

托卡马克中撕裂模的抑制

汪茂泉 赵晴初

(中国科学院等离子体物理研究所)

1982年12月30日收到; 1983年10月13日收到修改稿

提 要

本文分析与计算了共振螺旋场对自发撕裂模的抑制作用。通过解电阻 MHD 方程证实了螺旋场能使 $m = 2$ 的撕裂模增长速度减慢一倍左右。同时也讨论和计算了边界控制场对撕裂模的抑制作用。

一、引 言

在托卡马克放电过程中, 电流不可避免地发生破裂。电流破裂的主要原因是因为 $m = 2$ 的撕裂模发展到一定程度的结果。不同模数的撕裂模的增长, 在各自的有理面 (即 $q = m/n$ 的磁面, m, n 分别为角向和环向模数, q 为安全因子) 形成磁岛。相邻有理面的磁岛一旦发生重叠, 电流破裂就急剧发生。所以, 为了避免和推迟破裂的发生, 就必须抑制磁岛的增长, 使相邻磁面与相应的磁岛宽度满足下面的关系:

$$r_1 - r_2 \geq w_1/2 + w_2/2, \quad (1)$$

r_1, r_2 和 w_1, w_2 分别为相邻有理面的半径和磁岛宽度。(1)式就是要求磁岛宽度必须保持在一定水平以下, 以免磁岛重叠。

理论和实验指出, 破裂的发生主要是因为 $m = 2, n = 1$ 的模与其它模, 例如 $m = 3, n = 2$ 的模, 磁岛发生重叠。因此, 只要抑制这两个模 (主要是 $m = 2$ 的模) 的发展, 就可以避免或推迟电流的破裂。

最早曾在 PULSATOR 上进行过用螺旋场抑制撕裂模的实验^[1], 在托卡马克外面的某个环面上绕以 $l = 2$ 的螺旋线圈, 该线圈产生的螺旋场的螺距与等离子体中某一磁面的磁力线螺距相同, 这种共振螺旋场 (RHF) 抑制了撕裂模的发展, 得到了使放电时间延长三倍的结果。以后, 外加螺旋场对撕裂模的抑制在实验上^[2,3]和在理论上^[2-5]都曾得到证实。外加螺旋场可以不与等离子体中磁力线的螺距共振, 这种非共振螺旋场对等离子体的磁结构提供一个旋转变换, $l(r) = l_p(r) + l_0 = 1/q(r)$, $l_p(r)$ 为欧姆加热电流的旋转变换 (即一般指等离子体的旋转变换), l_0 为非共振螺旋场提供的旋转变换。这实际上是在托卡马克磁结构上叠加一个仿星器磁结构, 构成一个托卡马克-仿星器混合结构。在流体区与电阻区分别解与扰动磁能相联系的欧拉方程, 证实了量级为 $l_0 \approx 0.1-0.23$ 的旋转变换就能有效地抑制破裂^[2]。这样的螺旋场将 $q = 2$ 的磁面移到等离子体边界之外, 而使等离子体电流分布基本保持不变, 从而阻止了 $m = 2$ 的撕裂模的激发。

在本文中,我们通过解电阻磁流体力学方程的初边值问题,求共振螺旋场对撕裂模的抑制作用,观察 RHF 对撕裂模抑制的时间过程. RHF 对电流分布的影响不大,而且,很小的场强就能起到明显的作用.

我们也考虑了边界控制场对撕裂模的抑制作用. 所谓边界控制场是指在平衡等离子体建立起来之后加螺旋场. 这时,由于等离子体是理想导体,螺旋场只能加在很薄的边界层上,其作用等于改变等离子体的边界条件,所以,我们把它叫做边界控制场(同时也为了与文献[11]的反馈场相区分).

二、螺旋场对撕裂模的抑制作用

1. 螺旋场

在等离子体之外半径为 b 的环面上绕以螺旋线(如图 1), 如果是 $l = m$ 的螺旋场, 则

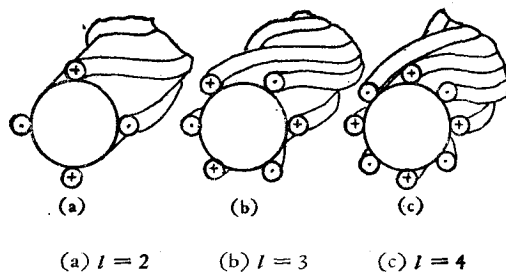


图 1 螺旋线圈

有 l 对导线,螺旋线的角向模数为 m ,相邻导线的电流大小相等方向相反. 设螺旋线的螺距为 L , $L = 2\pi Rm/n$, R 为环的大半径, n 为螺旋线的环向模数. 螺旋线在环的内部产生的磁势由下式给出^[6]:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = cr^m \sin(m\theta + n\varphi), \quad (2)$$

其中 c 是与几何结构,导线电流及 m, n 等有关的常数.

一个外加螺旋场 B_{hel} 叠加在平衡场 B_0 上,总的合成磁场为 $B = B_0 + B_{hel}$, 相应的总电流为

$$j(r, \theta, \varphi) = j_0(r) + j_{hel}(r, \theta, \varphi), \quad (3)$$

$$j_{hel}(r, \theta, \varphi) = (j_0'(r) + m\alpha^2 r j_0(r)) \phi_{hel} / \phi_0'.$$

j_{hel} 就是螺旋场引起的平衡电流畸变, 式中的 $()'$ 表示对 r 求导, $\alpha = 2\pi/L$, $\phi_0(r)$, $\phi_{hel}(r, \theta, \varphi)$ 分别表示平衡场和螺旋场的螺旋磁通.

j_{hel} 在远离有理面的地方很小,在接近有理面时 j_{hel} 的值逐渐变大. 在有理面处,由于 $\phi_0'(r) = 0$, j_{hel} 有一个奇点. 这个奇点用下面的方法可以去掉. 因为螺旋场在奇点附近形成一个小的磁岛,岛宽 $\epsilon = 4(-\phi_{hel}/\phi_0')^{1/2}$, 在岛区,电流分布可以近似写成^[7]

$$j = a + b\psi,$$

a, b 为常数,可由连接条件在岛的边缘定出. 因此,总的电流密度在岛内为 $j = a + b\psi$, 在岛外为 $j = j_0 + j_{hel}$.

2. 电阻 MHD 方程

由于我们考虑的是单模, 在螺旋坐标系中可以把三维问题变成二维, 法拉第方程写成

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V}_\perp \cdot \nabla \phi = -\eta \mathbf{j} - \eta j_{\text{hel}}. \quad (4)$$

我们取

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0(r) + \phi_{\text{hel}}(v) \cos m\theta + \phi(r, t) \cos m\theta, \\ j_z &= j_0(r) + j_{\text{hel}}(r) \cos m\theta + \mathbf{j}(r, t) \cos m\theta + \delta j_0(r), \end{aligned}$$

$\mathbf{j}(r, t)$ 为撕裂模扰动 $\phi(r, t)$ 引起的一级电流扰动, $\delta j_0(r)$ 为 ϕ_{hel} 和 $\phi(r, t)$ 引起的二级零频电流扰动. (4)式也做了这样的假定: $\eta j_0 = E_0$, E_0 为环电压. 垂直速度 $\mathbf{V}_\perp = \mathbf{V}_{0\perp} + \mathbf{V}_{1\perp}$. 在没有螺旋场时, 可以假设 $v_0 = 0$, 即将坐标架固定在等离子体上, 因而在实验室坐标系中将会看到等离子体的运动——磁岛的旋转. 当加上螺旋场时, 因螺旋场总是固定在实验室坐标系中, 这时必须仔细分析能否令 $v_0 = 0$. 如果 $v_0 \neq 0$, 撕裂模将有一个振荡频率(或磁岛旋转频率), $\omega = mv_0/r$. 但是, 螺旋场预先在有理面处形成一个小磁岛, 这个磁岛能抑制等离子体的流动. 因为这时等离子体的流动必须切割磁力线, 必然产生反电动势, 所以, 不会发生等离子体的旋转, 仍可令 $v_0 = 0$.

反磁漂移引起的旋转也不用考虑, 因为只要螺旋场产生的磁岛宽度接近或超过撕裂层的宽度, 反磁漂移就会消失^[8].

这样一来, 可令 $\mathbf{V}_\perp = \mathbf{V}_{1\perp}$, 引入标量 ϕ 定义 \mathbf{V}_\perp ,

$$\mathbf{V}_\perp = \nabla \phi \times \hat{z}, \quad \phi = \phi(r) \sin m\theta. \quad (5)$$

由(4)式可以求出二级电流畸变 δj_0 ,

$$\delta j_0 = \frac{m}{r} \frac{1}{2\eta} (\tilde{\psi} + \phi_{\text{hel}}) \frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (6)$$

另一个要解的方程——动量方程变成

$$\frac{dU}{dt} = -s^2 \mathbf{B} \cdot \nabla j_z, \quad (7)$$

其中 $U = \nabla_\perp^2 \phi$, $S = \tau_r/\tau_a$, τ_r, τ_a 分别为电阻和阿尔芬特征时间,

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\perp \cdot \nabla, \quad \mathbf{B} = \nabla \phi \times \hat{z} - \frac{k_r}{m} \hat{\theta} + \hat{z}.$$

$k = n/R$, R 为大半径. \hat{z} 为 z 方向的单位向量. 所有的量都按下面的方式无量纲化: $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}/B_0$, $\phi \rightarrow \phi/(B_0 \cdot a)$, $j \rightarrow j/(B_0/\mu a)$, $\eta \rightarrow \eta/\bar{\eta}$, $t \rightarrow t/\tau_r$, 增长率 $\gamma \rightarrow \gamma\tau_r$ 等等. 其中 $B_0 = |\mathbf{B}_0|$ 为纵场, a 为等离子体小截面的特征长度, $\bar{\eta}$ 为平均电阻或某一特征电阻.

3. 螺旋场对撕裂模的抑制作用

一个 $l = m = 2$ 的螺旋场在放电开始就加在等离子体系统上, 它与原平衡场在 $q = 2$ 的有理磁面附近发生磁力线的交联, 形成一个小磁岛, 其岛宽由调整螺旋线中的电流强度来控制. 当等离子体本身产生自发的撕裂模扰动时, 系统的磁能可以写成^[9]

$$W = W_{\infty} + W_1$$

其中,

$$W_{\infty} = \int_0^a dr \left[F^2 H \left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 + g \xi^2 \right]$$

为理想等离子体的磁能积分,是恒正的. W_1 为下面的积分:

$$W_1 = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{H}{F} \frac{dF}{dr} \right) \Big|_{r_s - \epsilon/2}^{r_s + \epsilon/2} \cdot (\tilde{\psi}(r_s) + \psi_{hel}(r_s))^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} F &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}, \quad H = r^3 / (k^2 r^2 + m^2), \quad \xi = (\tilde{\psi} + \psi_{hel}) / F, \\ g &= (m^2 - 1) \cdot r \cdot F^2 / (k^2 r^2 + m^2) + k^2 r^2 \left[2 \frac{dp}{dr} + r F^2 \right. \\ &\quad \left. + 2F(kr - mB_{\theta}) / (k^2 r^2 + m^2) \right] / (k^2 r^2 + m^2). \end{aligned}$$

由(8)式可以看出,当螺旋场与自发撕裂模扰动场反相时,由于 $\tilde{\psi}$ 与 ψ_{hel} 相抵消,所以,扰动势能增大,因而, ψ_{hel} 有增稳作用. 当螺旋场与扰动场同相时,螺旋场扰动产生的电流畸变 δj_{θ} , 在自发撕裂刚激发时就显示出它的作用,产生阻止等离子体在撕裂层进行涡旋流动的转矩^[10]. 所以,螺旋场对撕裂模有很好的抑制作用.

螺旋场对输运过程和温度分布的影响不大,因为它只在很窄的撕裂层起较明显的作用.

螺旋场引起的电流畸变 j_{hel} 使电流在有理面附近形成一个近似的平台(见图2),在一种模式的有理面附近将电流分布拉平,会不会使其它模式的有理面附近电流分布变陡而使该模式变得不稳定呢? 看来是不会的. 因为电流只在很窄的撕裂层附近被拉平,其它地方电流分布基本不变 (j_{hel} 很小),因而不必担心引起其它模式不稳.

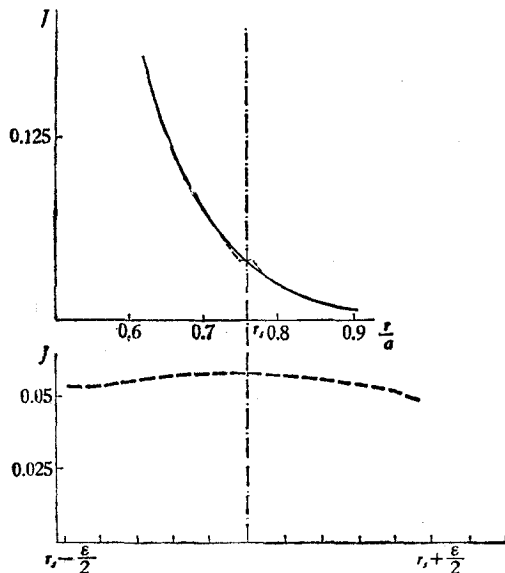


图2 加螺旋场后平衡电流在有理面附近的分布
虚线表示经螺旋场修正后的电流.

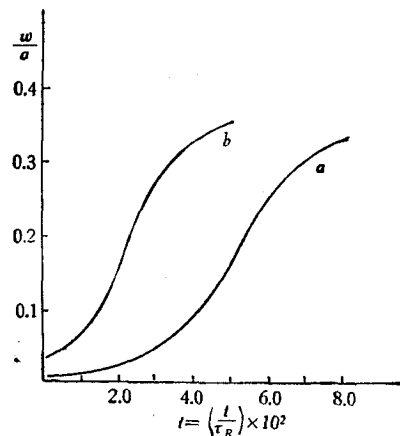


图3

a 为加螺旋场; b 为不加螺旋场

三、数值结果

将(4)式和(7)式变成差分方程,解初边值问题. 平衡磁面由下式给出:

$$q(r) = q(0)[1 + (r/r_0)^{2p}]^{1/p}. \quad (9)$$

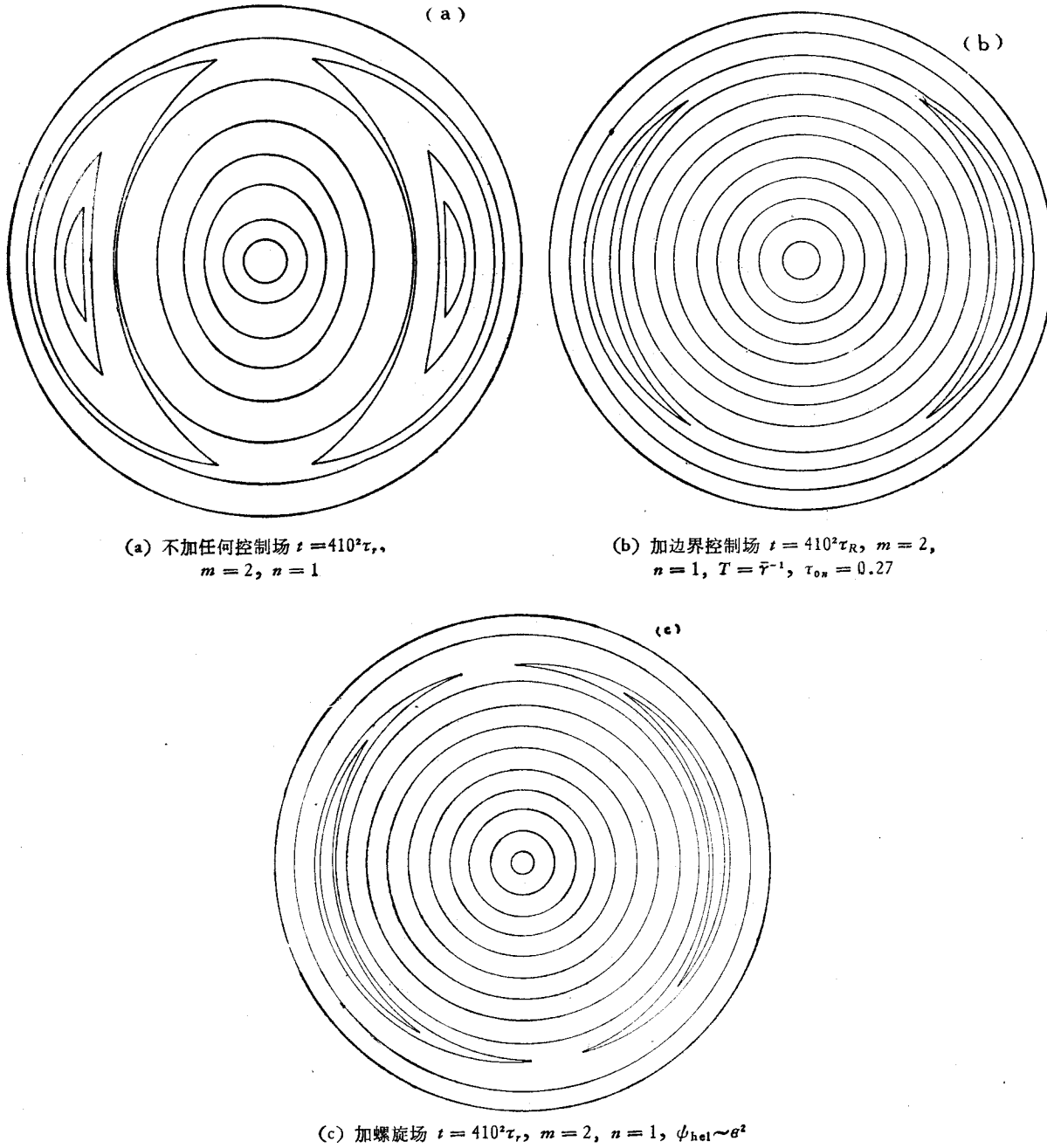


图 4

我们取 $p = 4$, r_0 (电流通道宽度) 取 $0.6a$, 并取磁轴上的安全因子 $q(0) = 1.2$.

计算结果表明, 加螺旋场使撕裂模的增长明显变慢. 图 3 绘出加螺旋场与不加螺旋场时磁岛宽度随时间变化的比较; 图 4 绘出磁面形态的比较. 磁岛达到最大宽度 (约 $0.35a$) 的时间, 由于加了螺旋场而推迟一倍左右. 螺旋场的作用明显地使撕裂模的发展变缓.

加螺旋场只能使撕裂模的发展变缓, 并不能完全抑制住撕裂模. 图 5 绘出增长率随

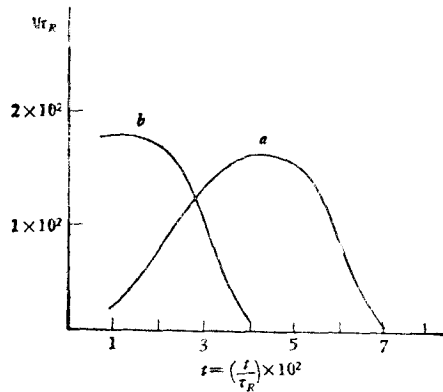


图 5
a 为加螺旋场; b 为不加螺旋场

时间变化的比较. 不加螺旋场, 增长率一开始就很大, 在相当长的时间稳定在 $\gamma r_0 \sim 170$, 当磁岛达到最大宽度 $\sim 0.35a$ 时, 增长基本停顿, γr_0 下降到接近于零. 加上螺旋场, 在开始相当长的一段时间内, 增长率一直很小, 然后上升, 在较长的时间内稳定在 $\gamma r_0 \sim 160$ 左右, 然后下降到接近于零. 加螺旋场的作用好像是将整个过程中在时间轴上往后平移.

螺旋场的大小由螺旋线圈中的电流来调整. 螺旋场过小, 效果不明显; 过大则产生相反的效果. 最合适的是螺旋场磁岛宽度与撕裂层的宽度相近.

四、边界控制场

曾有人提出用反馈场改变等离子体的边条件来抑制撕裂模的发展^[11]. 反馈场能抑制撕裂模的条件是反馈场与撕裂模扰动场在等离子体边界处锁相(保持固定的位相差). 事

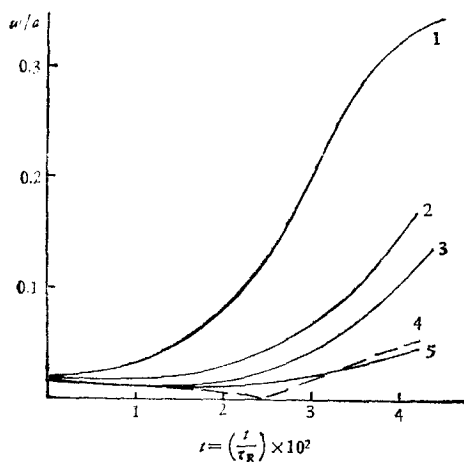


图 6 磁岛宽度随时间的增长 1 为不加控制场;
2, 3, 4, 5 为加边界控制场, 分别对应于
 $r_{00} = 0.3T, 0.2T, 1.38T, 0.1T$

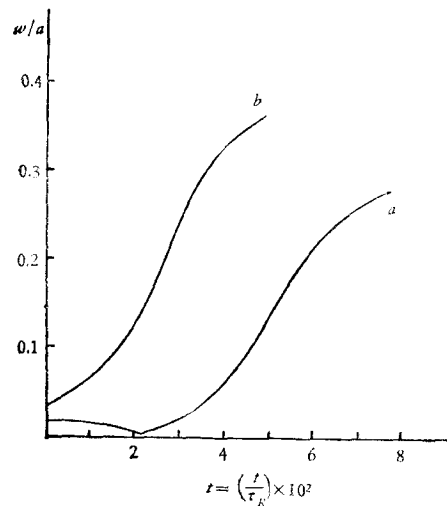


图 7 磁岛宽度随时间增长
a 为加螺旋场和边界控制场;
b 为不加任何螺旋场

实上由于磁岛的旋转, 实现这一条件是困难的. 假定锁相条件满足, 我们计算了边界周期螺旋场对撕裂模的抑制作用. 结果表明, 这种边界控制场能有效地抑制撕裂模的发展(见图 6).

我们也计算了螺旋场和边界控制场联合使用的情况. 假设在平衡场上先加上一个螺旋场, 抑制住等离子体的旋转, 则后加的边界控制场与撕裂模的场能实现边界锁相, 并且位相差 π , 结果表明这种方法也能起到良好的效果(见图 7).

边界控制场的开断周期 $T = (\bar{\gamma})^{-1}$, $\bar{\gamma}$ 为平均增长率, 而电路的特性常数 τ_{on}, τ_{off} (即电流上升和断开的迟豫时间, 我们计算中取 $\tau_{on} = \tau_{off}$) 以小于 $0.25T$ 为宜(见图 6). 边界控制场的调节范围较大, 不像共振螺旋场那么严格.

五、结 论

托卡马克中的撕裂模可用共振螺旋场来抑制. 共振螺旋场基本上不改变等离子体原来的电流分布, 只在共振面附近引起显著的电流畸变, 这种电流畸变有助于延缓撕裂模的发展. 共振螺旋场的大小以其磁岛宽度接近或稍大于撕裂层的宽度为宜. 边界控制场必须与撕裂模在边界处锁相才能起到良好的抑制撕裂模的作用. 共振螺旋场和边界控制场联合使用也能取得良好的效果.

本工作在进行过程中曾和霍裕平教授进行过多次有益的讨论, 陈桂芳同志帮助制图, 在此一并致谢.

参 考 文 献

- [1] F. Karger *et al.*, in *proc. 5th Int. Conf.*, **1**, 207 (1974).
- [2] D. V. Bartlett *et al.* and the W VIIA TEAM, *Nucl. Fusion*, **20** (1980), 1093.
- [3] J. Fujita *et al.*, in *Plasma Phys. and Control. Nucl. Fusion Research IAEA-CN-38/H-3-2* (International Atomic Energy Agency Vienna (1980)).
- [4] H. R. Hiekes *et al.*, in *Plasma Phys. and Control. Nucl. Fusion Research, IAEA-CN-38/J-3* (International Atomic Energy Agency Vienna (1980)).
- [5] K. Ohasa *et al.*, *J. Phys. Soc. Japan*, **48**(1980), 1731.
- [6] A. I. Morozov, I. S. Solov'ev, *Rev. of Plasma Phys.* Vol 2, p. 1.
- [7] R. B. White *et al.*, *Phys. Fluids*, **20**(1977), 809.
- [8] D. Biskamp, *Nucl. Fusion*, **19**(1979), 777.
- [9] H. P. Furth, *Phys. Fluids*, **16**(1973), 107.
- [10] P. H. Rutherford, *Phys. Fluids*, **16**(1973), 1903.
- [11] J. A. Holmes *et al.*, *Nucl. Fusion*, **19**(1979), 1333.

THE RESTRAINT OF THE TEARING MODES IN TOKAMAK

WANG MAO-QUAN ZHAO QIN-ZHU

(Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hefei)

ABSTRACT

In this article, the restraint of the spontaneous tearing modes caused by RHF is analyzed and calculated by solving the resistive MHD equations. We prove that the growth rate of the tearing modes of $m=2$ can be reduced about two times by the helical fields. The restraint of the tearing modes by the boundary controlled field is also discussed and calculated numerically.