第 31 卷 第 11 期 物 理 学 报 Vol. 31, No. 11
1982 年 11 月 ACTA PHYSICA SINICA Nov., 1982

Beltrami–de Sitter 时空中标量和旋量粒子的量子理论

李光仪 郭汉英
(苏州大学物理系) (中国科学院理论物理研究所)

1981 年 12 月 30 日收到

提　　要

参照在 Minkowski 时空中,从粒子的相对论性经典理论过渡到量子理论,建立标量粒子和旋量粒子的相对论性波动方程的方案,在 Beltrami-de Sitter 时空中建立了 de Sitter 不变的标量粒子和旋量粒子的相对论性量子力学的基本方程,它们恰恰分别是 Beltrami-de Sitter 时空中的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程. 在 Beltrami-anti de Sitter 时空的同时类空超曲面簇上求解了这些方程,得到了分立的本征值和相应的本征函数.

一、引　　言

近年来,对于 de Sitter 时空以及其中物质运动规律的研究逐渐引起重视[1-5]. 仅就宇宙学的角度而言, de Sitter 态很可能会在宇宙演化的极早期阶段起重要作用,以致有可能构造无奇性的宇宙模型[6,7]. 事实上,文献[7]中的反 de Sitter 态恰恰就是本文所要研究的 Beltrami-de Sitter 时空[1] 中的一种——Beltrami-anti de Sitter 时空的同时类空超曲面簇.

我们知道,有关 de Sitter 时空中的量子理论已有不少的研究[1-3]. 不过,在这些研究中都没有考虑到 4 维常曲率时空的一个重要性质,这就是文献[4, 8]所指出的,可以把狭义相对论推广到 4 维常曲率时空, 即 BDS 时空(文献[5]也有类似的提法). 可以预料,对于 de Sitter 时空中的量子理论,这一性质将会起到重要作用. 因此,深入研究 BDS 时空中的量子理论应该是有一定意义的.

本文将根据 BDS 时空中粒子运动规律的特点,参照在 Minkowski 时空中建立相对论性量子力学基本方程的步骤, 建立 BDS 时空中标量粒子和旋量粒子的相对论性量子力学的基本方程,它们恰恰分别是 BDS 时空中 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程. 在此基础上, 本文并在 Beltrami-anti de Sitter 时空的同时类空超曲面簇上, 即 Beltrami-anti de Sitter 时空的 Robertson-Walker 度规中, 求解了这些方程, 得到了分立的本征值和相应的本征函数. 除了基态附近的两三个能级之外,能量本征值呈等间距分布,间距的大小与时空的曲率半径成反比.

1) 以下简称为 BDS 时空.

本文将首先介绍 BDS 时空的狭义相对论及其中粒子运动规律的要点，然后考虑如何在 BDS 时空中建立标量粒子和旋量粒子的相对论性量子力学的基本方程，并进而在 Beltrami-anti de Sitter 时空的同时类空超曲面簇上求解这些方程．最后进行简短的讨论．

本文将不涉及相应的标量场和旋量场的量子场论问题，而留待另文讨论．

二、BDS 时空及其中的粒子运动

文献[4, 8]研究了4维常曲率时空的运动学，指出满足狭义相对性原理和弱光速不变原理(即仅假定光沿零测地线传播)的4维时空，必定为 BDS 时空 $\mathscr{D}_\lambda$. 在 BDS 时空上可以统一地建立 de Sitter 不变的(4维时空曲率 λ 不为零)和 Poincaré 不变的(λ 为零)狭义相对论．

事实上，在 BDS 时空中可以引入 Beltrami 坐标系 $\{x^i\}(i=0,\cdots,3)$，它们满足如下条件：

$$\sigma(x)=1-\lambda\eta_{ij}x^ix^j>0,\quad (\eta_{ij})=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1). \tag{1}$$

同时可以定义 Beltrami 度量

$$ds^2=(\eta_{ij}\sigma^{-1}+\lambda\eta_{ir}\eta_{js}x^rx^s\sigma^{-2})dx^idx^j. \tag{2}$$

在 de Sitter 群 $SO(4,1)$(当 $\lambda>0$)或 $SO(3,2)$(当 $\lambda<0$)，或 Poincaré 群 $ISO(3,1)$(当 $\lambda=0$)的变换下，

$$\begin{aligned}&x^i\to\tilde{x}^i=\sigma^{1/2}(a)(1-\lambda\eta_{rs}a^rx^s)(x^j-a^j)D_j^i,\\&D_j^i=L_j^i+\lambda\eta_{kl}a^la^i(\sigma(a)+\sigma^{1/2}(a))^{-1}L_j^k,\\&(L_j^i)_{i,j=0-3}\in SO(3,1),\ a^i\text{ 为常数}.\end{aligned} \tag{3}$$

Beltrami 坐标系变为 Beltrami 坐标系，同时 Beltrami 度量不变．文献[4, 8]证明了 BDS 时空中的测地线为4维直线，沿测地线的运动为坐标速度为常数的匀速直线运动．因而 Beltrami 坐标系为惯性坐标系，自由粒子在 BDS 时空中作惯性运动．

文献[4, 8]中还对 BDS 时空中的同时性、空间距离元等给出了统一的定义．

按照这些定义，可在 BDS 时空中考虑一簇同时类空超曲面，以当地理想时钟的固有时作为标记这些类空超曲面的时间坐标，则由 BDS 度量可以得到同时类空超曲面簇的度量

$$\begin{aligned}&ds^2=d\tau^2-R^2(\tau)(\eta_{\alpha\beta}\sigma_\Sigma^{-1}+\lambda\sigma_\Sigma^{-2}\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}x^\gamma x^\delta)dx^\alpha dx^\beta,\\&\sigma_\Sigma=1-\lambda\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta>0,\quad \alpha,\beta=1,2,3,\quad (\eta_{\alpha\beta})=\mathrm{diag}(-1,-1,-1),\\&R^2(\tau)=\cos^2(\sqrt{|\lambda|}\tau),\quad \text{当 }\lambda<0,\\&\qquad\quad \mathrm{ch}^2(\sqrt{\lambda}\,\tau),\quad \text{当 }\lambda>0.\end{aligned} \tag{4}$$

显然，这是 Robertson-Walker 型的度量，满足宇宙学原理的对称性要求．若采用球坐标，则度量(4)式化为

$$ds^2=d\tau^2-R^2(\tau)[(1+\lambda\rho^2)^{-2}d\rho^2+(1+\lambda\rho)^{-1}\rho^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]. \tag{5}$$

我们知道，常曲率空间可以在高1维的(伪)欧空间中的(伪)超球面上实现．BDS 时空与5维伪欧时空中的伪超球面亦可建立这样的联系．

考虑伪欧空间 $E^{(4,1)}$ 或 $E^{(3,2)}$ 中的伪超球面

$$\eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = a^2, \qquad \mu, \nu = 0, \cdots, 3, 5,$$
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu,$$
$$(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, \theta), \qquad \theta = -\frac{|\lambda|}{\lambda}, \qquad \lambda = -\frac{\theta}{a^2}. \tag{6}$$

它们分别在 de Sitter 群 $SO(4, 1)$ 或 $SO(3, 2)$ 下不变. 不难证明[8]，坐标 $\{\xi^\mu\}$ 与 Beltrami 坐标 $\{x^i\}$ 之间的关系为

$$\xi^i = \sigma^{-1/2}x^i, \quad \xi^5 = a\sigma^{-1/2}. \tag{7}$$

事实上，利用(7)式立即可将(6)式化为 Beltrami 坐标条件(1)式与 Beltrami 度量(2)式.

利用 BDS 时空的超球形式讨论自由粒子运动等问题较为方便. 显然，我们可以定义自由粒子的 5 维角动量

$$L^{\mu\nu} = m_0\left(\xi^\mu\frac{d\xi^\nu}{ds} - \xi^\nu\frac{d\xi^\mu}{ds}\right). \tag{8}$$

利用(7)式可以得到在 Beltrami 坐标下的表达式

$$P^i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}L^{5i} = m_0\sigma^{-1}\frac{dx^i}{ds}, \tag{9}$$

$$L^{ij} = m_0(x^iP^j - x^jP^i) = m_0\sigma^{-1}\left(x^i\frac{dx^j}{ds} - x^j\frac{dx^i}{ds}\right). \tag{10}$$

显然，P^i 与 L^{ij} 可分别定义为粒子的 Beltrami 动量和角动量. 由 BDS 时空中的测地线方程不难证明 P^i 与 L^{ij} 沿测地线是守恒量. 即

$$\frac{dP^i}{ds} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{dL^{ij}}{ds} = 0. \tag{12}$$

而方程(11)事实上就是测地线方程. 同时，由 P^i 沿测地线是守恒量，立即可得沿测地线

$$\frac{dx^\alpha}{dx^0} = \mathrm{const.} \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{13}$$

这就证明了沿测地线的运动为坐标速度为常数的匀速直线运动，因而 Beltrami 坐标系为惯性系.

由粒子 5 维角动量的定义，以及自由粒子沿测地线运动有 5 维角动量守恒的性质可知

$$m_0^2 = \frac{|\lambda|}{2}L^{\mu\nu}L_{\mu\nu} \tag{14}$$

$$= E^2 - \boldsymbol{P}^2 - \frac{\theta}{a^2}\boldsymbol{L}^2, \quad E = P^0, \quad \boldsymbol{P} = (P^1, P^2, P^3) \tag{15}$$

是 de Sitter 群下的不变量，也是自由粒子的运动积分. 公式(15)可以看作是狭义相对论中 Einstein 公式

$$\eta_{ij}P^iP^j = m_0^2, \quad 即\ E^2 - \boldsymbol{P}^2 = m_0^2 \tag{16}$$

的推广. 因而(14)式中的 m_0 相当于粒子的质量. 但要注意，在 BDS 时空中 P^i 不是 4 矢量，而是 5 维角动量的分量.

三、BDS 时空中的相对论量子力学方程

现在，我们来建立 BDS 时空中标量粒子和旋量粒子的相对论量子力学方程. 首先，回顾狭义相对论中从经典的相对论力学到相对论量子理论的过渡，可以把相对论量子力学基本方程的建立概括为如下的步骤:

从 Einstein 公式出发

$$m_0^2 = \eta_{ij}P^iP^j = E^2 - \boldsymbol{P}^2,$$

将力学量用对应的算符表示

$$E = H \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$P_\alpha \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

从而 Poincaré 不变量 $\eta_{ij}P^iP^j$ 化为 Klein-Gordon 算子

$$\eta_{ij}P^iP^j \to -\Box = \eta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

后者是 Poincaré 群的第一 Casimir 算子. 假定标量粒子由波函数 $\phi(x)$ 来描述，后者满足 Klein-Gordon 方程

$$(\Box + m_0^2)\phi(x) = 0. \tag{17}$$

这就是标量粒子的相对论量子力学的方程. 它相当于 Poincaré 群第一 Casimir 算子的本征方程.

至于旋量粒子的相对论性量子力学方程，即 Dirac 方程

$$\left(i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} - m\right)\psi(x) = 0 \tag{18}$$

的算子，则可视为 Klein-Gordon 算子的“开方”. Dirac 方程就是 Dirac 算子在 Poincaré 群的旋量表示中的本征方程.

参照在 Minkowski 时空中从粒子的相对论性经典理论到量子理论的过渡，并考虑到 BDS 时空及其中粒子运动规律的特点，我们可以这样来建立标量粒子的相对论性量子力学方程:

从推广的 Einstein 公式(14)出发

$$m_0^2 = \frac{|\lambda|}{2}L_{\mu\nu}L^{\mu\nu}, \tag{19}$$

将经典力学量 $L_{\mu\nu}$ 用对应的算子表示为

$$L_{\mu\nu} \to L_{\mu\nu} = i\left(\xi_\mu\frac{\partial}{\partial\xi^\nu} - \xi_\nu\frac{\partial}{\partial\xi^\mu}\right). \tag{20}$$

后者事实上是 de Sitter 群的生成元. 于是 de Sitter 不变量(19)式对应于 de Sitter 群的第一 Casimir 算子

$$\hat{Q} = \frac{|\lambda|}{2}L_{\mu\nu}L^{\mu\nu}. \tag{21}$$

假定标量粒子由 BDS 时空中的标量波函数描述，且后者为 Casimir 算子 $\hat{Q}$ 的本征函数．则相应的本征方程

$$(\hat{Q} - m^2)\phi(x) = 0 \tag{22}$$

就是 de Sitter 不变的标量粒子量子力学的基本方程． 利用 Beltrami 坐标和度量进而可以证明

$$\hat{Q} = -\Box = (-g)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}\right). \tag{23}$$

于是，标量粒子的量子力学方程就是 BDS 时空中的 Klein-Gordon 方程

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0. \tag{24}$$

对于旋量粒子，我们可以仿照 Dirac[9] 引入 de Sitter 不变的算子

$$\hat{L} = \frac{1}{2a} \gamma^\mu \gamma^\nu L_{\mu\nu}, \tag{25}$$

其中 γ^μ 满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{26}$$

易证算子 $\hat{L}$ 与 $\hat{Q}$ 之间满足如下关系：

$$\hat{Q} + \frac{9}{4} a^{-2} = \left(\hat{L} - \frac{3}{2} a^{-1}\right)^2, \tag{27}$$

即 $\hat{L}$ 基本上是 $\hat{Q}$ 的“开方”． 于是，我们可以按照 Dirac[9]，假定 $\hat{L}$ 的本征方程就是旋量粒子的 de Sitter 不变的量子力学方程． Gürsey 和 Lee[10] 进一步指出，这个本征方程实质上就是协变形式的 Dirac 方程． 因此，BDS 时空中旋量粒子的量子力学方程就是 BDS 时空中的 Dirac 方程．

四、同时类空超曲面簇上的标量粒子场

现在，我们在 BDS 时空的同时类空超曲面簇上求解标量粒子的量子力学方程——Klein-Gordon 方程

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + m^2\right\} \phi(x) = 0, \tag{28}$$

其中度量取为 BDS 时空中同时类空超曲面簇上的 Robertson-Walker 型度量

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau)[(1 + \lambda\rho^2)^{-2} d\rho^2 + (1 + \lambda\rho^2)^{-1}\rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)],$$
$$R^2(\tau) = \cos^2(\sqrt{|\lambda|}\tau). \tag{29}$$

为确定起见，我们只考虑 $\lambda < 0$ 的情形．

在度量(29)式下，方程(28)可以分离变量． 令

$$\phi(\tau, \rho, \theta, \phi) = T(\tau)U(\rho)Y_{lm}(\theta, \phi), \tag{30}$$

则方程化为

$$R^2\ddot{T}(\tau) + 3R\dot{R}\dot{T}(\tau) + (m^2R^2 - \varepsilon)T(\tau) = 0, \tag{31}$$

$$U''(\rho) + 2\rho^{-1}U'(\rho) - \left[\frac{\varepsilon a^2}{(1 + \lambda\rho^2)^2} - \frac{l(l + 1)}{\rho^2(1 + \lambda\rho^2)}\right] U(\rho) = 0, \tag{32}$$

$$[\sin^{-1}\theta\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \sin^{-2}\theta\partial_\varphi^2 + l(l + 1)]Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0, \tag{33}$$

其中“.”表示 $\frac{d}{dt}$，“,”表示 $\frac{d}{d\rho}$. ε 为本征值. (33)式表明角度部分是球谐函数. 下面只需要考虑演化方程(31)与径向方程(32).

下面，首先分析径向方程. 利用 $\lambda = -a^{-2}$，并令 $\xi = \rho a^{-1}$，则方程化为

$$U''(\xi) + \frac{2}{\xi}U'(\xi) + \left[\frac{-\varepsilon a^2}{(1-\xi^2)^2} - \frac{l(l+1)}{\xi^2(1-\xi^2)}\right]U(\xi) = 0. \tag{34}$$

“,”表对 ξ 求导. 显然，$\xi = 0, \pm 1$ 为正则奇点，故可设

$$U(\xi) = \xi^l(1-\xi^2)^{\mu/2}F(\xi), \tag{35}$$

μ 为指标方程

$$\mu(\mu-2) - \varepsilon a^2 = 0$$

的根. $F(\xi)$ 为超几何方程

$$(1-\xi^2)F'' + \left[\frac{2(l+1)}{\xi} - 2(l+\mu+1)\xi\right]F' + \left[\frac{1}{4} - \left(\mu + l + \frac{1}{2}\right)^2\right]F = 0 \tag{36}$$

的解，

$$F(\xi) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\mu+l+1), \frac{1}{2}(\mu+l), l+\frac{3}{2}; \xi^2\right). \tag{37}$$

因此，我们得到如下的径向波函数:

$$U(\rho) = C(\rho/a)^l\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\varepsilon a^2}} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(l+\sqrt{1+\varepsilon a^2}+2), \frac{1}{2}(l+\sqrt{1+\varepsilon a^2}+1), l+\frac{3}{2}; \frac{\rho^2}{a^2}\right), \tag{38}$$

其收敛区间为 $0 \leqslant \rho < a$. 亦可用缔合 Legendre 函数表为

$$U(\rho) \sim \sqrt{\frac{a^2}{\rho^2}-1}\,P_{-l-1}^{\sqrt{1+\varepsilon a^2}}\left(\frac{a}{\rho}\right), \sqrt{\frac{a^2}{\rho^2}-1}\,Q_l^{\sqrt{1+\varepsilon a^2}}\left(\frac{a}{\rho}\right) \quad 0 \leqslant \rho < a. \tag{39}$$

对于演化方程(31)，亦可精确求解. 作变量代换

$$x = \sin\frac{\tau}{a},$$

则方程化为

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^2\frac{d}{dx}T(x)\right] + [(m^2a^2-2)(1-x^2) - \varepsilon a^2]T(x) = 0. \tag{40}$$

此方程的解亦可用缔合 Legendre 函数表示为

$$T_1(\tau) \sim \left(\cos\frac{\tau}{a}\right)^{-1/2} P^{\sqrt{1+\varepsilon a^2}}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+m^2a^2}}\left(\sin\frac{\tau}{a}\right) \tag{41}$$

和

$$T_2(\tau) \sim \left(\cos\frac{\tau}{a}\right)^{-1/2} Q^{\sqrt{1+\varepsilon a^2}}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+m^2a^2}}\left(\sin\frac{\tau}{a}\right). \tag{42}$$

由于 $P_\nu^\mu(x)$ 在 $x = 1 - \delta$ 和 $-1 + \delta$（δ 是一无穷小的正数）处收敛的条件是 μ, ν 均为整数[11]. 因此，我们得到 $T_1(\tau)$ 的本征值条件为

$$\varepsilon a^2 = N^2 - 1, \quad m^2 a^2 = I(I+1), \qquad N, I \text{ 为整数}, N \leqslant I. \tag{43}$$

而由 $T_2(\tau)$ 在 $\left|\sin\frac{\tau}{a}\right| \to 1 - \delta$ 处的收敛条件得到另一组本征值条件

$$\varepsilon a^2 = N^2 - \frac{1}{4}, \; m^2 a^2 = \left(I + \frac{1}{2}\right)\left(I + \frac{3}{2}\right) \qquad N, I \text{ 为整数}, N \leqslant I. \tag{44}$$

到此，我们完全求解了 BDS 时空中同时类空超曲面簇上标量粒子的量子力学方程. 如果把这个超曲面簇作为一个宇宙模型[4,8]，则自由标量粒子的质量 m 与宇宙半径 a 成反比. 由分立的本征值条件不难看出，除了靠近基态的两、三个本征值外，质量谱几乎是等间距分布的，相邻本征值的间距为 a^{-1}. 在平直时空极限（$a \to \infty$）下，若对量子数 N 与 I 不加限制，则分立的本征值谱将变为连续谱.

五、同时类空超曲面簇上的旋量粒子场

前面已经指出，BDS 时空中的旋量粒子的相对论量子力学方程就是 Dirac 方程.

$$[-i\gamma^i(\partial_i - \Gamma_i) + m]\Psi(x) = 0, \tag{45}$$

其中 Γ_i 为 Ricci 旋转系数，

$$[\Gamma_k, \gamma_i] = \partial_k \gamma_i - \left\{ {l \atop ik} \right\} \gamma_l, \tag{46}$$

且

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2g^{ij}, \quad \gamma^i = e_a^i \gamma^a,$$

e_a^i 是标架系数. γ^a 是 Dirac γ-矩阵. 采用 Bjorken-Drell 约定，γ^a 取下列形式：

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \; \gamma_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ -\sigma_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \; \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \; \alpha = 1, 2, 3, \tag{47}$$

σ_α 是 Pauli 矩阵.

我们在 BDS 时空中的同时类空超曲面簇上求解 Dirac 方程(45)，并限于 $\lambda < 0$ 的情形.

利用同时类空超曲面簇的 Robertson-Walker 型度量(5)式，可写下 Dirac 方程的具体形式：

$$\begin{aligned}\Big\{ iR\gamma_0\left(\partial_\tau + \frac{3}{2}R^{-1}\dot{R}\right) - i\Big[\gamma_1\left(\sigma_\Sigma\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \sigma_\Sigma^{1/2}\frac{1}{\rho}\Big[\gamma_2\left(\partial_\theta + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right) \\ + \sin^{-1}\theta\,\gamma_3\partial_\varphi\Big]\Big] - mR\Big\}\Psi(\tau, \rho, \theta, \varphi) = 0.\end{aligned} \tag{48}$$

令

$$\Psi(\tau, \rho, \theta, \varphi) = \sin^{-1/2}\theta R^{-3/2}\psi(\tau, \rho, \theta, \varphi), \tag{49}$$

代入(48)式可得

$$R(\partial_\tau + im\gamma_0)\psi = \left[\gamma_0\gamma_1\left(\sigma_\Sigma\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \sigma_\Sigma^{1/2}\frac{1}{\rho}\gamma_1\hat{K}(\theta, \varphi)\right]\psi, \tag{50}$$

其中 $\hat{K}(\theta, \varphi)$ 为一厄米算子

$$\hat{K}(\theta, \varphi) = i\gamma_0\gamma_1\left(\gamma_2 \frac{\partial}{i\partial\theta} + \gamma_3 \frac{1}{i\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{51}$$

仿照文献[12],可以证明 $\hat{K}$ 的本征值为 0, ±1, ±2, ….

再令

$$\hat{h} = \gamma_0\gamma_1\left(\sigma_\Sigma\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \sigma_\Sigma^{1/2}\frac{1}{\rho}\gamma_1\hat{K}, \tag{52}$$

不难证明 $\hat{h}$ 与 $\hat{K}$ 对易,它们可以有共同本征函数. 若 $\psi_{k,\varepsilon}$ 为这样的本征函数

$$\hat{K}\psi_{k,\varepsilon} = k\psi_{k,\varepsilon}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{53}$$

$$-i\hat{h}\psi_{k,\varepsilon} = \varepsilon\psi_{k,\varepsilon}, \qquad \varepsilon \text{ 为实数}. \tag{54}$$

于是,方程化为

$$[R(\partial_\tau + im\gamma_0) - i\varepsilon]\psi_{k,\varepsilon} = 0, \tag{55}$$

$$\left[\gamma_0\gamma_1\left(\sigma_\Sigma\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \sigma_\Sigma^{1/2}\frac{1}{\rho}\gamma_1 k - i\varepsilon\right]\psi_{k,\varepsilon} = 0. \tag{56}$$

将 $\psi_{k,\varepsilon}$ 用两分量旋量波函数 ϕ, χ 表为

$$\psi_{k,\varepsilon} = D_k(\theta, \phi)\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}, \tag{57}$$

其中 $D_k(\theta, \varphi)$ 为算子 $\hat{K}$ 的本征函数. 由(55),(56)式可得 ϕ 和 χ 所满足的方程

$$\begin{aligned}&(R(\partial_\tau + im) - i\varepsilon)\phi = 0,\\ &\left[\sigma_\Sigma\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(1 + k\sigma_\Sigma^{1/2})\right]\left[\sigma_\Sigma\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(1 - k\sigma_\Sigma^{1/2})\right]\phi + \varepsilon^2\phi = 0;\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}&(R(\partial_\tau - im) - i\varepsilon)\chi = 0,\\ &\left[\sigma_\Sigma\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(1 - k\sigma_\Sigma^{1/2})\right]\left[\sigma_\Sigma\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(1 + k\sigma_\Sigma^{1/2})\right]\chi + \varepsilon^2\chi = 0.\end{aligned} \tag{59}$$

比较这两组方程,差别仅在于将 m 换为 $-m$,同时将 k 换为 $-k$. 因此,只需求解一组方程,例如方程(58).

利用分离变量法求解(58)式,可以得到在 $0 \leqslant \rho < a$ 区间中的解为

$$\begin{aligned}\phi_{k>0} = {}& e^{-im\tau}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2a}\right)\right]^{i\varepsilon a}\left(\frac{1 - \sqrt{1 - \rho^2/a^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2/a^2}}\right)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{1 - \rho^2/a^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2/a^2}}\right)^{1+i\varepsilon a}\\ &\cdot {}_2F_1\left(k + i\varepsilon a + \frac{1}{2}, i\varepsilon a, k + \frac{1}{2}; \frac{1 - \sqrt{1 - \rho^2/a^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2/a^2}}\right),\\ \phi_{k\leqslant 0} = {}& e^{-im\tau}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2a}\right)\right]^{i\varepsilon a}\left(\frac{1 - \sqrt{1 - \rho^2/a^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2/a^2}}\right)^{-\frac{k}{2}}\left(\frac{2\sqrt{1 - \rho^2/a^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2/a^2}}\right)^{1+i\varepsilon a}\\ &\cdot {}_2F_1\left(1 + i\varepsilon a, \frac{1}{2} + i\varepsilon a - k, \frac{3}{2} - k; \frac{1 - \sqrt{1 - \rho^2/a^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2/a^2}}\right).\end{aligned} \tag{60}$$

显然,对 χ 可以得到类似的结果. 这样,便求得了 BDS 时空中的同时类空超曲面簇上角动量为 k,能量为 ε,质量为 m 的自由 Dirac 粒子的波函数

$$\Psi_{k,\varepsilon,m}(\tau, \rho, \theta, \varphi) = \cos^{-3/2}\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin^{-1/2}\theta D_K(\theta, \varphi)\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}. \tag{61}$$

在平直时空极限下，$a \to \infty$，利用超几何函数的渐近表式[11]，可以得到

$$\phi_{k>0} \sim e^{i(\varepsilon-m)\tau} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\rho} \{e^{i\rho\varepsilon} + (-1)^k e^{-i\rho\varepsilon}\}. \tag{62}$$

显然与平直时空中自由 Dirac 粒子的径向波函数一致.

六、讨　论

本文在 BDS 时空中建立了标量粒子和旋量粒子的相对论量子力学的基本方程，它们恰恰分别是 BDS 时空中的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程. 本文并在 BDS 时空的同时类空超曲面簇上得到了相应的波动方程的解.

BDS 时空是一种具有特殊性质的 4 维常曲率时空，它不仅处处正则、没有奇性，而且可以在狭义相对性原理和弱光速不变原理的基础上建立 de Sitter 不变的狭义相对论. 同时，BDS 时空的同时类空超曲面簇又满足宇宙学原理的对称性要求. 本文正是利用了 BDS 时空的这些特点. 从自由运动粒子的经典理论出发，通过确定的对应原理建立了粒子的 de Sitter 不变的相对论量子力学方程；并且在同时类空超曲面簇上求解了这些方程. 显然，只要利用超曲面簇的 Robertson-Walker 时间 τ 与 Beltrami 坐标 x^i 之间的关系[4,8]，不难反过来得到这些波动方程在 BDS 时空度规，即 Beltrami 度规下的解.

显然，BDS 时空中的这种粒子的量子理论不存在弯曲时空量子理论通常遇到的由于坐标选择的任意性带来的含混. 可以期待，在此基础上进一步处理有关量子场论的问题时，BDS 时空的特点仍有可能澄清某些含混之处.

本文只对运动群为 $SO(3, 2)$ 的 BDS 时空 ($\lambda < 0$) 中的标量和旋量粒子的量子力学方程讨论了求解问题. 对于运动群为 $SO(4, 1)$ 的 BDS 时空 ($\lambda > 0$) 的情形，可以采用本文的方法进行类似的讨论. 但是，相应的本征值条件和波函数的具体形式都会有明显的不同.

本文求解波动方程的方法，对于一般的 Robertson-Walker 度规中的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程都是适用的（当然，这里只讨论了相当于 $k = -1$ 的情形）. 不同的 Robertson-Walker 度规的差别，仅限于标度因子 $R(\tau)$ 不同. 因而相应波动方程的径向部分和角度部分是一样的，差别在于具有不同的演化方程. 显然，只要演化方程的解可以精确给出，整个波动方程的解就可以严格得到.

作者对周孝谦教授，以及中国科学院理论物理研究所的一些同事有益的讨论表示感谢.

参　考　文　献

[1] C. Fronsdal, *Phys. Rev. D*, **12**(1975), 3819.
[2] G. W. Gibbons & S. W. Hawking, *Phys. Rev. D*, **15**(1977), 2738.
[3] A. Salam & J. Strethdee, *Phys. Rev. D*, **18**(1978), 4596.
[4] 陆启铿、邹振隆、郭汉英，物理学报，**23**(1974)，225；邹振隆、陈建生、黄硼、张历宁、郭汉英，中国科学，(6) (1979)，588;

Guo Han-ying, In Proceedings of the 1980 Guangzhou Conf. on Theor. Particle Phys. Vol. II, 1607, Sci. Press, Beijing, (1980).
[5] E. H. Kerner, *Phys. Rev. D*, 22(1980), 280.
[6] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B*, 91(1980), 99.
[7] Guo Han-ying & Zou Zhen-long, Comm. Theor Phys., 1(1982), 237.
[8] 陆启铿、邹振隆，郭汉英，自然杂志增刊，现代物理，上海科技出版社，第1辑，97. (1980).
[9] P. A. M. Dirac, *Ann. Math.*, 36(1935), 657. F. Gürsey, In Group Theoretical Concepts & Methods in Elementary Particle Phys. ed. by F. Gürsey Gordon & Breach, (1964).
[10] F. Gürsey & T. D. Lee, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 49(1963), 179.
[11] A. Erdely, Higher Transcendental Functions, (1963).
[12] D. Brill & J. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.*, 29(1957), 465.

RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS FOR SCALAR PARTICLES AND SPINOR PARTICLES IN THE BELTRAMI-DE SITTER SPACETIME

LI GUANG-YI

(*Department of Physics, Soochow University, Soochow, China*)

GUO HAN-YING

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Following the procedure to transmute the relativistic theory of classical particles to quantum theory in the Minkowski spacetime, we have proposed a scheme to establish relativistic wave equations for scalar particles and spinor particles in the Beltrami-de Sitter spacetime. It is shown that these equations are invariant under the transformations of the de Sitter group and are just the Klein-Gordon equation and the Dirac equation in the Beltrami-de Sitter spacetime respectively. The eigenfunctions and the corresponding discrete eigenvalues of these equations on the metric of a family of spacelike simultaneous hypersurfaces in the Beltrami-de Sitter spacetime have been obtained.