

在一个磁通量子内 dc Josephson 电流的阶梯效应 (I)

双 结 SQUID

张裕恒 李玉芝 郑捷飞¹⁾

(中国科学技术大学物理系)

1982年11月22日收到

提 要

如果将由两个相同的 Josephson 结组成的双结 SQUID 放置于 Q 值足够高的谐振腔内, 当其 Josephson 频率 $\omega = 2eV_0/\hbar$ 与谐振腔的本征频率 ω , 发生谐振时, 腔内就被激起一个驻波电磁场, 这个场对两个结的反馈作用, 将导致双结 SQUID 的 dc Josephson 电流在一个磁通量子内随磁场产生多次阶梯效应。

理论给出两个结的 Josephson 电流产生一系列新的干涉作用: 如果两个结分别位于反馈场的波峰, 则阶跃电流加强; 如果其中一个位于波谷, 则使 SQUID 的干涉图形改变 $\pi/2$ 位相, 且两个结电流产生相干性减小; 如果一个在波峰一个在波节, 则 SQUID 退化到单结; 如果两个结都在波节, 则不出现 $n \neq 0$ 的阶梯。

一、引 言

作者之一与陈赓华已经给出了处在高 Q 值谐振腔中的 Josephson 结^[1]、单结超导环^[2]的超流电流随磁场作周期小于一个磁通量子的振荡的结果。但是由于文献 [1] 给出的是理论方程的近似解, 所以对 Josephson 结诱导出不准确的结论。

本文研究将双结 SQUID 放置于高 Q 值的谐振腔中, 当两个结发射的电磁波的 Josephson 频率 $\omega = 2eV_0/\hbar$ 激发起谐振腔的第 r 个本征模振荡时, 这个振荡将辐照到两个结上, 考虑了这个反馈作用, 并严格解出理论方程, 将得到 SQUID 中的超流电流在一个磁通量子内随磁场出现多次阶梯。

理论并给出两个结的 Josephson 电流产生的一系列新的干涉作用。

1) 中国科学技术大学 82 届毕业生, 现在中国科学院半导体研究所。

二、双结 SQUID 的总电流在 $\phi_0 = hc/2e$ 内的多次阶梯效应

1. 理论

将两个相同的 Josephson 隧道结 J_{s_1} 和 J_{s_2} 用超导体联接起来组成 SQUID (见图 1), 取 xz 平面平行于环路的平面, 沿 y 轴方向加一个稳恒磁场 H , 沿 z 轴在两个结上加一个恒定电压 V_0 , 并认为此电压值较小, 以致对应的 Josephson 电流频率达不到结的本征频率, 因而我们不考虑结的自测效应.

由弱连接的基本方程可知, 在电压 V_0 和磁场 H 的作用下, J_{s_1} 和 J_{s_2} 两个隧道结中的 Josephson 电流密度分别为

$$j_{s_1}(x, t) = j_c \sin(\omega t + kx + \varphi_{10}), \quad (1a)$$

$$j_{s_2}(x, t) = j_c \sin(\omega t + kx + \varphi_{20}), \quad (1b)$$

式中 $\omega = 2eV_0/\hbar$, $k = 2e\Lambda H/\hbar c$. Λ 为磁场穿透深度, $\Lambda = 2\lambda + d$, λ 为穿透深度, d 为绝缘层厚度, j_c 为 Josephson 结的临界电流密度, φ_{10} 和 φ_{20} 分别为 J_{s_1} 和 J_{s_2} 的初位相.

由于 J_{s_1} 和 J_{s_2} 发射出的 Josephson 频率相同, 都是 $\omega = 2eV_0/\hbar$, 所以它们是两个相干辐射源, J_{s_1} 和 J_{s_2} 发射出的电磁波在空间中形成相干波, 这个波的频率仍然是 ω , 相干后只是形成新的振幅和位相.

如果把这个双结 SQUID 放置于本征频率为 ω_r 的谐振腔中, 当相干波的 Josephson 频率 $\omega = 2eV_0/\hbar$ 与谐振腔的本征频率 ω_r 谐振时, 则 SQUID 辐射出去的电磁波将在谐振腔内形成驻波场, 这个场又反馈作用到结上. 设这个辐射结的驻波场具有如下形式:

$$V_r(x, t) = V_{r0} \xi_z(x, y_0, z_0) \cos(\omega_r t + \theta), \quad (2)$$

式中 V_{r0} 为感应电压的幅值, ω_r 为谐振腔第 r 个本征模的频率, $\xi_z(x, y_0, z_0)$ 为谐振腔频率等于 ω_r 的电场本征模的空间部分的 z 分量. 由于当腔中激起驻波场时, 空间不同位置波的强度不一样, 因此反馈到腔中不同位置的两个结上的电场强度也不一样. 设隧道结 J_{s_1} 在 (x_1, y_0, z_0) 处, J_{s_2} 在 (x_2, y_0, z_0) 处, 则 J_{s_1} 和 J_{s_2} 中的 Josephson 电流密度应分别改写为

$$j_{s_1}(x, t) = j_c \sin \left[\omega t + kx + \varphi_{10} + \frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \sin(\omega_r t + \theta) \right], \quad (3a)$$

$$j_{s_2}(x, t) = j_c \sin \left[\omega t + kx + \varphi_{20} + \frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \sin(\omega_r t + \theta) \right]. \quad (3b)$$

用 l_x 和 l_y 分别表示隧道结的长和宽, 则 Josephson 电流应为

$$I_{s_1} = \int_{-l_x/2}^{l_x/2} dx \int_{-l_y/2}^{l_y/2} dy j_{s_1}(x, t)$$

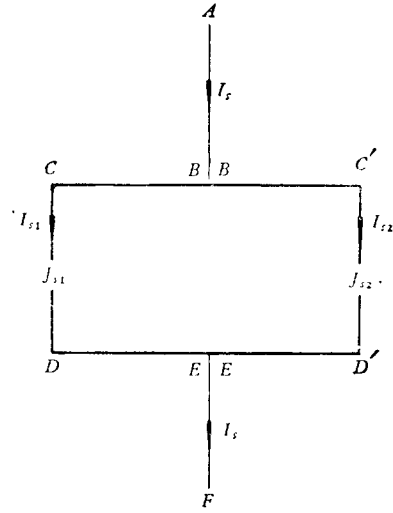


图 1 双结 SQUID 示意图

$$= I_c \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \sin \left[\omega t + \varphi_{10} + \frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \sin(\omega_r t + \theta) \right], \quad (4a)$$

$$I_{s_2} = I_c \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \sin \left[\omega t + \varphi_{20} + \frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \sin(\omega_r t + \theta) \right], \quad (4b)$$

式中 $I_c = j_c l_x l_y$ 为零压、零场时超流电流的最大值, $\Phi_J = \Lambda l_x H$ 为穿透到隧道结中的磁通, x_1 和 x_2 分别为 J_{s_1} 和 J_{s_2} 在 x 轴上的位置.

应用公式

$$\sin(z \sin \varphi + \alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) \sin(m\varphi + \alpha),$$

并由 (4a) 和 (4b) 式, 则

$$\begin{aligned} I_s = I_{s_1} + I_{s_2} = I_c \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} & \times \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] \sin[(\omega + m\omega_r)t + \varphi_{10} + m\theta] \right. \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] \sin[(\omega + m\omega_r)t \\ & \left. + \varphi_{20} + m\theta] \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

当 $\omega = n\omega_r$ 时, I_s 长时间平均值不为零^[1], 再由

$$\varphi_{20} - \varphi_{10} = 2\pi \left(\frac{\Phi_c}{\phi_0} \right) + LI + 2\pi l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad \Phi_c = S_{\bar{x}} H,$$

即为穿过环面的外磁通, L 为自感, 设 L 很小, 所以 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = 2\pi(\Phi_c/\phi_0) + 2\pi l$. 则流过 J_{s_1} 和 J_{s_2} 的直流分量之和为

$$\bar{I}_s = (-1)^n I_c \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_c/\phi_0)} \cdot [A \sin(\varphi_{10} - n\theta) + B \cos(\varphi_{10} - n\theta)], \quad (6)$$

式中

$$A = J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] + J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] \cos\left(2\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0}\right),$$

$$B = J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] \sin\left(2\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

为了求得最大阶跃高度 $\Delta \bar{I}_s$, 令 $\partial \bar{I}_s / \partial(\varphi_{10} - n\theta) = 0$, 得

$$\sin(\varphi_{10} - n\theta) = A/\sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos(\varphi_{10} - n\theta) = B/\sqrt{A^2 + B^2},$$

所以

$$\Delta \bar{I}_s = I_c \left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \right| \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (7a)$$

式中

$$\begin{aligned} \sqrt{A^2 + B^2} = & \left\{ J_n^2 \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] + J_n^2 \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] \right. \\ & + 2 \cos \left(2\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \right) J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] J_n \\ & \left. \times \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] \right\}^{1/2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (7b)$$

因为当 $n = 0$ 时, $\omega = 0$, 即 $V_0 = 0$, 没有激励源, 谐振不发生, 这不是我们要研究的问题, 所以 n 只能取不等于零的正自然数.

为了确定 (7a) 式中的 $\Delta \bar{I}_s$, 必须找到 V_{r0} 的值.

我们知道, 当考虑 n 为某一确定的非零整数时, (5) 式中 $I_{1\omega_r}$ 和 $I_{2\omega_r}$ 含有频率为 ω_r 的分量为

$$\begin{aligned} I_{1\omega_r} = & I_c \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \cdot \left\{ J_{-n+1} \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] \sin[\omega_r t + \varphi_{10} \right. \\ & - (n-1)\theta] - J_{-n-1} \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] \sin[\omega_r t \\ & \left. - \varphi_{10} + (n+1)\theta] \right\}, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} I_{2\omega_r} = & I_c \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \cdot \left\{ J_{-n-1} \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] \sin[\omega_r t + \varphi_{20} \right. \\ & - (n-1)\theta] - J_{-n-1} \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] \sin[\omega_r t \\ & \left. - \varphi_{20} + (n+1)\theta] \right\}. \end{aligned} \quad (8b)$$

这个 $I_{1\omega_r}$ 和 $I_{2\omega_r}$ 正是激发起谐振腔谐振的激励电流源.

由微波理论^[2]知道, 当谐振腔的激励电流频率与腔的本征频率相等时, 即共振时, 电场矢量为

$$\mathbf{E} = - \frac{Q\mathbf{\xi}_r}{\varepsilon N\omega_r} \int \mathbf{j}_{\omega_r} \cdot \mathbf{\xi}_r dV, \quad (9)$$

式中 Q 为谐振腔的品质因子, \mathbf{j}_{ω_r} 为在腔内的频率等于 ω_r 的激励电流密度, ε 为介电常数, $\mathbf{\xi}_r$ 为频率等于 ω_r 的电场本征模的空间部分, N 为 $\mathbf{\xi}_r$ 的模平方.

考虑到结及引线截面的线度远小于谐振腔的尺寸, 所以有

$$\mathbf{E} = - \frac{Q\mathbf{\xi}_r}{\varepsilon N\omega_r} \left[I_{1\omega_r} \int_{l_1} \mathbf{\xi}_r \cdot d\mathbf{l} + I_{2\omega_r} \int_{l_2} \mathbf{\xi}_r \cdot d\mathbf{l} \right], \quad (10)$$

式中

$$I_{1\omega_r} = \int_{S_1} \mathbf{j}_{\omega_1} \cdot d\mathbf{S}, \quad I_{2\omega_r} = \int_{S_2} \mathbf{j}_{\omega_2} \cdot d\mathbf{S},$$

l_1 为 $I_{1\omega_r}$ 在腔体内流经的路径, l_2 为 $I_{2\omega_r}$ 在腔体内流经的路径.

因为 Josephson 结是一个平行板电容器, 所以

$$V_r = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}, \quad (11)$$

式中 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 表示位于 \mathbf{r} 处的场强, \mathbf{A} 的方向垂直于结平面.

由于 J_{S_1} 和 J_{S_2} 处于谐振腔不同位置, 显然, 反馈于其上的电压

$V_{r_1} = V_{r0} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \cos(\omega_r t + \theta)$ 和 $V_{r_2} = V_{r0} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \cos(\omega_r t + \theta)$ 是不一样的, 但反馈波的 V_{r0} 是不变的, 因此由 (x_1, y_0, z_0) 或 (x_2, y_0, z_0) 求得的 V_{r0} 一样, 否则理论将不自洽. 我们取位于 (x_1, y_0, z_0) 的结两端交变电压, 下面的推导也可以看到它与结的位置无关. 由(2), (10)和(11)式得

$$\begin{aligned}
 V_{r0} \cos(\omega_r t + \theta) = & - \frac{QA}{\varepsilon N \omega_r} I_c \frac{\sin(\pi \Phi_J / \phi_0)}{(\pi \Phi_J / \phi_0)} \\
 & \times \left\{ \left(\int_{l_1} \xi_r \cdot d\mathbf{l} \right) J_{-n+1} \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar \omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] \right. \\
 & \times [\sin(\omega_r t + \theta) \cos(\varphi_{10} - n\theta) + \cos(\omega_r t \\
 & + \theta) \sin(\varphi_{10} - n\theta)] - \left(\int_{l_1} \xi_r \cdot d\mathbf{l} \right) J_{-n-1} \\
 & \times \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar \omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] \left[\sin(\omega_r t + \theta) \cos(\varphi_{10} - n\theta) \right. \\
 & \left. - \cos(\omega_r t + \theta) \sin(\varphi_{10} - n\theta) \right] \\
 & + \left(\int_{l_2} \xi_r \cdot d\mathbf{l} \right) J_{-n+1} \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar \omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] \\
 & \times [\sin(\omega_r t + \theta) \cos(\varphi_{20} - n\theta) + \cos(\omega_r t + \theta) \sin(\varphi_{20} - n\theta)] \\
 & - \left(\int_{l_2} \xi_r \cdot d\mathbf{l} \right) J_{-n-1} \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar \omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] \\
 & \left. \times [\sin(\omega_r t + \theta) \cos(\varphi_{20} - n\theta) - \cos(\omega_r t + \theta) \sin(\varphi_{20} - n\theta)] \right\}. \tag{12}
 \end{aligned}$$

由三角函数的正交性, (12)式变成

$$\begin{aligned}
 V_{r0}^2 = & \frac{nQA\hbar}{e\varepsilon N} I_c \left| \frac{\sin(\pi \Phi_J / \phi_0)}{(\pi \Phi_J / \phi_0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right. \\
 & \times \left\{ \left(\int_{l_1} \xi_r \cdot d\mathbf{l} \right) \frac{J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar \omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right]}{\xi_z(x_1, y_0, z_0)} \right. \\
 & \times A + \left(\int_{l_2} \xi_r \cdot d\mathbf{l} \right) \frac{J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar \omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right]}{\xi_z(x_2, y_0, z_0)} \\
 & \left. \times \left[A \cos \left(2\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \right) + B \sin \left(2\pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \right) \right] \right\} \Big| \tag{13}
 \end{aligned}$$

对于给定的腔和选定的 J_{S_1}, J_{S_2} 的位置 $(x_1, y_0, z_0), (x_2, y_0, z_0)$, 就有确定的 ξ_r 的形式, 则(13)式中 V_{r0} 只是磁场 H 的函数, 解出 $V_{r0} = f(H)$ 的值, 将 V_{r0} 代入(7)式 $\Delta \bar{I}_s$ 的表达式, 就可得到第 n 个标号的电流阶梯高度是如何随磁场 H 变化的.

考虑一个矩形谐振腔, 设腔的三边分别沿 x, y, z 轴, 其相应的边长为 a, b 和 w . 取 \mathbf{E} 的模式为 $E_{k'l'0}$, 其电场分量的空间部分为

$$\xi_r = (0, 0, \xi_z), \tag{14}$$

$$\xi_z = \sin\left(\frac{k'\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l'\pi}{b}y\right) \quad (k', l' = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

则其本征频率为 $\omega_r = \pi c[(k'^2/a^2) + (l'^2/b^2)]$, c 为光速, ξ_r 的模平方

$$N = \int_v \xi_z^2 dV = \frac{1}{4} ab\omega_r.$$

为了计算方便起见, SQUID 的环路如图 1 所示, l_1 的路线为 $ABCDEF$, l_2 的路线为 $ABC'D'EF$, 并设 $CD = C'D' = d$, A, F 间的距离为 w . 由于 ξ_r, dl 均沿 z 轴, 则 $AB, CD, C'D', EF$ 段 $\xi_r \cdot dl = \xi_z dl$; 而 $BC, DE, BC', D'E$ 段的 $\xi_r \cdot dl = 0$, 所以

$$\int_{l_1} \xi_r \cdot dl = (w-d)\xi_z\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2), y_0, z_0\right) + d\xi_z(x_1, y_0, z_0), \quad (16a)$$

$$\int_{l_2} \xi_r \cdot dl = (w-d)\xi_z\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2), y_0, z_0\right) + d\xi_z(x_2, y_0, z_0). \quad (16b)$$

如果将 J_{S_1} 和 J_{S_2} 放置于腔内的对称位置, 令 $x = x_1, x_2 = a - x_1$, 则由(15)式可得

$$\xi_z(x_2, y_0, z_0) = -\cos k'\pi \xi_z(x_1, y_0, z_0) \quad (k' = 1, 2, 3, \dots).$$

1) $\xi_z(x_1, y_0, z_0)$ 与 $\xi_z(x_2, y_0, z_0)$ 同位相

当 $k' = 1, 3, 5, \dots$ 时, 即基频的奇次倍频情况, 见图 2(a), 则(13)式将为

$$\begin{aligned} V_{r_0}^2 &= \frac{8nQ\Lambda\hbar}{c\epsilon abw} I_c \left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \right| \left[d + (w-d) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\xi_z\left(\frac{1}{2}a, y_0, z_0\right)}{\xi_z(x_1, y_0, z_0)} \right] \cdot J_n \left[\frac{2eV_{r_0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] \\ &\quad \times \cos \pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

由(17)和(7a)式得到

$$\begin{aligned} \Delta \bar{I}_S &= 2I_c \left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \right| \cdot J_n \left[\frac{2eV_{r_0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] \cos \pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (18)$$

2) $\xi_z(x_1, y_0, z_0)$ 与 $\xi_z(x_2, y_0, z_0)$ 反位相

当 $k' = 2, 4, 6, \dots$ 时, 即基频的偶次倍频波的情况, 见图 2(b), 则

$$\xi_z(x_2, y_0, z_0) = -\xi_z(x_1, y_0, z_0). \quad (19)$$

由 Bessel 函数的性质, $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$, 所以

$$\begin{aligned} &J_n \left[\frac{2eV_{r_0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] \\ &= \begin{cases} J_n \left[\frac{2eV_{r_0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] & (n = 2, 4, 6, \dots), \\ -J_n \left[\frac{2eV_{r_0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] & (n = 1, 3, 5, \dots). \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

对于 $n = 2, 4, 6, \dots$, 得到和同位相类似的结果, 即(17)式的右边乘以 d 和(18)式的形式.

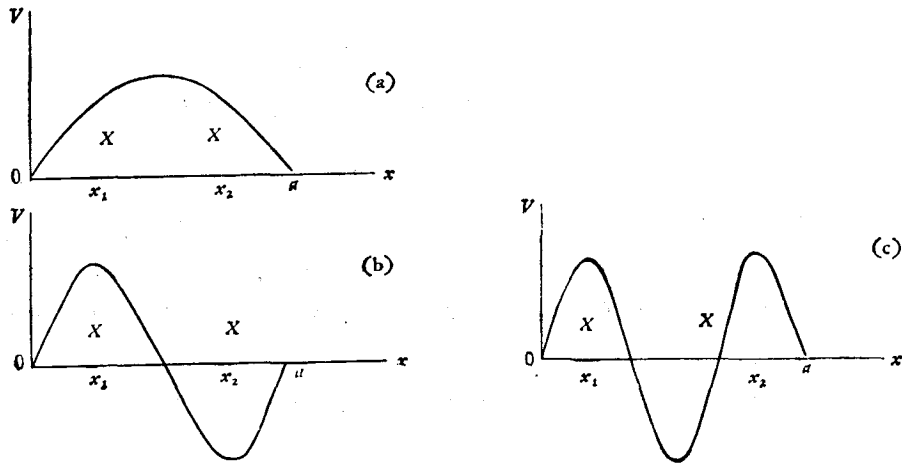


图 2 双结在反馈场中位置示意图

对于 $n = 1, 3, 5, \dots$, 则得到

$$V_{r0}^2 = \frac{8nQ\Lambda\hbar d}{c\epsilon ab\omega} I_c \left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \right| \left[d + (w - d) \right. \\ \left. \times \frac{\xi_z\left(\frac{1}{2}a, y_0, z_0\right)}{\xi_z(x_1, y_0, z_0)} \right] \cdot J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] \\ \times \sin \pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \quad (n = 1, 3, 5, \dots), \quad (21)$$

$$\Delta \bar{I}_S = 2I_c \left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \right| \cdot J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] \sin \pi \frac{\Phi_c}{\phi_0} \\ (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (22)$$

2. 在一个磁通量子内的小周期阶梯效应

为了能清楚地看到作用到 J_{S_1} 和 J_{S_2} 上反馈电压本征模空间部分的影响, 对 SQUID 环面积 $S_{\text{环}} = d(x_2 - x_1)$ 的选取是重要的, 如果 $S_{\text{环}} \gg S_{\text{磁}}$, 则在一个单结的 Fraunhofer 衍射峰中出现非常多的周期等于 ϕ_0 的双结干涉振荡, 同时出现在一个磁通量子内的阶梯数太多, 致使实验上很难分辨出这种新的阶梯效应. 因此 $S_{\text{环}}$ 不能太大.

J_{S_1} 和 J_{S_2} 位置的选取将有两种情况: 一是 d 大, $(x_2 - x_1)$ 小; 一是 d 小, $(x_2 - x_1)$ 大. 前者不仅给实验技术上带来困难, 而且体现不出 $\xi_z(x, y_0, z_0)$ 在 J_{S_1} 和 J_{S_2} 上的差别; 后者则是很容易得到的. 因此取最佳匹配条件 $\sin[(l\pi/b)y_0] = 1$, $x_1 = a/4$, $x_2 = 3a/4$, $I_c = 1\text{mA}$, $\Lambda = 1.38 \times 10^{-5}\text{cm}$, $\epsilon = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{C/N} \cdot \text{m}^2$, $a = b = 1\text{cm}$, $k' = l' = 1$, 所以 $\omega_r = 130\text{GHz/sec}^{[1]}$, $S_{\text{磁}} = 6.9 \times 10^{-7}\text{cm}^2$. 当 $d = 6.9 \times 10^{-6}\text{cm}$ 时, $S_{\text{环}} = 3.45 \times 10^{-6}\text{cm}^2$. 对于 Q 值为 7.07×10^3 和 7.07×10^2 , 由(17)式算出 $n = 1$ 标号的 V_{r0} 随 H 的变化值, 代入到(18)式即得到阶梯效应的新结果. 图 3 和图 4 分别相应于 Q 为 7.07×10^3 和 7.07×10^2 的情况. 由图可以看到反馈场的作用改变了原来的 SQUID 的干涉图形. 在没有反馈场作用时, 单结的 Fraunhofer 衍射周期为 0.3G , 双结的

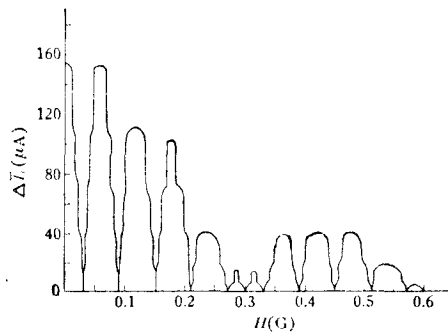


图3 $n=1$ 的电流阶梯高度与外磁场的关系
($Q=7.07 \times 10^3$)

理论参数: $I_c = 1 \text{ mA}$; $A = 1.38 \times 10^{-3} \text{ cm}$;
 $e = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C/N} \cdot \text{m}^2$; $a = b = 1 \text{ cm}$;
 $(x_2 - x_1) = 0.5 \text{ cm}$; $d = 6.9 \times 10^{-6} \text{ cm}$

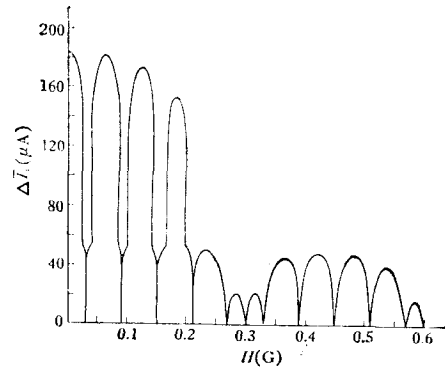


图4 $n=1$ 的电流阶梯高度与外磁场的关系
($Q=7.07 \times 10^2$)

理论参数同图3

干涉周期为 0.06 G , 而在这种反馈作用下, 在 0.06 G (相应于一个磁通量子 ϕ_0) 中还出现一系列阶梯, 对 $Q = 7.07 \times 10^3$, 最多阶梯数为五次, $Q = 7.07 \times 10^2$, 只出现一次阶梯效应。

3. 新的干涉现象

由 (7a) 式可以看到 ΔI_s 随磁场的变化关系除了通常的 Fraunhofer 衍射关系外, 还加了一个新的干涉项 (7b) 式. 显然 J_{s_1} 和 J_{s_2} 在腔中不同位置, (7b) 式可以给出一系列新的干涉现象. 我们讨论图 2 中给出的四种情况:

1) J_{s_1} 和 J_{s_2} 分别位于波峰 (图 2(a)) 这正是 (18) 式给出的结果, 并见图 3 和图 4.

2) J_{s_1} 在波峰 J_{s_2} 在波谷 (图 2(b)) 从 (22) 式看到它和 (18) 式差了一个 $\pi/2$ 位相, 为了比较 J_{s_1} 和 J_{s_2} 都位于波峰和一个在波峰一个在波谷的相干情况, 我们分别取 Q 值为 1.025×10^8 与 1.025×10^7 , 得到图 5 和图 6. 比较图 3 和图 5, 图 4 与图 6, 正好差一个

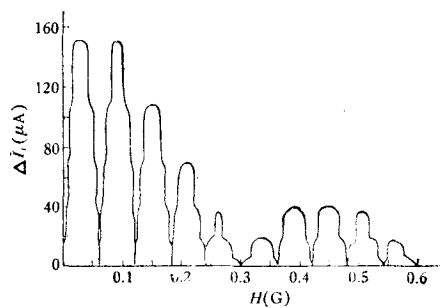


图5 一个结在反馈场的波峰, 一个结在波谷情况下, $n=1$ 的双结干涉
($Q=1.025 \times 10^8$)
理论参数同图3

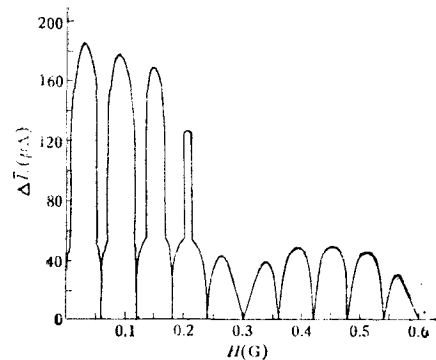


图6 一个结在反馈场的波峰, 一个结在波谷情况下, $n=1$ 的双结干涉
($Q=1.025 \times 10^7$)
理论参数同图3

$\pi/2$ 位相. 如果取 $Q = 7.07 \times 10^3$ 和 7.07×10^2 , 则得到的 $\Delta \bar{I}_s$ 比(18)式得到的小得多, 这正是 J_{s_1} 和 J_{s_2} 电流位相相反, 产生相干性抵消的结果.

3) J_{s_1} 位于波峰 J_{s_2} 位于节点(图 2(c))

$$J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] = J_n \left(\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \right); J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] = 0$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

这就是说, 由于 J_{s_2} 位于节点, 反馈于其上的电压 V_{r2} 永远是零, 则 $I_{s_2} = 0$, 它相当于 J_{s_2} 不存在一样, 因而不发生双结干涉. 则标号 $n \neq 0$ 的阶梯电流由 (7a) 式得到

$$\Delta \bar{I}_s = I_c \left| \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)} \cdot J_n \left(\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \right) \right| \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (23)$$

这表明反馈作用使 SQUID 量子干涉现象不发生, 双结干涉退化到单个的 Josephson 结的结果. 对于 Q 值为 2.5×10^4 和 1×10^3 的结果分别绘在图 7 和图 8.

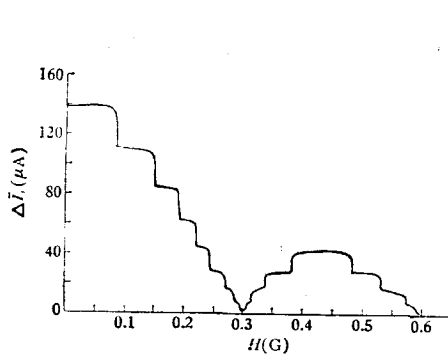


图 7 一个结在反馈场的波峰, 另一个位于节点的情况, $n = 1$ 的双结干涉 ($Q = 2.5 \times 10^4$)
理论参数同图 3

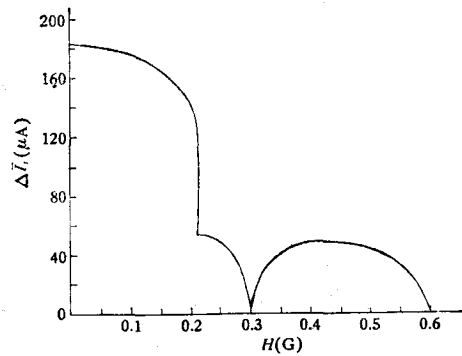


图 8 一个结在反馈场的波峰, 另一个位于节点的情况, $n = 1$ 的双结干涉 ($Q = 1 \times 10^3$)
理论参数同图 3

4) J_{s_1} 和 J_{s_2} 都位于节点

$$J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_1, y_0, z_0) \right] = J_n \left[\frac{2eV_{r0}}{\hbar\omega_r} \xi_z(x_2, y_0, z_0) \right] = J_n(0) = 0$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

则 (7a) 式变成

$$\Delta \bar{I}_s = 0. \quad (24)$$

由于节点处 $V_r = 0$, 所以相当于不存在反馈场的辐照, 因而除了 $V_0 = 0$ 的零压阶跃(相当于 $n = 0$) 外, 不出现非零电压的阶梯效应.

三、讨 论

1. 关于新的干涉现象

从以前的理论^[4] 我们知道, SQUID 的两个结的 Josephson 电流并不是简单的代数迭

加,而是量子干涉的结果. 且对 SQUID 的两个结外加一个稳恒电压时只能是同相,所以 SQUID 电流的公式只能有通常的双结量子干涉公式. 然而现在的反馈交变电压作用到 J_{s_1} 和 J_{s_2} 上,可以使加于 J_{s_1} 和 J_{s_2} 的电压有空间模的相差. 当两个结 J_{s_1} 和 J_{s_2} 承受同相的反馈电压 V_{r_1} 和 V_{r_2} 辐照时,则得到推广的双结量子干涉公式(18); 而当 J_{s_1} 和 J_{s_2} 承受反相空间模的反馈辐照时,它们的 Josephson 电流量子干涉的结果正好和前者相差 $\pi/2$ 位相,等等.

2. 严格解和近似解

对于单结,严格解得出的图 7 和图 8 修正了文献[1]近似解的结果.

文献[1]中令

$$K = A^{2/5} \cdot \sin^{2/5} \left(K - \frac{\pi}{4} \right), \quad (24)$$

式中

$$K \equiv 2eV_0/\hbar\omega_r, \quad A = \pm 16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{cQn\Lambda}{ab\epsilon\hbar\omega_r^2} \frac{\sin(\pi\Phi_J/\phi_0)}{(\pi\Phi_J/\phi_0)},$$

当 K 大时,(24)式近似为

$$K = A^{2/5}. \quad (25)$$

这个近似是不合理的,在(25)式中 K 随磁场 H 作 Fraunhofer 衍射型连续变化, K 在某些确定的 H 下可以等于零; 而(24)式中 K 除 $H=0$ 外不能等于零,而且它随 H 在某些确定点出现跳跃. 因而近似解诱导出的振荡结论是不正确的.

虽然近似解得出了不正确的振荡结果,但比较 $Q = 2.5 \times 10^4$ 的严格结果和近似结果^[1],可以看到在 ϕ_0 内其阶梯数和振荡数是一致的.

关于这种反馈出现小于 ϕ_0 周期的阶梯的物理原因将另文讨论.

3. 实验方案

从前面的讨论我们看到,要从实验上做出这种反馈作用使一个磁通量子内出现多次电流阶梯,除了要严格地得到 Josephson 频率 $\omega = 2eV_0/\hbar$ 与腔的本征频率 ω_r 相等外,还要求腔的 Q 值足够高.

用超导体,虽然 Q 值很容易达到 $10^{2[9]}$,但稳恒场 $H(0.01-1G)$ 加不到腔中; 而金属腔的 Q 值做到 $> 10^3$ 是困难的,所以实验上不易观测到这个阶梯效应.

新的干涉效应给验证反馈场的作用可提供一个方便可行的实验方案. 从图 4 我们看到,对于 $Q = 7.07 \times 10^2$ 的腔只能有一次阶梯,显然如果 Q 值再低则观测不到阶梯,只有通常的双结干涉图形. 如果在这个腔中我们把 J_{s_1} 放置于反馈场的波峰, J_{s_2} 放于波节,则得到图 8 的退化到单结的图形. 因此实验可以用如下的程序: 将 J_{s_1} 放于腔内的 $a/4$ 处, J_{s_2} 放于 $a/2$ 处,先不加电压 V_0 ,做出通常的双结干涉图,然后再在两个结上加直流电压 V_0 ,调节 V_0 ,使 $\omega (= 2eV_0/\hbar) = 2\omega_r$,则得到 $\Delta \bar{I}_s$ 随 H 的单结 Fraunhofer 型衍射图形.

参 考 文 献

- [1] 张裕恒、陈贻华,物理学报, **31**(1982), 749.
[2] 陈贻华、张裕恒,物理学报, **31**(1982), 932.
[3] 林为干,微波理论与技术,科学出版社, (1979).
[4] R. C. Jaklevic, J. Lambe, J. E. Mercereau and A. H. Silver, *Phys. Rev.*, **140**(1965), A 1628.
[5] R. W. Meyerhoff, *J. Appl. Phys.*, **40**(1969), 2011.

THE STEP STRUCTURE EFFECT OF DC JOSEPHSON
CURRENT WITHIN ONE FLUX QUANTUM PERIOD (I)
SQUID CONSISTING OF TWO JUNCTIONS

ZHANG YU-HENG LI YU-ZHI ZHENG JIE-FEI

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

If a SQUID consisting of two junctions is placed in a cavity with sufficiently high Q -value, when the Josephson frequency of the junction $\omega = 2eV_0/\hbar$ equals to one of the eigen frequencies ω_r of the cavity, then the oscillating electromagnetic field in the form of standing wave excited by the junction current would react on the junctions and produce a series of steps of dc Josephson current within one flux quantum period ϕ_0 .

The theory also predicts that a series of new superconducting quantum interference phenomena would be produced by Josephson currents of two junctions in the feed back field. The step height of the Josephson current will be increased when both junctions are placed separately at the peak of the standing wave. The phase of the interference trace of SQUID will change by $\pi/2$ when one of the junctions is placed at the peak and the other is placed at the trough. The I - H trace of SQUID will degenerate to that of single junction when one of the junctions is placed at the peak and the other is placed at the node. The step will not occur except that with $n=0$ when both junctions are placed separately at nodes.