

强迫布鲁塞尔振子中从准周期运动到混沌态的过渡

王光瑞 郝柏林

(北京 8009 信箱) (中国科学院理论物理研究所)

1983年11月23日收到

提 要

我们在周期外力作用下的布鲁塞尔振子中发现了从准周期行为到混沌态的过渡。这样，强迫布鲁塞尔振子成为数值实验中第一个同时看到各种通向混沌的道路并存的模型，而这是与某些流体力学实验一致的。原来光滑的周期采样图在局部起皱折迭，同时准周期的功率谱中出现越来越多的噪声背景，这种过渡方式与人们在圆周映象中讨论的准周期轨道全局失去光滑性成为对比，可能在非线性微分方程所描述的系统更具有代表性。

近几年来，人们试图把动力系统混沌转变与湍流的发生机制联系起来，建议了各种走向混沌的“道路”(routes 或 scenarios)。四十年代 Landau 和 Hopf 曾提出，准周期运动中出现愈来愈多的不可比的频率(即任何两个频率之比都不是有理数)，最终导致湍流。这条道路忽略了一个重要的物理现象，即非线性系统中互相靠近的频率极易锁住，不容出现新的独立频率。Ruelle, Takens 等人后来指出，具有三个^[1]或两个^[2]不可比频率的准周期运动，可以失稳而形成奇异吸引子。此后人们又提出了倍周期分岔^[3]、阵发混沌^[4]等等不同的道路。有些实验工作者还建议了“周期和混沌交替”道路^[5]。总之，我们目前面临着“条条道路通混沌”的局面(参看文献[6,7])。

对这些道路的理论认识水平不一。倍周期分岔和阵发混沌是孪生现象，由同一个重正化群方程描述，只是边界条件不同。它们也是在一维映象和常微分方程的数值实验中

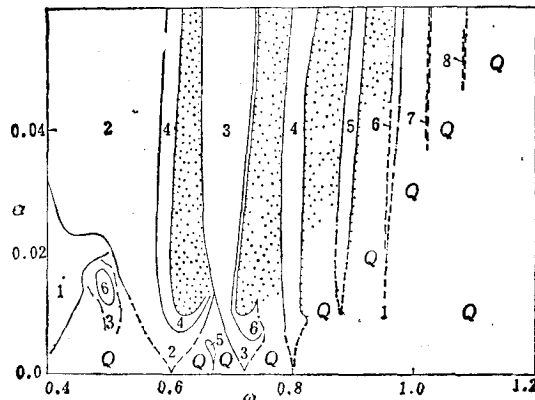


图 1 α - ω 相图

($A = 0.48 - 0.2\omega$, $B = 1.2$, $\alpha = 0.05$)

最常见的现象。Ruelle-Takens 道路虽然提出较早,但认识较浅。它不能出现于一维映象中。最近在圆周的自映象中对它作了重正化群分析^[8],但它在微分方程中如何发生,则仍不甚清楚。至于所谓“周期与混沌交替”,目前更无理论解释。此外,迄今还没有见到这些不同道路并存的数学模型。例如,研究了二十年的 Lorenz 模型^[9],就未见报道从准周期到混沌的过渡方式。

在我们对强迫布鲁塞尔振子进行细致研究的过程中,已经积累了大量数据,对于参数空间中的分岔和混沌“谱”有了比较整体的认识。我们已经观察到倍周期分岔^[10]和阵发混沌^[11]道路,发现了嵌在混沌带中的周期轨道的 U 序列^[12]。这里不再重述模型本身以及所用的数值方法,只须指出这个系统具有四维参数空间 (A, B, α, ω) , 其中 A, B 是从外界控制的某些化学组份的浓度;当 $\alpha = 0$ 时,化学反应动力学方程在

$$B > A^2 + 1 \quad (1)$$

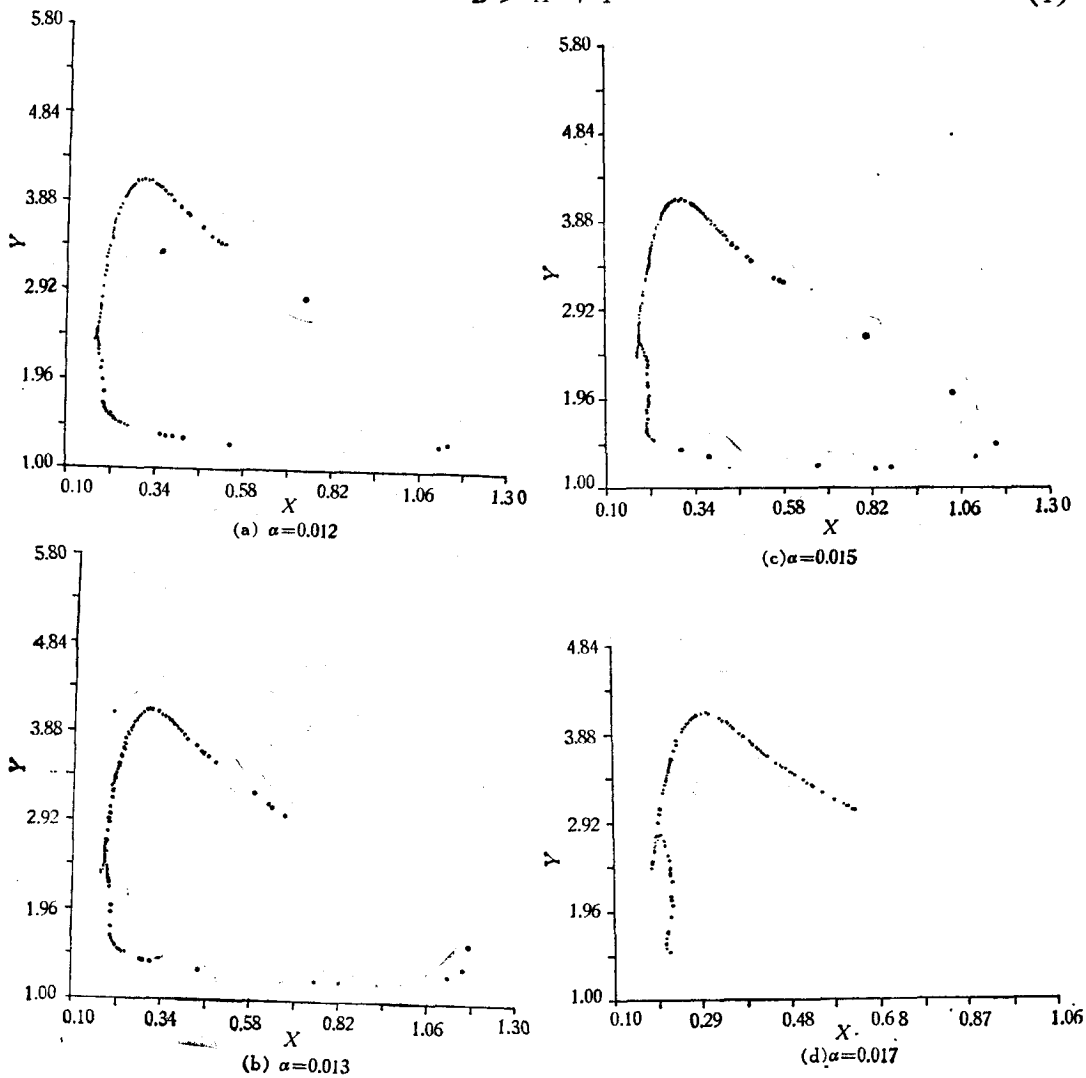


图2 沿图1中 $\omega = 0.85$ 直线的 Poincaré 映象

条件下有一个稳定的极限环, 即成为一个化学振子. 如果把一个频率为 ω 的线性振子以强度 α 耦合到这个化学振子上, 就得到我们所研究的周期强迫的布鲁塞尔振子.

与圆周映象^[8,13,14]

$$\theta_{n+1} = \theta_n + Q - \frac{\mu}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) \pmod{1} \quad (2)$$

对比, 可见我们的 α - ω 截面更接近 (2) 式的参数平面 (μ, Q) . 但过去研究过的 α - ω 截面 ($A = 0.4, B = 1.2$) 中, 混沌区和准周期区完全被周期运动隔开^[10,12]. 另一方面, 我们曾仔细研究了扩大的 A - ω 截面 ($B = 1.2, \alpha = 0.05$, 即文献 [12] 中图 1), 看到原来的 α - ω 截面只擦过混沌区的“外皮”, 而与混沌区相间出现的 RL^n 型的倍周期带并不延伸到 n 很大处, 就淹没在大片准周期区中. 这正是预期应发现从准周期到混沌过渡的地方. 图 1 是与上述 A - ω 截面垂直, 沿其中 $A = 0.48 - 0.2\omega$ 斜线的 α - ω 截面. 它确实与圆周映象的 (μ, Q) 平面有相似之处 (见文献 [13] 中图 78 或文献 [14] 中图 2), 但左半部弯曲的倍周期带把混沌区与准周期完全隔离. 这是圆周映象中未见过的. 然而, 在图 1 右半, 混沌区则直接通向准周期的“海洋”. 在这里逆流而上, 必定遇到从准周期往混沌的过渡. 我们选择了 $\omega = 0.85$ 的垂线, 作以周期 $T = 2\pi/\omega$ 为间隔的采样图 (这是一种 Poincaré 映象). 图 2 是四张采样图, 每张图中有 256 个采样点. 如果采样点再多几倍, 图 2 (a) 会成为封闭曲线, 它很接近自由布鲁塞尔振子的极限环, 只是在右侧有一处不易察觉的折迭. 这个折迭处在 α 增加时迅速发展起来.

为了判别混沌运动, 应进行傅氏分析. 图 3 给出了沿同一条 $\omega = 0.85$ 垂线的功率谱, 它们都是 $Y(t)$ 的快速傅氏变换结果. 图 3 (a) 对应自由布鲁塞尔振子, 图中可见基频 ω_{FB} 及其倍频. 图 (b)–(f) 中用箭头指出了线性振子的频率 $\omega = 0.85$. 图 3 (b) 很接近

$$\omega_{FB} = \frac{3}{14} \omega \quad (3)$$

的锁频制, 相应 Poincaré 映象与自由振子的差别更是无从觉察, 因而没有给出. 随着 α 增大, 准周期的功率谱逐步过渡到有宽噪声带的混沌谱. 但图 3 (f) 不同于倍周期分岔所导致的混沌谱^[10].

圆周映象中从准周期到混沌的过渡方式, 是准周期轨道各处同时失去光滑性^[8]. 看来, 这是要有附加的对称性质的特殊情况. 上面描述的转变表现为 Poincaré 映象先在某些局部失去光滑性, 这在微分方程中应更具有代表性. 最近在其它方程组中也报道了类似的情形^[16], 但他们未作功率谱分析.

顺便指出, 我们的工作同时表明, 自由振子的条件 (1) 对于小耦合常数 α 是不稳定的. 只要 $\alpha \neq 0$, 即使 (1) 式不成立, 非线性方程也可能有周期行为.

至此, 沿强迫布鲁塞尔振子参数空间的不同截面和方向, 已经观察到了通向混沌的各种不同道路 (包括文献 [12] 中对“周期和混沌交替”的一种解释). 据我们所知, 这是非线性微分方程描述的模型中, 各种通向混沌的道路并存的第一个实例. 在某些流体力学不稳定性的实验中, 往往在同一套装置上稍稍改变条件, 就观察到不同的走向湍流的道路.

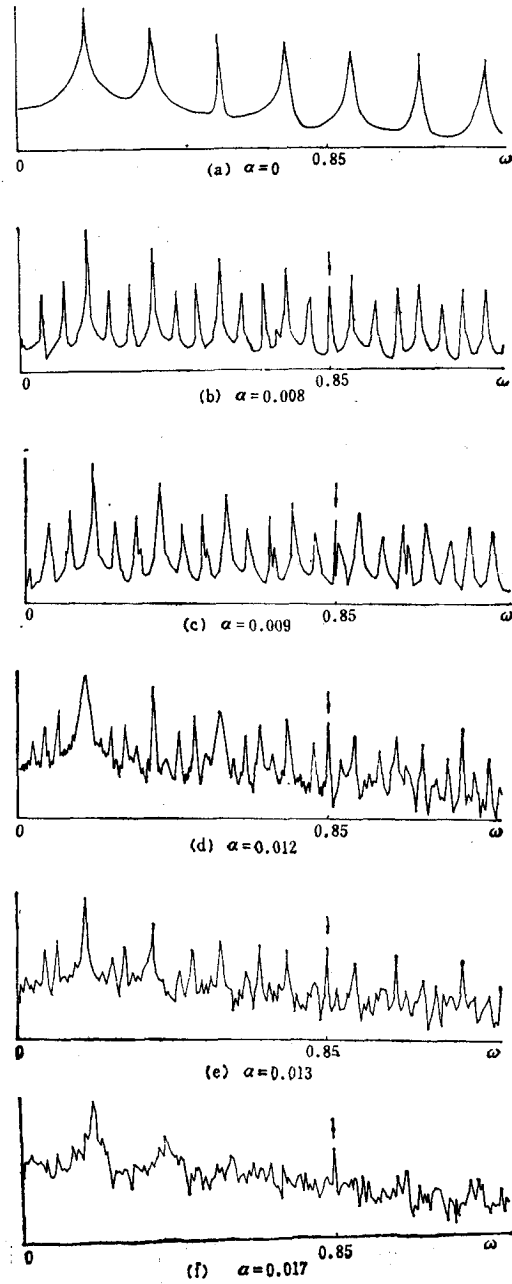


图3 沿图1中 $\omega = 0.85$ 直线的功率谱 (纵轴是功率谱对数的任意相对坐标)

我们的模型研究和这些流体力学实验一致,说明湍流的发生机制是多方面的,一条“道路”可能只反映了一个侧面。

参 考 文 献

- [1] D. Ruelle, F. Takens, *Commun. Math. Phys.*, **20** (1971), 267.
 [2] S. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens, *Commun. Math. Phys.*, **64** (1978), 35.
 [3] M. J. Feigenbaum, *Phys. Lett. A*, **74** (1979), 375; *Commun. Math. Phys.*, **77** (1980), 65.
 [4] Y. Pomeau, P. Manneville, *Commun. Math. Phys.*, **74** (1980), 189.
 [5] J. S. Turner, J. C. Roux, W D. McCormick, H. L. Swinney, *Phys. Lett. A*, **85** (1981), 9.
 [6] J.-P. Eckmann, *Rev. Mod. Phys.*, **53** (1981), 643.
 [7] 郝柏林, 物理学进展, **3**(1983), 329.
 [8] M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff, S. J. Shenker, *Physica. D*, **5** (1982), 370.
 [9] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963), 130; C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer, (1982).
 [10] 郝柏林、张淑誉, *J. Stat. Phys.*, **28** (1982), 769; 物理学报, **32** (1983), 198.
 [11] 王光瑞、陈式刚、郝柏林, 物理学报, **32**(1983), 1139.
 [12] HAO Bai-lin, WANG Guang-rui, ZHANG Shu-yu, *Commun. Theor. Phys.*, **2** (1983), 1075; 物理学报,
 [13] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, (1978).
 [14] L. Glass, R. Perez, *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982), 1772.
 [15] K. Tomita, T. Kai, *J. Stat. Phys.*, **21** (1979), 65.
 [16] G. Rieula, *Phys. Lett.A*, **91** (1982), 203; I. Schreiber, M. Marek, *ibid*, 263.

TRANSITION FROM QUASIPERIODIC REGIME TO CHAOS IN THE FORCED BRUSSELATOR

WANG GUANG-RUI

(P. O, Box 8009, Beijing, China)

HAO BAI-LIN

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

We have observed transitions from quasiperiodic regime to chaos in the periodically forced Brusselator. It takes place via kinking and folding of the originally smooth Poincaré map which may be more generic as compared to the transition in circle mapping, where the quasiperiodic orbit loses smoothness globally. Now all the well-known "routes" to chaos have been shown to coexist in this mathematical model in different part of the parameter space. This is in agreement with experimental observations in some hydrodynamical systems where different routes to turbulence have been found in one and the same system under slightly different conditions.