

# 自由电子激光放大器的理论分析

尹 元 昭

(中国科学院电子学研究所)

1981 年 12 月 11 日收到

## 提 要

本文从单粒子模型出发,对自由电子激光放大器在小信号情形下的工作机理与参量特性进行了比较详细的分析与讨论。结果表明自由电子激光放大器实质上是电子束与快迴旋波的相互作用,而电子在轴向均匀静磁场及横向周期静磁场中运动的迴旋谐振条件对这种相互作用有重大的影响。本文对放大器的参量(如电子束的电压和电流密度、轴向及横向静磁场强度、横向静磁场波长等)与放大器的中心工作频率、放大带宽、小信号增益和放大电磁波的波数的关系进行了数值计算,并指出了最佳设计的途径。经过适当设计,自由电子激光放大器的小信号增益达到  $10^{-2}$  厘米 $^{-1}$ 或 1 米的  $c$  倍距离并有足够的带宽是不难的。

## 一、引 言

1976 年美国斯坦福大学 Elias 等人公布了自由电子激光放大器的实验结果,成功地证实了通过周期静磁场的相对论电子束能放大与电子束同向传播的  $\text{CO}_2$  激光<sup>[1]</sup>。在此前后,不同的作者相继发表了许多理论工作,阐述了自由电子激光放大的原理<sup>[2-6]</sup>。

本文试图从经典理论出发,给予这种自由电子激光放大器的工作机理提供一个清晰的物理图象。因为斯坦福大学所用的电子束的电流密度相当低,我们可以略去电子之间的相互作用而用单粒子模型来描述它。又因为入射电磁波的截面比电子束截面大得多,实验器件中横向变化的特征尺度也比电子束直径大得多,所以我们可以认为电子束看到的周期静磁场与入射电磁波都是平面波,与横向坐标无关,即我们处理的是一维问题。因为我们只限于讨论小信号情形,所以可假设入射电磁波对电子在静磁场中的运动仅起一种微扰作用,从而可将电子的普遍运动方程进行线性化,简化求解过程并得到电子速度的解析表达式。然后按自洽解要求从波动方程求得放大电磁波的色散方程。我们对色散方程进行了详细的数值计算,求得放大器的中心工作频率,放大带宽,小信号增益和放大电磁波的波数对放大器参量(如电子束电压和电流密度,轴向及横向静磁场强度,横向静磁场波长等)的依赖关系。结果表明在本文的条件下自由电子激光放大器实质上是电子束与快迴旋波的相互作用,而电子在轴向均匀静磁场及横向周期静磁场中运动的迴旋谐振条件对这种相互作用有重大的影响。最后我们指出了最佳设计的途径。经过适当设计,自由电子激光放大器的小信号增益达到  $10^{-2}$  厘米 $^{-1}$ 或 1 米的  $c$  倍距离并有足够的带宽是不难的。

## 二、电子在静磁场中的运动

首先考虑电子在轴向均匀静磁场和横向周期静磁场中的运动,如图 1 所示. 横向静磁场是右旋圆极化的, 整个静磁场可表示为

$$\mathbf{B}_0 = B_{\perp}[\cos(k_0 z + \phi_0)\hat{e}_x + \sin(k_0 z + \phi_0)\hat{e}_y] + B_{\parallel}\hat{e}_z. \quad (1)$$

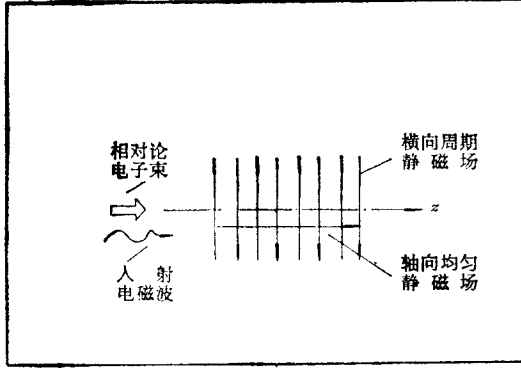


图 1 自由电子激光放大器示意图

相应的电子运动方程为

$$m_0 \gamma_0 \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\frac{e}{c} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0, \quad (2)$$

其中  $m_0$  是电子静止质量,  $e$  是电子电荷数值,  $c$  是真空中光速,  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  是横向周期静磁场的波数,  $\lambda_0$  为相应的波长,  $\phi_0$  是它的初始相位,  $B_{\perp}$  和  $B_{\parallel}$  分别是横向与轴向静磁场的强度,  $\mathbf{v}_0$  是电子在静磁场中运动的速度,  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  和  $\hat{e}_z$  是直角坐标的三个单位矢量. 因为磁场不

对电子做功, 所以电子的归一化能量  $\gamma_0 = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$  是常量.

将 (1) 式代入 (2) 式解得

$$v_{0x} = F \cos(k_0 z + \phi_0); \quad v_{0y} = F \sin(k_0 z + \phi_0); \quad v_{0z} = v_{\parallel} \quad (3)$$

其中

$$F = \frac{v_{\parallel} \frac{Q_{\perp}}{\gamma_0}}{\frac{Q_{\parallel}}{\gamma_0} - k_0 v_{\parallel}}, \quad (4)$$

$$Q_{\perp} = \frac{e B_{\perp}}{m_0 c}, \quad Q_{\parallel} = \frac{e B_{\parallel}}{m_0 c}. \quad (5)$$

$Q_{\perp}$  和  $Q_{\parallel}$  分别是电子在横向及轴向静磁场中的非相对论回旋频率, 而  $Q_{\perp}/\gamma_0$  和  $Q_{\parallel}/\gamma_0$  为相应的相对论回旋频率.  $v_{\parallel}$  是电子的初始轴向速度. 进一步解 (3) 式可以证明电子在上述磁场中作右手螺旋运动, 其回旋半径为  $F/k_0 v_{\parallel}$ , 回旋频率为  $k_0 v_{\parallel}$ . 从 (4) 式可见, 当回旋谐振条件

$$\frac{Q_{\parallel}}{\gamma_0} - k_0 v_{\parallel} = 0 \quad (6)$$

满足时,  $F$  趋于无穷大, 但实际上  $F$  的最大允许值为光速  $c$ , 所以在回旋谐振附近电子的回旋半径仍是有限的, 并且足够小.

## 三、色散方程

现在设有一右旋圆极化平面电磁波

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \cos(\omega t - kz + \phi) \hat{e}_x + E_0 \sin(\omega t - kz + \phi) \hat{e}_y, \\ \mathbf{B} &= -E_0 \sin(\omega t - kz + \phi) \hat{e}_x + E_0 \cos(\omega t - kz + \phi) \hat{e}_y, \end{aligned} \quad (7)$$

与电子束同向入射到静磁场区域(见图1)。其极化旋转方向与电子在静磁场中迴旋的方向相同。其中,  $E_0$ ,  $k$ ,  $\omega$  和  $\phi$  分别是入射波的振幅, 波数, 频率和初始相位。我们的目的是研究这入射电磁波在静磁场区域中与电子束的相互作用。为此, 我们列出电子的普遍运动方程为

$$\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m_0} \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \right]. \quad (8)$$

这是电子运动速度  $\mathbf{v}$  的非线性微分方程, 一般不能得到解析解, 但是在小信号近似下, 可将它线性化, 从而可得到解析解。

令

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}, \quad (9)$$

其中  $\mathbf{v}_0$  是电子在静磁场中的运动速度,  $\mathbf{u}$  是因放大电磁波引起的速度扰动,  $v_0 \gg u$ 。将(9)式代入(8)式并利用(2)式, 且只保留一级小量, 我们得到

$$\gamma_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{e}{m_0} \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 + \frac{1}{c} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E}) \right], \quad (10)$$

其中已用了近似  $\gamma \approx \gamma_0$ 。将(8)式写成分量形式并代入(1), (3)和(7)式, 得到

$$\begin{aligned} \gamma_0 \frac{du_x}{dt} &= -\Omega_{\parallel} u_y + \Omega_{\perp} u_z \sin(k_0 z + \phi_0) \\ &\quad + \frac{e}{mc^2} F^2 E_0 \cos(k_0 z + \phi_0) \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi + \phi_0); \\ \gamma_0 \frac{du_y}{dt} &= \Omega_{\parallel} u_x - \Omega_{\perp} u_z \cos(k_0 z + \phi_0) \\ &\quad + \frac{e}{mc^2} F^2 E_0 \sin(k_0 z + \phi_0) \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi + \phi_0), \\ \gamma_0 \frac{du_z}{dt} &= -\Omega_{\perp} u_x \sin(k_0 z + \phi_0) + \Omega_{\perp} u_y \cos(k_0 z + \phi_0). \end{aligned} \quad (11)$$

将(11)式的第一式和第二式分别乘以  $\cos(k_0 z + \phi_0)$  和  $\sin(k_0 z + \phi_0)$ , 然后相加, 并设

$$\begin{aligned} u_x &= u_0 \sin(\omega t - kz + \phi); \\ u_y &= -u_0 \cos(\omega t - kz + \phi). \end{aligned} \quad (12)$$

即可解得横向扰动速度的振幅为

$$u_0 = \frac{\frac{e}{m_0} \frac{F^2}{c^2} E_0}{\gamma_0 \left[ \omega - kv_{\parallel} - \frac{\Omega_{\parallel}}{\gamma_0} \right]}. \quad (13)$$

于是我们得到横向扰动电流密度  $\mathbf{J}_t$  为

$$\mathbf{J}_t = -en\mathbf{u}_t, \quad (14)$$

其中  $\mathbf{u}_t = u_x \hat{e}_x + u_y \hat{e}_y$ ,  $n$  为电子束的电子密度。按自洽解的要求将(7)式的第一式与(14)式代入下列波动方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_t}{\partial t}, \quad (15)$$

经过整理后我们得到色散方程为

$$\begin{aligned} k^3 - \frac{1}{v_{\parallel}} \left[ \omega - \frac{Q_{\parallel}}{\gamma_{\parallel}} \right] k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} k^2 \\ + \frac{\omega}{c^2 v_{\parallel}} \left[ \omega \left( \omega - \frac{Q_{\parallel}}{\gamma_{\parallel}} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} F^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m_0 \gamma_0} \quad (17)$$

为不变等离子体频率。在导出(16)式时已假定电子的轴向速度比横向速度大得多,所以

$$\gamma_0 \simeq \gamma_{\parallel} = \left( 1 - \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

#### 四、色散方程的数值解

色散方程(16)是我们讨论的基础。我们知道一个实系数三次方程的解有两种情形,一是三个实根,二是一个实根和两个共轭复根。为了使波能增长,我们只要求有共轭复根的解。这样,就对自由电子激光放大器的参数加上了第一个约束条件。其次,电子束中的快回旋波满足下述关系式:

$$\omega - kv_{\parallel} = \frac{Q_{\parallel}}{\gamma_{\parallel}}. \quad (18)$$

如令

$$\omega = (1 + N) \frac{Q_{\parallel}}{\gamma_{\parallel}}, \quad (19)$$

并利用真空中的电磁波的色散关系  $k = \omega/c$ , 则可得到实数  $N$  为

$$N = \frac{1}{1 - \frac{v_{\parallel}}{c}} - 1. \quad (20)$$

数值计算表明对于给定电子束电压,色散方程(16)的解  $k = k_1 + ik_2$  的复数部分  $k_2$  (即小信号增益)的最大值总是在(20)式决定的  $N$  所对应的频率  $\omega_m$  处达到。将  $\omega_m$  和相应的传播常数  $k_1$  代入(18)式,可求得偏离快回旋波关系式的相对误差  $\Delta = \left| \omega_m - k_1 v_{\parallel} - \frac{Q_{\parallel}}{\gamma_{\parallel}} \right| / \omega_m$ 。图2画出了相对误差  $\Delta$  与电子束电压  $V$  的关系。当电压  $V$  接近使回旋谐振条件(6)式满足时的值为

$$V_{cr} = 0.51 \left[ 1 - \frac{\frac{1}{c^2} \left( \frac{Q_{\parallel}}{k_0} \right)^2}{1 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{Q_{\parallel}}{k_0} \right)^2} \right] \quad (21)$$

时(在图2的参量下,  $V_{cr} = 0.8777$  兆伏)  $\Delta$  迅速上升,但在远离谐振条件成立的区域内

$\Delta$  是极小的。当电子束电流密度  $J$  和横向磁场强度  $B_{\perp}$  增大时,  $\Delta$  也增大。总之, 使色散方程 (18) 的最后一项  $\frac{\omega_p^2}{c^2} F^2$  增大的因素都使  $\Delta$  增大。从上述结果不难得到下述结论:

自由电子激光放大器在小信号条件下的工作机理实质上就是电子束与快回旋波的相互作用, 而电子在静磁场中的回旋谐振, 大电流密度与强的横向磁场对这种相互作用有强烈的影响。

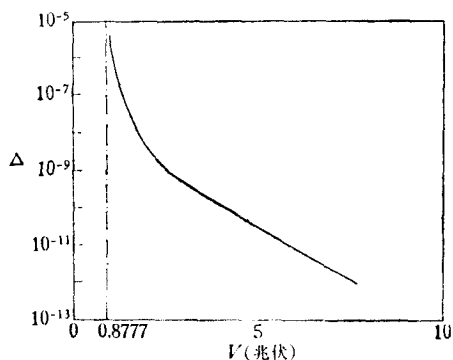


图 2

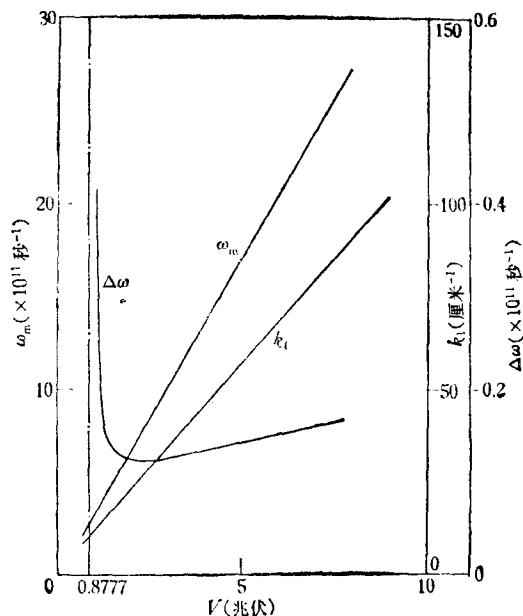


图 3 最大增益时的频率  $\omega_m$ , 相应的传播常数  $k_1$  与放大器带宽  $\Delta\omega$  和电子束电压  $V$  的关系  
 $B_{\parallel} = B_{\perp} = 5$  千高斯;  $\lambda_0 = 3$  厘米;  $J = 0.5$  安

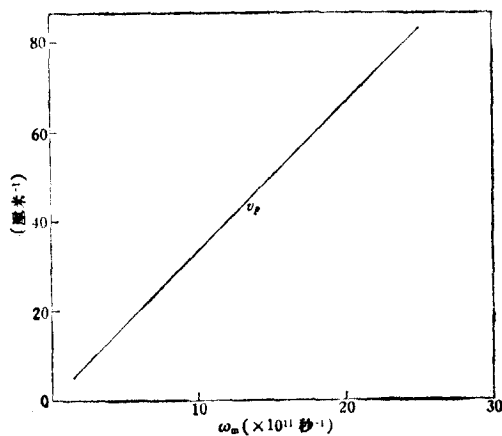


图 4 放大电磁波的色散关系

$B_{\parallel} = B_{\perp} = 5$  千高斯;  $\lambda_0 = 3$  厘米;  $J = 0.5$  安

我们进一步研究当其它参数不变, 仅改变电子束电压  $V$  时的情形。从图 3 可见小信号增益  $k_2$  最大时的频率  $\omega_m$  和相应的传播常数  $k_1$  正比于  $V$  增加。从图 4 可见  $k_1$  与  $\omega_m$  在五位有效数字相同的精度内成直线关系, 而实际并非直线。相速度  $v_p = \omega_m/k_1$  在 7 兆电子伏时为  $2.99793 \times 10^{10}$  厘米/秒 (这是计算中所用的光速值), 在 1 兆电子伏时为  $2.99792 \times 10^{10}$  厘米/秒, 即十分接近于真空中的光速。

图 5 和图 6 分别表示增益最大值  $k_2$  随电子束电压  $V$  及增益最大值时的频率即中心工作频率  $\omega_m$  的增加迅速减少。这对高频波的放大是不利的。在接近迴旋谐振电压  $V_{cr} = 0.8777$  兆伏时, 增益急剧上升。

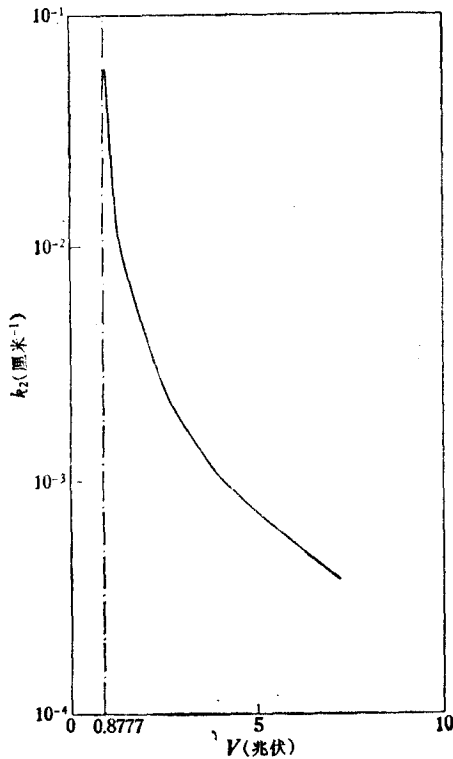


图 5 最大增益  $k_2$  与电子束电压  $V$  的关系  
 $B_{\parallel} = B_{\perp} = 5$  千高斯;  $\lambda_0 = 3$  厘米;  $J = 0.5$  安

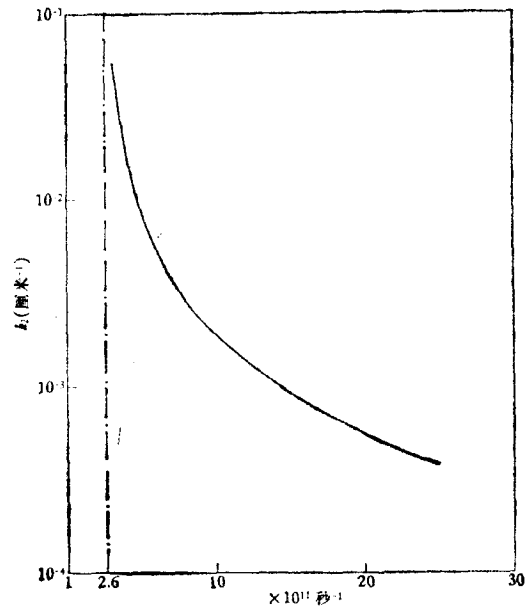


图 6 最大增益  $k_2$  与中心工作频率  $\omega_m$  的关系  
 $B_{\parallel} = B_{\perp} = 5$  千高斯;  $\lambda_0 = 3$  厘米;  $J = 0.5$  安

图 7 和图 8 示出了放大器的频谱特性。从这些图可求得放大器的中心工作频率  $\omega_m$  和带宽  $\Delta\omega$  (它是半高度处的全宽度)。从图 3 可见带宽  $\Delta\omega$  与电压  $V$  有密切关系。在远离迴旋谐振电压的范围内  $\Delta\omega$  与  $V$  成正比, 在接近迴旋谐振电压时  $\Delta\omega$  急剧上升。

图 9 表示放大器其它参量不变时, 增益最大值  $k_2$  与带宽  $\Delta\omega$  随电子束电流密度  $J$  增加而增加。当电流密度足够大时发生饱和的趋势。当放大器其它参量不变时, 最大增益  $k_2$  和带宽  $\Delta\omega$  都正比于横向磁场强度, 如图 10 所示。但是在其它参量不变时, 横向静磁场的波长  $\lambda_0$  对增益与带宽的影响十分强烈, 在接近满足迴旋谐振条件的波长 (本例中为 8.1218 厘米) 时  $\Delta\omega$  与  $k_2$  都急剧上升, 如图 11 所示。

图 12 表示放大器的其它参量不变, 只改变轴向磁场强度  $B_{\parallel}$  的情形。我们看到最大增益  $k_2$  和带宽  $\Delta\omega$  在接近满足迴旋谐振条件 (6) 式的磁场强度时 (本例中为 6.021 千高斯) 急剧上升。而中心工作频率  $\omega_m$  及相应的传播常数  $k_1$  与  $B_{\parallel}$  成正比, 相速度  $v_p \approx \omega_m/k_1 \approx c$ 。

数值计算结果还表明当电压足够高时, 频谱特性发生振荡, 其示意图如图 13。这种振荡的特性与产生的物理机制有待于进一步研究。

我们发现当色散方程 (16) 的最后一项  $\frac{\omega_p^2}{c^2} F^2$  取负值时满足下列关系:

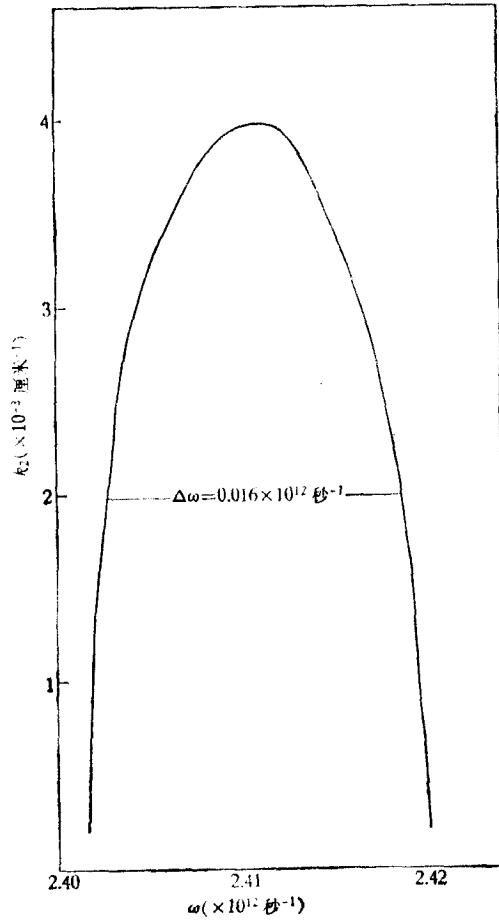


图7 放大器的频谱特性 (I)  $V = 7$  兆伏;  
 $B_1 = B_2 = 5$  千高斯;  $\lambda_0 = 3$  厘米;  $J = 0.5$  安

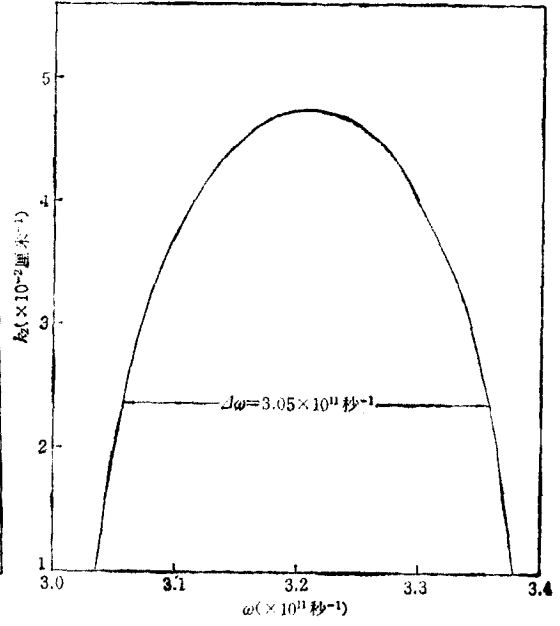


图8 放大器的频谱特性 (II)  $V = 1$  兆伏

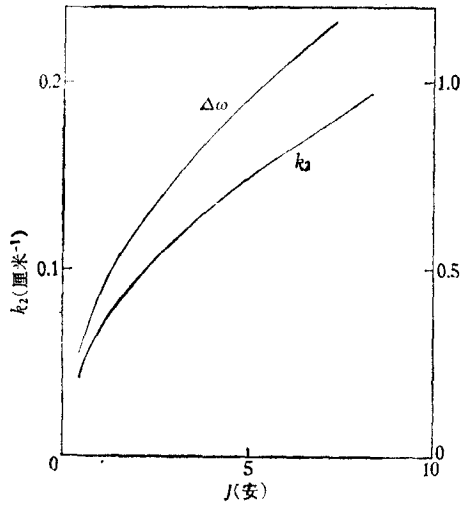


图9  $\omega_m = 3.2077 \times 10^{11}$  秒<sup>-1</sup>;  $k_1 = 10.700$  厘米<sup>-1</sup>;  
 $B_1 = B_2 = 5$  千高斯;  $\lambda_0 = 3$  厘米;  $V = 1$  兆伏

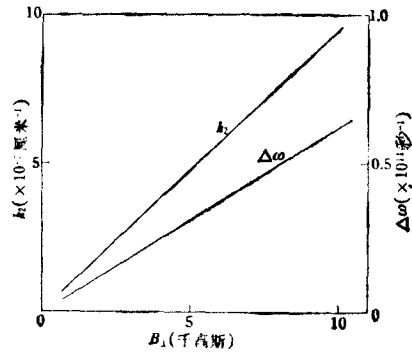


图10  $\omega_m = 3.2077 \times 10^{11}$  秒<sup>-1</sup>;  $k_1 = 10.700$  厘米<sup>-1</sup>;  
 $B_2 = 5$  千高斯;  $\lambda_0 = 3$  厘米;  $V = 1$  兆伏;  $J = 0.5$  安

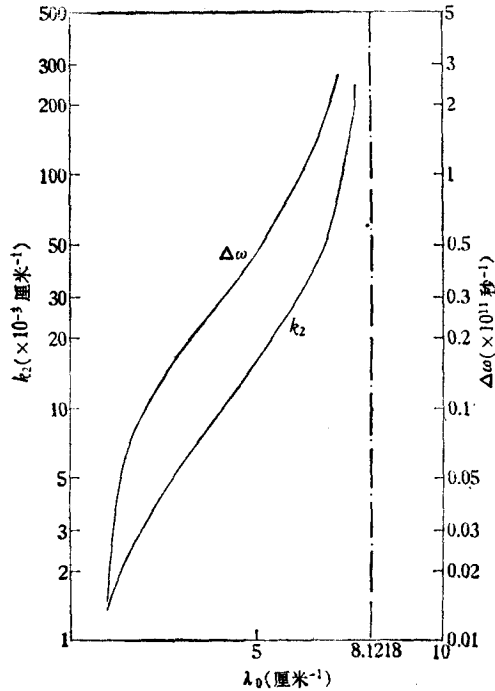


图 11 最大增益  $k_2$  和带宽  $\Delta\omega$  与横向静磁场的波长  $\lambda_0$  的关系

$\omega_m = 6.7836 \times 10^{11} \text{ 秒}^{-1}$ ;  $k_1 = 22.628 \text{ 厘米}^{-1}$ ;  
 $B_{\parallel} = B_{\perp} = 5 \text{ 千高斯}$ ;  $J = 1 \text{ 安}$ ;  $V = 2 \text{ 兆伏}$

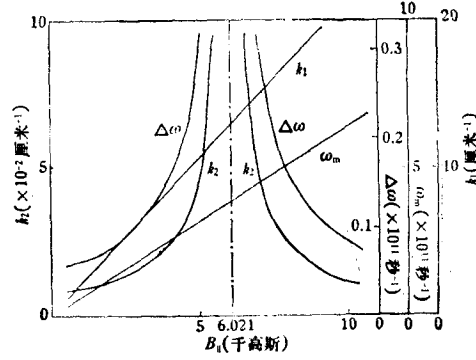


图 12 最大增益时的频率  $\omega_m$ , 相应的传播常数  $k_1$  与放大器带宽  $\Delta\omega$  和轴向静磁场强度  $B_{\parallel}$  的关系

$B_{\perp} = 5 \text{ 千高斯}$ ;  $\lambda_0 = 3 \text{ 厘米}$ ;  $V = 1 \text{ 兆伏}$ ;  
 $J = 0.5 \text{ 安}$

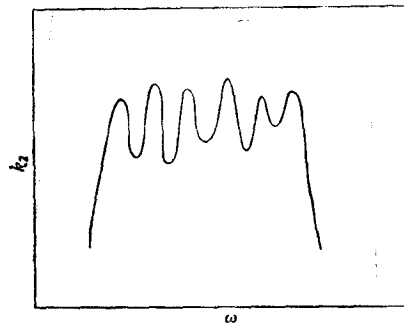


图 13 放大器的频谱特性 (III)  $V = 10 \text{ 兆伏}$

$$\omega + kv_{\parallel} = \frac{Q_{\parallel}}{\gamma_{\parallel}} \quad (22)$$

的慢迴旋波也能产生放大作用。然而因为这一项都是平方项不可能取负值，所以慢迴旋波对自由电子激光放大不起作用。这也说明放大后的波经镜子反射回来(这时  $k$  与  $v_{\parallel}$  反相)并不能与电子束相互作用。

### 五、讨 论

上述数值计算结果充分证实了自由电子激光放大器在小信号条件下的工作机理实质上是电子束与快迴旋波的相互作用,而电子在静磁场中的迴旋谐振,大电流密度与强的横向磁场对这种相互作用有强烈的影响的结论。这样我们清楚地阐明了在自由电子激光放大器中均匀轴向静磁场与周期横向磁场的作用,并能定量地分析放大器的工作特性与参量之间的关系。

我们也可指出进行放大器最佳设计的途径。首先由要求的中心工作频率和带宽决定电子束的电压。然后按可能达到的电流密度进行计算。横向静磁场的波长可视磁体加工工艺技术达得到的大小来确定,而其强度应尽可能地高。轴向磁场可按满足迴旋谐振条件来决定。当然这些因素是相互关联的,为了达到自洽的最佳设计应对各个参量进行反复



修正.

因为本文所用的电子束电压与电流密度都属于低值范围, 而计算所得的小信号增益与带宽都足够大, 所以做实验来验证本理论并制成一个实用的自由电子激光放大器是可能的.

对吕保维教授的指导与支持表示感谢.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] L. R. Elias, W. M. Fairbank, J. M. J. Madey, H. A. Schwettman, T. I. Smith. *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 717.
- [ 2 ] J. M. J. Madey, *J. Appl. Phys.*, **42**(1971), 1906.
- [ 3 ] F. A. Hopf, P. Meystre, G. T. Moore, M. O. Scully, *Physical of Quantum Electronics*, **5**(1978), 41.
- [ 4 ] P. Sprangle, R. A. Smith, V. L. Granatstein. *Infrared and Millimeter Waves*, **1**(1979), 279.
- [ 5 ] L. Friedland, J. L. Hirshfield, *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1980), 1456.
- [ 6 ] M. B. Colson, *Free Electron Laser Theory*, Ph. D. Thesis, Stanford University (1977).

## THEORETICAL ANALYSIS OF FREE ELECTRON LASER AMPLIFIER

YIN YUAN-ZHAO

(*Institute of Electronics, Academia Sinica*)

### ABSTRACT

In this paper, a detailed analysis on the operating mechanism and parameter properties of free electron laser amplifier (FELA) in the case of small signal is presented. The results show that FELA is in essence the interaction between the electron beam and the fast cyclotron wave. The cyclotron resonance condition of electron motion in the uniform axial and periodic transverse static magnetic fields significantly influences the interaction process. We have calculated numerically the central operating frequency, band width, small signal gain and wave number of the amplified electromagnetic wave as functions of the parameters of the amplifier (such as the voltage and current density of the electron beam, the intensities of axial and transverse static magnetic field). The way to optimize the design of FELA is also suggested. It is possible to obtain a small signal gain of  $10^{-2}\text{cm}^{-1}$  with enough band width in the millimeter and submillimeter range of wave length following a proper design.