

## 研究简报

# 聚焦透镜棒的色差分析

刘德森

(中国科学院西安光学精密机械研究所)

1981年5月3日收到

### 提 要

本文从光线光学出发,得到了聚焦透镜棒的色差方程式.对 Tl-1, Cs-1, DAP MMA 和 CR39-8FMA 聚焦透镜棒的色差作了数值计算.给出了色差方程在特殊情况下的解.

自从聚焦棒问世<sup>[1,2]</sup>以来,梯度折射率光学元件发展很快.这种光学元件在激光通讯和成像系统中有重要应用.近年来,随着研究工作的广泛和深入,出现了一门新的学科——梯度折射率光学.

色差,不仅是普通透镜而且也是聚焦透镜棒的一个重要特性.近几年来,已有一些作者<sup>[4-7]</sup>讨论了聚焦透镜棒的色差,但他们仅讨论了色差量.本文从光线光学出发,推导了一组色差随透镜棒长周期变化,并和聚焦透镜棒的色散量、色差量和物距有关的色差方程式.对 Tl 和 Cs 玻璃聚焦透镜棒、DAP-MMA (邻苯二甲酸二烯丙酯-甲基丙烯酸甲酯)和 CR39-8FMA (二甘醇双烯丙基碳酸酯-1,1,5 三羟基全氟戊酯异丁烯酸酯)塑料聚焦透镜棒的色差作了数值计算.最后,讨论了五种特殊情况下色差方程之解.结果表明,Cs 玻璃和 CR39-8FMA 二元共聚体的色差较小,是较好的聚焦透镜棒材料.

## 一、色差方程式

利用离子交换法<sup>[8]</sup>和扩散-共聚法<sup>[5,9]</sup>制作的玻璃和塑料梯度折射率透镜棒的折射率近似可用聚焦分布表示

$$n(r) = n(0) \left( 1 - \frac{1}{2} Ar^2 \right). \quad (1)$$

这里  $n(0)$  为透镜棒轴上的折射率;  $A$  是分布常数;  $n(r)$  为离轴距离  $r$  处的折射率.

根据文献[12,13],在近轴近似下,子午光线通过聚焦透镜棒的轨迹是正弦曲线,周期  $L$ 、焦距  $f$ 、像距  $s$  和横向放大率  $m$  为

$$L = \frac{2\pi}{\sqrt{A}}, \quad (2)$$

$$f = \frac{1}{n(0)\sqrt{A} \sin(\sqrt{A}z)} = \frac{L}{2\pi n(0) \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}, \quad (3)$$

$$s = \frac{1}{n(0)\sqrt{A}} \frac{n(0)\sqrt{A}s_0 \cos(\sqrt{A}z) + \sin(\sqrt{A}z)}{n(0)\sqrt{A} - n(0)\sqrt{A}s_0 \sin(\sqrt{A}z) - \cos(\sqrt{A}z)}$$

$$= \frac{\frac{2\pi n(0)}{L} s_0 \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right) + \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}{2\pi n(0) - \frac{2\pi n(0)}{L} s_0 \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) - \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} \quad (4)$$

和

$$m = \frac{(-1)}{n(0)\sqrt{A} s_0 \sin(\sqrt{A}z) - \cos(\sqrt{A}z)}$$

$$= \frac{(-1)}{\frac{2\pi n(0)s_0}{L} \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) - \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} \quad (5)$$

这里  $s_0$  为物距,  $z$  为透镜棒长度. 由于聚焦透镜棒的折射率和波长有关, 因而分布常数  $A$  (或周期  $L$ ) 和焦距  $f$  都是波长  $\lambda$  的函数, 传输的白光像就存在色差.

根据一般透镜的色差理论<sup>[14]</sup>, 聚焦透镜棒的色差有纵向色差和横向色差两类. 将(4)式对波长微分就可以得到由于同一物点上不同波长的光经过聚焦透镜棒的像距不同而形成的相对纵向色差为

$$\frac{1}{s} \frac{ds}{d\lambda} = \frac{\Delta s}{s} = \left[ \frac{4\pi}{L} n(0)s_0 \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) - \left(1 + \frac{s_0}{s}\right) m \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right) \right] \frac{\Delta n(0)}{n(0)}$$

$$+ \left\{ \frac{z}{sn(0)} - \frac{2\pi m}{L} (z + 2n(0)s) \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) \right.$$

$$\left. + m \left[ 1 - \frac{2\pi n(0)s_0}{L} z + \frac{s_0}{s} \right] \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right) \right\} \frac{\Delta L}{L} \quad (6)$$

同样, 由同一物点上不同波长的光线经过聚焦透镜棒的横向放大率  $m$  的不同而形成的相对横向色差为

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{d\lambda} = \frac{\Delta m}{m} = \frac{2\pi n(0)}{L} s_0 m \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) \frac{\Delta n(0)}{n(0)}$$

$$+ \frac{2\pi}{L} \left[ \frac{2\pi n(0)}{L} z s - n(0)s_0 m \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) \right] \frac{\Delta L}{L} \quad (7)$$

这里  $\frac{1}{n(0)} \frac{dn(0)}{d\lambda} = \frac{\Delta n(0)}{n(0)}$  表示折射率随波长的相对变化, 我们称为色散量;  $\frac{1}{L} \frac{dL}{d\lambda} = \frac{\Delta L}{L}$  表示周期随波长的相对变化, 我们称为色差量.

经过不复杂的运算, 色差量  $\Delta L/L$  可表示为

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{L_F - L_C}{L_D} = \frac{n(a)}{2[n(0) - n(a)]} \left[ \left( \frac{n_F - n_C}{n_D} \right)_a - \left( \frac{n_F - n_C}{n_D} \right)_0 \right] \quad (8)$$

上式右边圆括号外的脚标“ $a$ ”和“ $0$ ”分别表示圆括号内的量是在  $r = a$  (周边)和  $r = 0$  (轴)上的数值; 脚标  $F, C$  和  $D$  分别表示在  $F$  光、 $C$  光和  $D$  光作用下的物理量.

从方程(8)可知, 要减小色差, 就要求色差量  $\Delta L/L$  很小, 就要使透镜棒轴和周边上

的色散量之差减小,轴和周边上的折射率差增大,周边上的折射率较小.

当色散量用阿贝数  $\nu$  表示时,色差量又可写成

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{L_F - L_C}{L_D} = \frac{n(a)}{2[n(0) - n(a)]} \left[ \frac{n(a) - 1}{n(a)\nu_a} - \frac{n(0) - 1}{n(0)\nu_0} \right]. \quad (9)$$

上式指出,聚焦透镜棒的色差量仅与轴和周边上的折射率和阿贝数有关.表 1 根据文献[4,5]和我们的工作给出了四种聚焦透镜棒的阿贝数  $\nu$ 、分布常数  $A$ 、周期  $L$ 、色散量  $\Delta n/n$  和色差量  $\Delta L/L$  的典型值.表 2 给出了这四个样品的色差数值计算部分值.图 1 和图 2 给出了这四个聚焦透镜棒的色差和透镜棒长的关系曲线.从表 2 和图 1、图 2 可

表 1 聚焦透镜棒的有关物理量

样 品	TI-1	Cs-1	DAP-MMA	CR39-8FMA
$A$ ( $\text{mm}^{-2}$ )	0.51	0.51	0.0158	0.0238
$L$ (mm)	8.79822	8.79822	49.98636	40.72797
$\nu_0$	47.6	61.4	34.15927	59.62747
$\nu_a$	54.0	60.9	56.0811	59.9347
$n(0)$	1.523	1.522	1.57354	1.504
$n(a)$	1.513	1.512	1.497	1.398
$\left(\frac{\Delta n}{n}\right)_0$	0.00723	0.00559	0.01067	0.00562
$\left(\frac{\Delta n}{n}\right)_a$	0.006295	0.00556	0.0092037	0.0048232
$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{\text{轴}}$	-0.0707	-0.0018	-0.014339	-0.005254
$\left(\frac{\Delta f}{L}\right)_{\text{轴}}$	-0.0511	-0.0044	-0.04365	-0.0066

表 2 聚焦透镜棒的色差数值计算部分数值

数值 \ 样品	$z$ (mm)	TI-1	Cs-1	DAP-MMA	CR39-8FMA
色差	9.924	-0.579311	-0.020251	-0.033901	-0.011913
	46.053	-0.349691	-0.014310	0.101988	-0.052911
$\frac{\Delta s}{s}$	9.924	-1.082943	-0.033172	-0.079445	-0.083862
	46.053	-20.266629	-0.522183	0.159364	-0.087712
$\frac{\Delta f}{f}$	9.924	-0.560226	-0.019669	-0.031002	-0.011193
	46.053	-0.307151	-0.013226	0.128972	-0.045597
$\left(\frac{\Delta m}{m}\right)_{m=1}$	9.924	0.189309	0.003163	-0.004192	-0.002711
	46.053	2.036979	0.046985	-0.023942	0.012790
$\left(\frac{\Delta s}{s}\right)_{m=1}$	9.924	1.235127	0.020634	-0.012287	-0.005646
	46.053	4.517110	0.104192	-0.399878	0.080215

知,由于光线在透镜棒中的轨迹是正弦曲线,纵向色差、横向色差都是透镜棒长的周期函数,这是聚焦透镜棒和一般透镜不同的一个特点.由于像距  $s$  和横向放大率  $m$  的周期性,纵

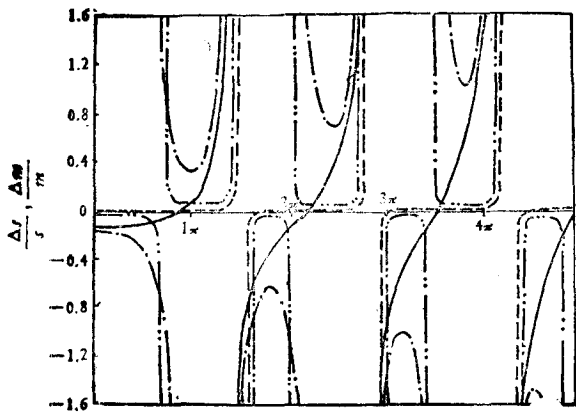


图1 Tl 和 Cs 玻璃聚焦透镜的色差曲线

	Tl	Cs
$\Delta s/s$	---	- · - · -
$\Delta m/m$	—	—

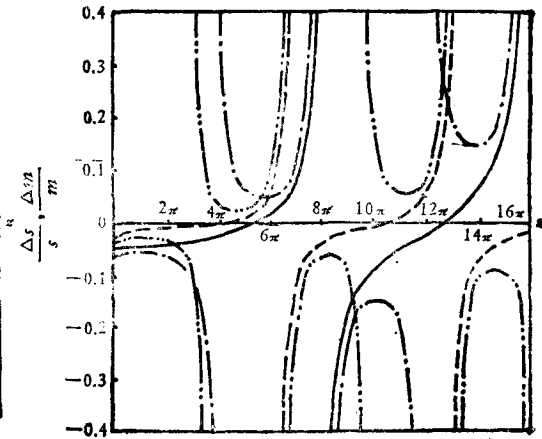


图2 DAP-MMA 和 CR39-8FMA 二元共聚体透镜棒的色差曲线

	DAP-MMA	CR39-8FMA
$\Delta s/s$	- · - · -	---
$\Delta m/m$	—	—

向色差  $\Delta s/s$  和横向色差  $\Delta m/m$  就周期性地出现极大值和极小值. 而横向色差  $\Delta m/m$  周期性为零, 纵向色差  $|\frac{\Delta s}{s}|$  的极小值随透镜棒长  $z$  的增加而迅速增大. 由于  $A_{玻璃}$  大于  $A_{塑}$ , 玻璃聚焦透镜棒色差曲线的周期显著小于塑料聚焦透镜棒. Cs 和 CR39-8FMA 聚焦透镜棒的色差较小, 是较好的聚焦透镜棒材料.

## 二、色差方程在特殊情况下的解

### 1. 焦距色差

方程(3)对波长微分得

$$\frac{1}{f} \frac{df}{d\lambda} = \frac{\Delta f}{f} = -\frac{1}{n(0)} \frac{dn(0)}{d\lambda} + \left[ 1 + \frac{2\pi z}{L} \operatorname{ctg} \left( \frac{2\pi z}{L} \right) \right] \frac{1}{L} \frac{dL}{d\lambda}. \quad (10)$$

上式右端第二项表明了聚焦透镜棒的特点, 即焦距色差  $\Delta f/f$  是透镜棒长  $z$  的周期函数. 图 3 和图 4 分别给出了这四个样品的焦距色差曲线. 从图可知, Cs 玻璃和 CR39-8FMA 二元共聚体透镜棒的焦距色差曲线比较平坦, 色差在一定  $z$  值区间比 Tl 样品要小.

### 2. $m = 1$ 情况

这时, 方程(5)变成

$$\cos \left( \frac{2\pi z}{L} \right) - \frac{2\pi n(0) s_0}{L} \sin \left( \frac{2\pi z}{L} \right) = 1, \quad (11)$$

成像条件为

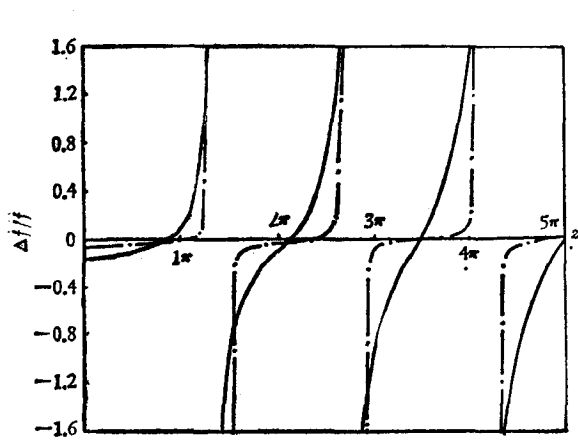


图3 Tl (—) 和 Cs (---) 玻璃聚焦透镜棒的焦距色差曲线

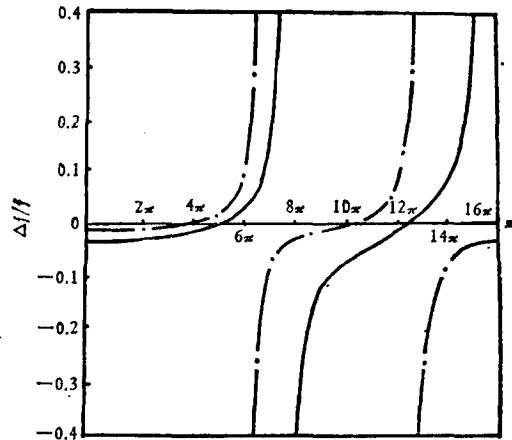


图4 DAP-MMA(—)和 CR39-8FMA (---) 二元共聚体透镜棒的焦距色差曲线

$$(s_0)_{m=1} = -\frac{L}{2\pi n(0)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{L}\right), \quad (12)$$

将(11)式和(12)式代入(4)式,像距为

$$(s)_{m=1} = -\frac{L}{2\pi n(0)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{L}\right) = (s_0)_{m=1}. \quad (13)$$

从(13)式可知,当  $m = 1$  时,物距和像距相等,都是透镜棒长度  $z$  的周期函数. 将(11)–(13)式代入色差方程(6)和(7),结果为

$$\left(\frac{\Delta s}{s}\right)_{m=1} = 2 \left[ -\frac{\Delta n(0)}{n(0)} + \left(1 - \frac{2\pi z}{L} \operatorname{csc}\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\right) \frac{\Delta L}{L} \right], \quad (14)$$

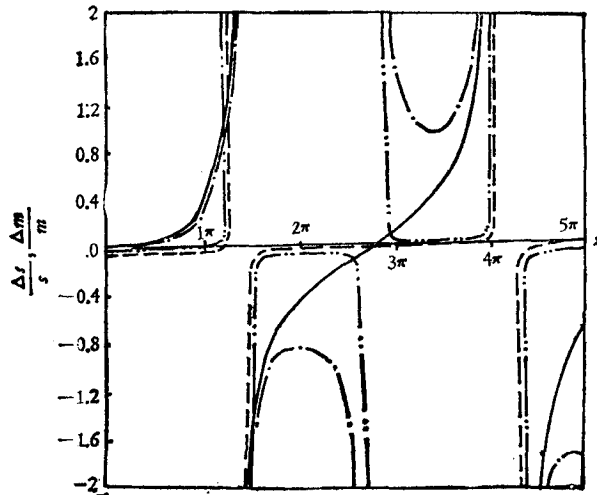


图5  $m = 1$  情况下, Tl, Cs 透镜棒的色差曲线

	Tl	Cs
$\Delta s/s$	---	- - - - ;
$\Delta m/m$	—	—

$$\left(\frac{\Delta m}{m}\right)_{m=1} = \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\right] \left[-\frac{\Delta n(0)}{n(0)} + \left(1 - \frac{2\pi z}{L} \csc\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\right) \frac{\Delta L}{L}\right]. \quad (15)$$

$m = 1$  的聚焦透镜棒在制作复印机上的透镜板有重要的应用<sup>[15,16]</sup>。图 5 和图 6 分别给出了四个样品在  $m = 1$  情况下的色差曲线。

### 3. $m = -1$ 情况

这时, (5) 式变成

$$\cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right) - \frac{2\pi n(0)s_0}{L} \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) = -1, \quad (16)$$

成像条件为

$$(s_0)_{m=-1} = \frac{L}{2\pi n(0)} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi z}{L}\right). \quad (17)$$

经过计算, 像距为

$$(s)_{m=-1} = \frac{L}{2\pi n(0)} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi z}{L}\right) = (s_0)_{m=-1}. \quad (18)$$

将(16)–(18)式代入色差方程式(6)和(7)式, 结果为

$$\left(\frac{\Delta s}{s}\right)_{m=-1} = 2 \left\{ -\frac{\Delta n(0)}{n(0)} + \left[1 + \frac{2\pi z}{L} \csc\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\right] \frac{\Delta L}{L} \right\}, \quad (19)$$

$$\left(\frac{\Delta m}{m}\right)_{m=-1} = \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\right] \left\{ -\frac{\Delta n(0)}{n(0)} + \left[1 + \frac{2\pi z}{L} \csc\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\right] \frac{\Delta L}{L} \right\}. \quad (20)$$

### 4. 会聚 ( $s \rightarrow 0$ ) 情况

将透镜棒作耦合元件(如激光通讯)用时, 就要求像能成在透镜棒端面上, 即  $s = 0$ 。这时, 从方程(8)有

$$\frac{2\pi n(0)s_0}{L} \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right) + \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) = 0. \quad (21)$$

成像条件为

$$(s_0)_{s \rightarrow 0} = -\frac{L}{2\pi n(0)} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi z}{L}\right). \quad (22)$$

将(21), (22)式代入方程(5), 结果为

$$(m)_{s \rightarrow 0} = \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right). \quad (23)$$

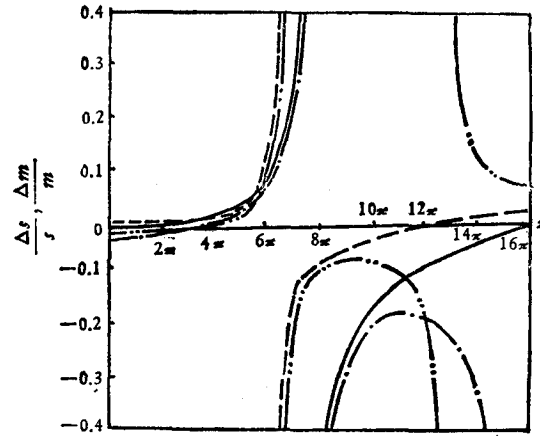


图 6  $m = 1$  情况下, DAP-MMA 和 CR39-8FMA 二元共聚透镜棒的色差曲线

	DAP-MMA	CR39-8FMA
$\Delta s/s$	— · — ·	— · — ·
$\Delta m/m$	—	—

考虑上述结果,色差方程(6)和(7)式变成

$$\left(\frac{\Delta s}{s}\right)_{s \rightarrow 0} \rightarrow \infty,$$

$$\left(\frac{\Delta m}{m}\right)_{s \rightarrow 0} = \left[\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\right]^2 \left[\frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta n(0)}{n(0)}\right].$$

### 5. 准直 ( $s \rightarrow \infty$ ) 情况

这时,从(4)式有

$$\frac{2\pi n(0)s_0}{L} \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) - \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right) = 0. \quad (24)$$

成像条件为

$$(s_0)_{s \rightarrow \infty} = \frac{L}{2\pi n(0)} \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi z}{L}\right). \quad (25)$$

从(5)式可知,横向放大率趋于无限大,因而  $(\Delta s/s)_{s \rightarrow \infty}$  和  $(\Delta m/m)_{s \rightarrow \infty}$  都趋于无限大. 这种情况和上面讨论的会聚 ( $s \rightarrow 0$ ) 情况恰好相反,将聚焦棒作为平行光管使用就是这种情况.

## 三、结 论

我们从光线光学出发,得到了聚焦透镜棒色差的一般方程式. 从色差方程式可知,聚焦透镜棒的色差是棒长度的周期函数,这是由光线的正弦轨迹确定的,是它和一般透镜不同的基本特点. 对给定透镜棒和物距,色差仅由色散量和色差量决定. 色差量由轴和周边上的色散量或阿贝数确定. 轴和周边的色散量之差愈小,折射率差愈大,周边上的折射率愈小,色差量就愈小. 数值计算表明,Cs 玻璃透镜棒和 CR39—8FMA 二元共聚体透镜棒的色差较小,是制作聚焦透镜棒较好的材料.

DAP-MMA 样品制作是在陈艳平、宋辉和王学忠同志参加下进行的;折射率和色散是陈邹生和杨炳云同志测量的;汪景昌和赵葆常同志对本文提出了一些有益意见. 作者对他们的帮助表示衷心的感谢.

## 参 考 文 献

- [1] S. Kawakami and J. Nishizawa, *IEEE Trans. M. T. T.*, MTT-16 (1968), 814.
- [2] T. Uchida, M. Furukawa, I. Kitano, K. Koizumi and H. Matsumura, *IEEE Jour. Q. E.* QE-5 (1969), 331.
- [3] D. T. Moore, *Appl. Opt.*, **19** (1980), 1035.
- [4] K. Nishizawa, *Appl. Opt.*, **19** (1980), 1052.
- [5] Y. Ohtsuka, *Appl. Phys. Lett.*, **23** (1973), 247.
- [6] N. Yamamoto and K. Iga, *Appl. Opt.*, **19**(1980), 1101.
- [7] L. Gregorka and D. T. Moore, *Appl. Opt.*, **19** (1980), 1097.
- [8] M. S. Sodha and A. K. Ghatak, *Inhomogeneous Optical Waveguides*, Plenum Press, New York and London, (1977).
- [9] Y. Ohtsuka, *Appl. Phys. Lett.*, **23** (1973), 247.
- [10] K. Iga and N. Yamamoto, *Appl. Opt.* **16**(1977), 1035.

- 
- [11] D. Marcuse, *Light Transmission Optics*, Van Nostrand Reinhold, Princeton, New Jersey, (1972).  
[12] H. Kita, I. Kitama, J. Uchida and M. Furukawa, *J. Am. Ceram. Soc.*, **54** (1971), 321.  
[13] K. Nishizawa, *Appl. Opt.*, **19** (1980), 1052.  
[14] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 4rd Edition, Pergamon Press, Oxford, (1970).  
[15] M. Kawazu and Y. Ogura, *Appl. Opt.*, **19** (1980), 1105.  
[16] K. Matsushita and M. Toyama, *Appl. Opt.*, **19** (1980), 1070.

## CHROMATIC ABERRATION ANALYSIS OF THE SELFOC-ROD LENSES

LIU DE-SEN

*(Xian Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)*

### ABSTRACT

In this paper, starting from ray optics, the chromatic aberration equations of selfoc-rod lenses are obtained. Chromatic aberration of Tl-1, Cs-1, DAP-MMA and CR39-8FMA selfoc-rod lenses are calculated. The solutions of chromatic aberration equations in specific cases are given.