-\beta\Omega_2})\overline{\langle \Omega_1, \Omega_2-\Omega_1\rangle_0} + (1-e^{\beta\Omega_2})\overline{\langle -\Omega_1, -\Omega_2+\Omega_1\rangle_0}^*] \\ &-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega_1 d\Omega_2}{(\omega_1-\Omega_1+i\varepsilon)(-\omega_2-\Omega_2+i\varepsilon)} \\ &\times[(e^{-\beta\Omega_1}-e^{\beta(\Omega_2-\Omega_1)})\overline{\langle \Omega_1, -\Omega_2\rangle_0} + (e^{\beta\Omega_1}-e^{-\beta(\Omega_2-\Omega_1)})\overline{\langle -\Omega_1, \Omega_2\rangle_0}^*].\end{aligned} \tag{33}$$

$\overline{G}_{211}(\omega_1, \omega_2)$ 在 ω_1 复平面的上半平面解析．而在 ω_2 复平面上，上半平面有一个极点；另有一个极点或在上半平面，或在下半平面，视 ω_1 复平面的下半平面上的那个极点的具体位置而定． $\overline{G}_{221}(\omega_1, \omega_2)$ 的极点分布就比 $\overline{G}_{211}(\omega_1, \omega_2)$ 复杂些． 故更高阶的 $\tilde{G}_n$ 分量的谱的解析性质都需按其极点的具体分布情形来作判断．一般地，$\tilde{G}_n$ 分量有 $n-1$ 个频率复平面，在每个复平面上，可用主值积分公式

$$\frac{1}{\chi+i\varepsilon} = \frac{1}{\chi} - i\pi\delta(x) \tag{34}$$

将谱函数用主值积分展开来．结合谱函数间的共轭关系还可具体分开谱函数的虚、实部．

$\tilde{G}_n$ 分量中包含因子 $(-i)^{n-1}$ 和对易子、反对易子的 $n-1$ 重嵌套，反对易子的任何重数的嵌套都是实的，对易子的偶数重嵌套为实的而奇数重嵌套为纯虚的，故 $\tilde{G}_n$ 分量或为实的或为纯虚的： G_{2k+1, l_e} 型和 G_{2k, l_o} 型分量为实的， G_{2k+1, l_o} 型和 G_{2k, l_e} 型分量为纯虚的，于是得复共轭关系

$$\begin{aligned}\overline{G}^*_{n_o, l_e}(\omega_1, \cdots, \hat{\omega}_k, \cdots, \omega_{n_o}) &= \overline{G}_{n_o, l_e}(-\omega_1, \cdots, \hat{\omega}_k, \cdots, -\omega_{n_o}), \\ \overline{G}^*_{n_o, l_o}(\omega_1, \cdots, \hat{\omega}_k, \cdots, \omega_{n_o}) &= -\overline{G}_{n_o, l_o}(-\omega_1, \cdots, \hat{\omega}_k, \cdots, -\omega_{k_o}), \\ \overline{G}^*_{n_e, l_e}(\omega_1, \cdots, \hat{\omega}_k, \cdots, \omega_{n_e}) &= -\overline{G}_{n_e, l_e}(-\omega_1, \cdots, \hat{\omega}_k, \cdots, -\omega_{n_e}), \\ \overline{G}^*_{n_e, l_o}(\omega_1, \cdots, \hat{\omega}_k, \cdots, \omega_{n_e}) &= \overline{G}_{n_o, l_o}(-\omega_1, \cdots, \hat{\omega}_k, \cdots, -\omega_{n_e}).\end{aligned} \tag{35}$$

(35)式和 $\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n = \epsilon_n$ 的符号共同决定着

$$\tilde{G}_{n,l}(\omega_1, \cdots, \hat{\omega}_k, \cdots, \omega_n) \pm \epsilon_n \tilde{G}_{n,l}(-\omega_1, \cdots, \hat{\omega}_k, \cdots, -\omega_n)$$

型函数组合的虚、实性.

五、讨　　论

本文是形式理论. 对具体的非线性问题，仍和线性问题一样，须从系统的哈密顿量出发，使用费曼图技术等.

多点关系在测量中是一个时间序列，用 CTPGF 中的 $\tilde{G}_n$ 来描述时，将自动满足因果性的要求. $\tilde{G}_n$ 函数可能恰好对应着目前尚未作过但将会有可能做的非线性响应中的新的实验：在 N 个时刻中某些个时刻对系统进行扰动，在另一些时刻测响应，或将某些时刻的结果平均掉，只测量关联. 当然实测中是否可观察到本文提到的各种关系，要看系统本身的非线性是否显著，以及外场是否足够强.

在非线性光学中，若外场为 $\boldsymbol{E}$，则极化

$$P_i = \sum_j K_{ij}E_j + \sum_{jk} K_{ijk}E_jE_k + \sum_{jkl} K_{ijkl}E_jE_kE_l + \cdots$$

的表示式[5,6]中，K_{ij}, K_{ijk}, K_{ijkl}, $\cdots$ 等引起的各种参量振荡效应是可以观测到的. 从 CTPGF 的角度来分析研究这类实验，将会是很有趣的.

Бочков 等[10]以及 Стратонович[8], Ефремов[9] 用求泛函的变分导数的方法寻求多点函数关系的统一方案，曾获得有关高阶关联函数的某种统一定义，但因果条件是另外补加上去的. 他们和其他一些作者[7]都考虑了时间反演不变性. 文献[8]从代数的考虑得到四点关联函数间的个别关系式；文献[9]中的主要结果若换成 CTPGF 的语言，就是 $\theta(123)$ 不为零时的 $\tilde{G}_{221}$ 与 $\tilde{G}_{211}$ 间的关系以及 $\theta(1234)$ 不为零时的 $\tilde{G}_{2211}(\omega, 0, 0)$ 与 $\tilde{G}_{2111}(\omega, 0, 0)$ 间的关系，且式子中出现 $\mathrm{cth}(\beta\omega/2)$ 型因子. 它们都只是本文所得结果的特例. 此外，还讨论了固定 $\theta(1234)$ 为 1 时 $\tilde{G}_{2111}$ 的不同频率分量之间的关系，这类关系式我们在文献[1]中作了一般的讨论.

我们特别指出，文献[10]中得到过与文献[1]的(17)式类似的公式，且可由低阶的非平衡矩导出高阶的平衡矩，该文作者认为这类公式已包括涨落耗散定理在内. 其实不然，由该文出发所能获得的只是固定某个 $\theta(t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n})$ 为 1 时的 $\tilde{G}_n$ 分量，其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 不全为 2. 例如 $n=2$ 时，能够得到的只是 $\langle[1,2]\rangle_0$ 型的，即补充因果条件 $t_1 > t_2$ 后的响应函数，须另外构造一个相应的函数表达涨落，再用 KMS 条件，才可获得涨落耗散定理的表示式.

1978 年 Martin 等在计算非线性电导过程的发热问题时使用的虽是 CTPGF，由于对运算方法未作系统的简化处理，结果未能收拢为清晰的三点关系. Martin 认为非线性情形下无一般的涨落耗散定理，它与具体模型有关(参见文献[11]及其引文).

Bernard 和 Callen 在文献[7]中称为线性涨落耗散定理的直接推广的公式，按 CTPGF 的语言，乃是固定 $\theta(t_it_jt_k)$ 不为零时，G_{211}^{jki} 中可以用 $\langle 231\rangle_0$ 表达的部分与

$$G_{222}^{jki} + G_{222}^{kij} + G_{222}^{ijk}$$

中可以用 $\langle 231\rangle_0$ 表达的部分之间的关系式. 而以 $\langle 132\rangle_0$ 为基本变量的部分间的关系则

应构成另一个独立公式，故不可能由他们的公式解出二次响应与二次涨落函数间的显式关系.

总括本文结果，可用图 1 表示，其中水平实线代表 (5) 式所示关系，垂直实线代表(25),(26)式所示的关系. 图 2 是曾出现于文献[7]中的关系，其中两点图形表达线性的涨落耗散定理，三点图形的依据只是三点函数间片断的关系式，四点图形则出于猜测. 它基本代表了早于本文的结果. 本文给出了一个由图 1 表达的统一的关系.

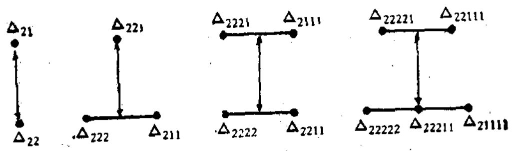

图 1

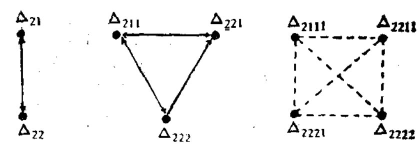

图 2

我们还只是讨论了力学扰动问题. 热扰动的非线性响应问题，目前尚触及很浅，文献[12]中只是唯象地讨论了一下. 在线性情形下有多种办法(参看文献[13]及其引文)处理热扰动问题，如何用 CTPGF 技术对线性的及非线性的热扰动问题给出统一处理，是应当单独研究的问题.

参 考 文 献

[1] 王维镛、林中衡、苏肇冰、郝柏林，本刊本期.
[2] Guang-zhao Zhou, Zhao-bin Su, Bai-lin Hao, Lu Yu, *Phys. Rev. B*, **22**(1980), 3385.
[3] 周光召、于渌、郝柏林，物理学报，**29** (1980)，878.
[4] H. B. Callen, T. A. Welton, *Phys. Rev.*, **83** (1951), 34.
[5] 李荫远、杨顺华，非线性光学，科学出版社，(1974).
[6] H. Rabin, C. L. Tang, Quantum Electronics: a Treatise, (1975).
[7] W. Bernard, H. B. Callen, *Rev. Mod. Phys.*, **31** (1959), 1017.
[8] Р. Л. Стратонович, *ЖЭТФ*, **58** (1970), 1612.
[9] Г. Ф. Ефремов, *Изв. вузов. радиофизика*, **15** (1972), 1207.
[10] Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, *ЖЭТФ*, **72** (1977), 238.
[11] A. M. Trembley B. Patton, P. C. Martin, *Phys. Rev. A*, **19** (1979), 1721.
[12] Г. Ф. Ефремов, *Изв. вузов. радиофизика*, **22** (1979), 81.
[13] R. Zwanzig, *Ann. Rev. Phys. Chem.*, **16** (1965), 67.

THE CLOSED TIME PATH GREEN'S FUNCTIONS AND THE THEORY OF NONLINEAR RESPONSE (II)

WANG WAI-YONG LIN ZHONG-HENG SU ZHAO-BIN HAO BAI-LIN
(*Fudan University*) (*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

By using the results of our previous paper[1], the linear fluctuation-dissipation theorem are formally generalized to nonlinear case described by n-point correlation and response functions.