

# 含二次非线性项受迫振动系统中的 分岔与混沌现象\*

倪 皖 菽 魏 荣 爵

(南京大学物理系及声学研究所)

1984年3月16日收到

## 提 要

用数值积分及二维叠代对含二次非线性项受迫振动系统  $\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x - \alpha x^2 = \mu \cos \omega t$  中的分岔与混沌现象进行了研究. 控制参数  $\mu$  的一系列临界值与  $\alpha$  成反比.

## 一、引 言

非线性系统中分岔与混沌现象的研究已有大量的理论和实验工作<sup>[1-3]</sup>. 在力学、电学、声学及其它领域中大量存在振动现象, 当振幅较大时必须考虑非线性恢复力的影响. 本文讨论外周期力作用下含二次非线性项恢复力(即只保留势能展开式至三次方项)的振动系统, 取平衡位置为零, 则有下列常微分方程:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x - \alpha x^2 = \mu \cos \omega t. \quad (1)$$

(1) 式左端第二项与阻尼有关.  $\omega_0$  是当平方项恢复力可忽略时系统的固有频率,  $\omega$  为外周期力频率,  $\mu$  为单位质量所受外力的振幅,  $\alpha$  为平方项非线性恢复力的系数, 它可正可负. 与系统恢复力有关的(1)式左端第三、四两项相当于如下的单位质量的势能:

$$V(x) = V_0 + \frac{\omega_0^2}{2} x^2 - \frac{\alpha}{3} x^3, \quad (2)$$

其极小点位于  $x = 0$  处, 极大点在  $x = \omega_0^2/\alpha$  处. 若取  $V(\omega_0^2/\alpha) = 0$ , 则  $V_0 = -\omega_0^6/6\alpha^2$ , 这时势能(2)式的示意图画在图(a)中.

势能具有(2)式形状的例子如材料力学中当应力与应变偏离虎克定律而必须考虑弹性势能展开式中三次方项的 Murnaghan 定律<sup>[4]</sup>和声在媒质中传播由于振幅较大需要考虑势能展开式中三次方项(即所谓三声子相互作用项)<sup>[5]</sup>情形. 图1(a)中  $x > \omega_0^2/\alpha$  时  $V(x)$  随  $x$  增大而减小, 既可以把它理解为材料在应力作用下的破坏区域, 也有可能是由于振幅较大这里三次方项近似已经不够, 需要考虑四次方项或更高次项. 我们将局限于三次方项近似并且只讨论具有这类非线性势能的受迫振子.

作为导出方程(1)的物理实例我们举 Minorsky<sup>[6]</sup> 讨论过的受弹簧约束带电导线运动的例子(图2), 它受到和它平行的另一根固定的无限长直通电导体引起的磁场力的作用,

\* 中国科学院科学基金资助的课题.

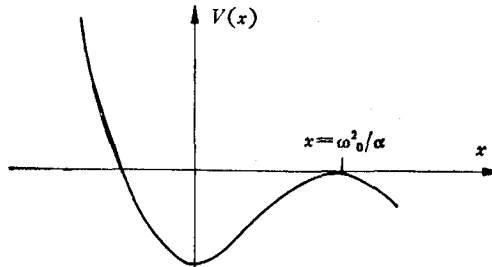
其运动方程为

$$m\ddot{x} + qx - \frac{\lambda}{a-x} = 0,$$

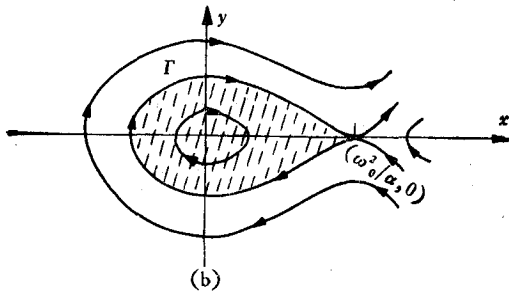
其中  $\lambda = 2Iil \times 10^{-7}$ ,  $q$  为弹性常数,若再加上方向垂直图面的均匀交变磁场,并考虑阻尼力  $-\gamma\dot{x}$  的影响,当  $a \gg x$  可将  $\lambda/(a-x)$  展开并只保留二次方项,即有

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + qx - \frac{\lambda}{a} \left( 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right) = f \cos \omega t.$$

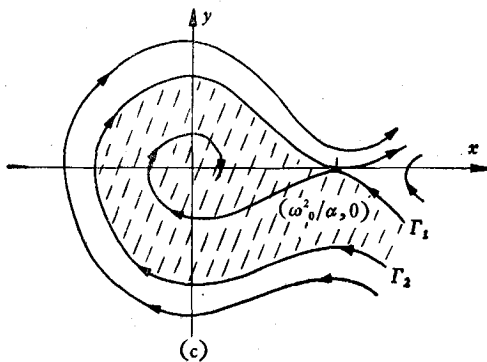
若  $qa^2/\lambda > 3$  或  $< -1$ , 经过适当坐标平移上式即可化成(1)式.



(a)  $V(x) = -\frac{\omega_0^2}{6\alpha^2} + \frac{\omega_0^2}{2}x^2 - \frac{\alpha}{3}x^3$  示意图



(b)  $\mu = 0, k = 0$  时系统在相平面上示意图



(c)  $\mu = 0, k \neq 0$  时系统在相平面上示意图

图1 图中阴影线区域为系统稳定性区域

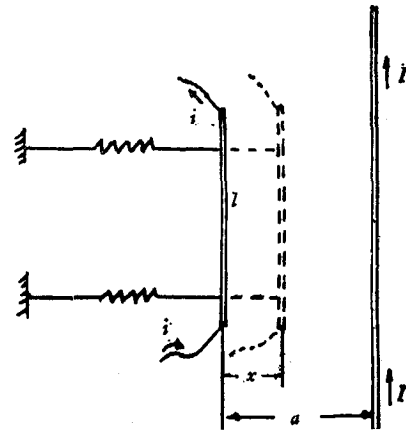


图2 在磁场中受弹簧约束的带电导线

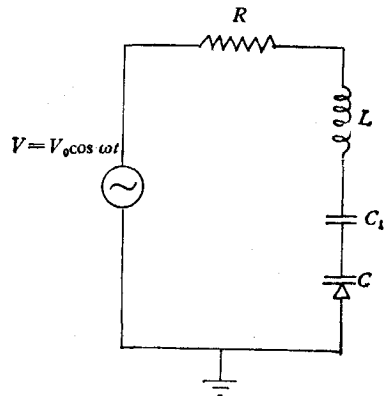


图3 有非线性电容的RCL串联电路

另一个实例是图3中的非线性电路,其中非线性电容  $C$  和  $V_c$  有关,即

$$C = C_0 / \left( 1 + \frac{V_c}{\varphi} \right)^r,$$

它和文献[7]的不同处只是和非线性电容  $C$  一起又串联了一个小电容  $C_1$ , 并且  $C_1 \ll C_0$ ,

适当调节  $C_1/C_0$  以保证  $V_c/\varphi \ll 1$ , 于是

$$\frac{Q}{C_0} = \frac{V_c}{\left(1 + \frac{V_c}{\varphi}\right)^\gamma} \approx V_c - \gamma \frac{V_c^2}{\varphi}$$

或

$$V_c \approx \frac{Q}{C_0} + \gamma \frac{Q^2}{\varphi C_0^2},$$

利用  $VL\dot{I} + RI + V_{c1} + V_c = V_0 \cos \omega t$  可见图 3 的非线性电路满足下列微分方程:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right) + \frac{\gamma}{C_0^2\varphi} Q^2 = V_0 \cos \omega t.$$

若令  $Q' = -Q$  它显然具有方程 (1) 的形式. 我们相信能导致方程 (1) 的实例是很多的. 本文将讨论方程 (1) 描述的系统中出现分岔与混沌的可能性.

方程 (1) 可改写成下面的一阶常微分方程组:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -ky - \omega_0^2 x + \alpha x^2 + \mu \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

当外周期力不存在时, (3) 式变成自治系统,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -ky - \omega_0^2 x + \alpha x^2. \end{aligned} \quad (4)$$

$k = 0$  时由通常的常微分方程稳定性理论可知<sup>[8]</sup>, (4) 式有两个固定点: 即中心点  $(0, 0)$  和鞍点  $(\omega_0^2/\alpha, 0)$ . 其相空间中示意图如图 1(b) 所示, 中心点相应于势能极小点, 鞍点势能极大, 在中心  $(0, 0)$  周围, 曲线  $\Gamma$

$$\Gamma: H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 - \frac{\alpha}{3} x^3 = \frac{\omega_0^6}{6\alpha^2} \quad (5)$$

所包的区域以内系统是稳定的. 对于  $0 < H(x, y) < \omega_0^6/6\alpha^2$  时  $H(x, y)$  的每一个值描述围绕  $(0, 0)$  的一条周期轨道. 原点处  $H(x, y) = 0$ , 曲线  $\Gamma$  所包的区域以外解是发散的.

$k \neq 0$  时 (4) 式是耗散的自治系统,  $(0, 0)$  为稳定焦点,  $(\omega_0^2/\alpha, 0)$  仍是鞍点, 其相空间示意图如图 1(c) 所示. 从能量的观点看由初条件决定的系统的初能量如果不大, 不足以克服耗散而越过势垒, 由于耗散作用能量将不断减小, 最后将停止在原点. 若初能量充分大, 耗散作用不足以阻止系统越过势垒, 将给出发散解, 因此在图 1(c) 中仅在通过鞍点的两条分界线 (separatrix)  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  所包的阴影线区域内系统才渐近地趋于原点.

$\mu \cos \omega t$  项存在时方程 (3) 可改写成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -ky - \omega_0^2 x + \alpha x^2 + \mu \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \quad (6)$$

它是  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  上的自治常微分方程组, 由于  $\dot{\theta} = \omega$ , (6) 式无固定点.  $\mu = 0$  时  $(x, y)$  平面上每一点对于  $\theta \in [0, 2\pi)$  都是相同的, 特别是在两固定点处有双曲圆轨道. 当  $\mu \neq 0$  但很小时, (6) 式可看成对 (4) 式的周期微扰, 由不变流形定理<sup>[9]</sup>, 系统失去原有的圆轨道但仍保持其定性特征, 即在  $(0, 0)$  附近仍可以有稳定的吸引轨道, 而在  $(\omega_0^2/\alpha, 0)$  附近则有鞍形双曲轨道. 但当  $\mu$  充分大时这些讨论未必仍然有效. 我们的计算 (直接积分和二维近

似叠代研究)表明,如适当选取其它参数,则 $\mu$ 小时将给出周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解,随 $\mu$ 增大,如不过早出现发散将出现一系列倍周期分岔,随后进入混沌状态,然后出现混沌带的倒分岔,最后又回到周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解, $\mu$ 充分大时则导致发散.发散出现的迟早与参数 $k' = k/\omega_0$ ,  $\Omega = \omega/\omega_0$ 及初值 $(x_0, y_0)$ 的选择有关.发散既可能来自势能的近似展开,也可能来自问题提出本身.我们所感兴趣的只是给出有限解的区域.

## 二、无量纲化及差分方程的推导

为了减少讨论时所需的参数,应使(1)式无量纲化.引入变换 $\tau = \omega_0 t$ ,方程(1)变为

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + k' \frac{dx}{d\tau} + x - \alpha' x^2 = \frac{\mu}{\omega_0^2} \cos \Omega \tau.$$

这里 $k' = k/\omega_0$ ,  $\alpha' = \alpha/\omega_0^2$ ,  $\Omega = \omega/\omega_0$ ,再令 $x' = \alpha' x = (\alpha/\omega_0^2)x$ ,得

$$\frac{d^2 x'}{d\tau^2} + k' \frac{dx'}{d\tau} + x' - x'^2 = \mu' \cos \Omega \tau. \quad (7)$$

这里 $\mu' = \alpha' \mu/\omega_0^2 = \alpha \mu/\omega_0^4$ ,决定(7)式解的性质的实际上只有三个无量纲参数 $k'$ ,  $\Omega$ 及 $\mu'$ .我们只需讨论(7)式解的性质而不影响结果的普遍性.

无量纲化的一个重要结果是,对于 $\alpha$ 取不同值的系统由于其分岔及混沌的主要特征特别是相应分岔的临界值仅由乘积 $\alpha \mu$ 决定(即由 $\mu' = \alpha \mu/\omega_0^4$ 决定), $\alpha$ 愈大的系统相应分岔所需参数 $\mu$ 的临界值愈小,即控制参数 $\mu$ 的临界值与 $\alpha$ 成反比.这在叠代计算中得到完全证实(表2).当然由于 $x = x'/\alpha'$ , $\alpha'$ 愈大的系统其解 $x$ 的值将与 $\alpha'$ 成反比而减小.

类似结论在含有更高次非线性项的 Duffing 方程中也存在.例如对方程

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^n = \mu \cos \omega t$$

引入 $\tau = \omega_0 t$ ,  $x' = (\alpha/\omega_0^2)^{\frac{1}{n-1}} x$ ,上述方程变成

$$\frac{d^2 x'}{d\tau^2} + k' \frac{dx'}{d\tau} + x' + x'^n = \frac{\alpha^{\frac{1}{n-1}} \mu}{\omega_0^{\frac{2n}{n-1}}} \cos \Omega \tau,$$

即解的特征仅与乘积 $\alpha^{\frac{1}{n-1}} \mu$ 有关,特别是 $n = 3$ 时,参数的分岔临界值仅与 $\alpha^{\frac{1}{2}} \mu$ 有关.

由(7)式令 $y' = \frac{dx'}{d\tau}$ ,则有

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= y', \\ \dot{y}' &= -k'y' - x' + x'^2 + \mu' \cos \Omega \tau. \end{aligned} \quad (8)$$

这里已略去 $x', y'$ 的上标“'”,并且 $x, y$ 上的点表示对 $\tau$ 求导数.上式在 $(0, 0)$ 附近线性化后其算子的本征值为

$$\lambda_{\pm} = -\frac{k'}{2} \pm i\omega_1.$$

这里 $\omega_1 = \sqrt{1 - (k'^2/4)}$ ,类似文献[10],引入变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix},$$

则(8)式化成

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \lambda_+ u - \frac{i}{2\omega_1} [(u+v)^2 + \mu' \cos \Omega \tau], \\ \dot{v} &= \lambda_- v + \frac{i}{2\omega_1} [(u+v)^2 + \mu' \cos \Omega \tau]. \end{aligned}$$

取初条件  $\tau = \tau_0 = 0$  (初位相  $\theta_0 \equiv \Omega \tau_0 = 0$ ) 时,  $u = u_0, v = v_0$ , 上式可化成积分方程

$$\begin{aligned} u(T) &= u_0 e^{\lambda_+ T} - \frac{i}{2\omega_1} \int_0^T e^{\lambda_+(T-\tau)} [(u+v)^2 + \mu' \cos \Omega \tau] d\tau, \\ v(T) &= v_0 e^{\lambda_- T} + \frac{i}{2\omega_1} \int_0^T e^{\lambda_-(T-\tau)} [(u+v)^2 + \mu' \cos \Omega \tau] d\tau. \end{aligned}$$

这里已由 0 到  $T = 2\pi/\Omega$  积分, 令

$$r = e^{\lambda_+ T}, \quad S = e^{\lambda_- T}.$$

上式可化成差分方程

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= r u_n - i \frac{\mu'}{2\omega_1} \frac{\lambda_+(r-1)}{(\lambda_+^2 + \Omega^2)} - i \frac{r}{2\omega_1} g_+(u_n, v_n), \\ v_{n+1} &= S v_n + i \frac{\mu'}{2\omega_1} \frac{\lambda_-(S-1)}{(\lambda_-^2 + \Omega^2)} + i \frac{S}{2\omega_1} g_-(u_n, v_n), \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $g_{\pm}(u_n, v_n) = \int_0^T e^{-\lambda_{\pm} \tau} (u+v)^2 d\tau$ .

(9)式是  $\tau = (n+1)T$  时  $u, v$  的值  $u_{n+1}, v_{n+1}$  与  $\tau = nT$  时  $u_n, v_n$  间的差分方程, 是 Poincaré 映象. 由于  $g_{\pm}$  不能准确积分, 我们取近似 Poincaré 映象, 令

$$g_{\pm} \approx (1 - e^{-\lambda_{\pm} T}) \frac{(u_n + v_n)^2}{\lambda_{\pm}},$$

并对差分形式引入新代换

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = L' \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad L' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & s \end{pmatrix}.$$

(9)式化成

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g x_n^2 + y_n - a \mu', \\ y_{n+1} &= -b x_n - c y_n - f x_n^2 - d \mu'. \end{aligned} \quad (10)$$

这里

$$\begin{aligned} b &= r s = e^{-k'T}, \\ c &= -(r+s) = -2e^{-\frac{k'T}{2}} \cos \omega_1 T, \\ a &= \frac{1}{(\Omega^2 - 1)^2 + k'^2 \Omega^2} \left\{ e^{-\frac{k'T}{2}} \left[ \frac{\Omega^2 + 1}{2\omega_1} k' \sin \omega_1 T - (\Omega^2 - 1) \cos \omega_1 T \right] \right. \\ &\quad \left. + (\Omega^2 - 1) \right\} \\ d &= \frac{1}{(\Omega^2 - 1)^2 + k'^2 \Omega^2} \left\{ e^{-k'T} \left[ \frac{\Omega^2 + 1}{2\omega_1} k' \sin 2\omega_1 T - (\Omega^2 - 1) \cos 2\omega_1 T \right] \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{k'T}{2}} \left[ \frac{\Omega^2 + 1}{2\omega_1} k' \sin \omega_1 T - (\Omega^2 - 1) \cos \omega_1 T \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$g = 1 - e^{-\frac{k'T}{2}} \left( \cos \omega_1 T + \frac{k'}{2\omega_1} \sin \omega_1 T \right),$$

$$f = e^{-k'T} \left( \cos 2\omega_1 T + \frac{k'}{2\omega_1} \sin 2\omega_1 T \right) - e^{-\frac{k'T}{2}} \left( \cos \omega_1 T + \frac{k'}{2\omega_1} \sin \omega_1 T \right). \quad (11)$$

### 三、计算及结果

#### 1. 二维叠代近似

利用(10)及(11)式进行二维近似叠代,取  $\mu'$  为控制参数. 为了避免初值  $(x_0, y_0)$  选择不当引起发散的过早出现,当  $|\mu'|$  小时我们取  $(0, 0)$  附近的点为初值进行叠代; 当  $|\mu'|$  大时则取  $\mu'$  值较小时解的附近点作为初值进行叠代,其主要结果如下.

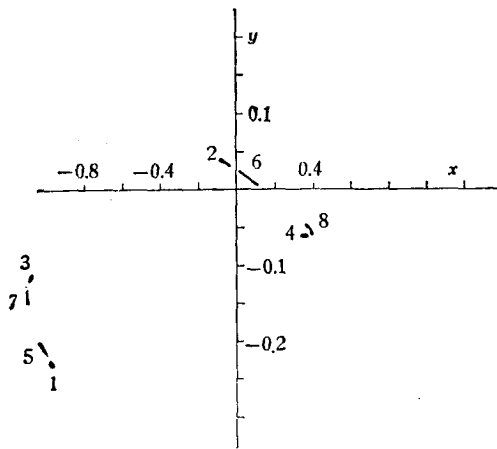


图4 八片吸引子( $k' = 0.3, \Omega = 1.5,$   
 $\mu' = 1.4255$ ) (二维叠代映象)

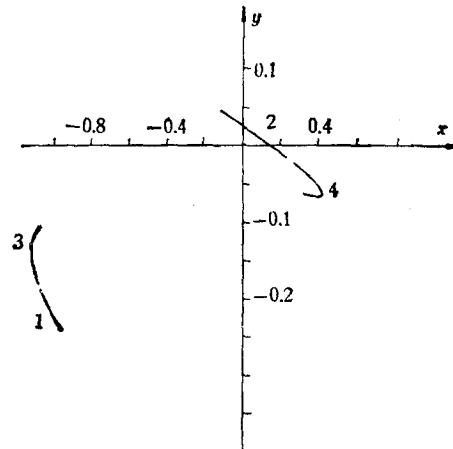


图5 四片吸引子( $k' = 0.3, \Omega = 1.5,$   
 $\mu' = 1.44$ ) (二维叠代映象)

表1 倍周期分岔时参数  $\mu'$  的临界值(二维叠代映象,  $k' = 0.3, \Omega = 1.5$ )

| 周 期 | $\mu' = \alpha\mu/\omega_0^2$<br>的取值范围 | $\mu'_n$  | $\delta_n = \frac{\mu'_n - \mu'_{n-1}}{\mu'_{n+1} - \mu'_n}$ |
|-----|--|-----------|--|
| 1   | -0.35—0.830                            | 0.8305    |  |
| 2   | 0.831—1.3348                           | 1.3349    | 7.30   |
| 4   | 1.3350—1.4039                          | 1.40395   | 4.42   |
| 8   | 1.4040—1.41955                         | 1.41956   | 4.62   |
| 16  | 1.41957—1.422938                       | 1.422940  | 4.70   |
| 32  | 1.422942—1.4236585                     | 1.423659  | 4.58   |
| 64  | 1.4236600—1.423815                     | 1.423816  | 4.85   |
| 128 | 1.423816—1.4238484                     | 1.4238484 | 4.8  |
| 256 | 1.4238485—1.4238550                    | 1.4238551 |  |
| 512 | 1.4238552—                             |           |  |

$$\mu_\infty \approx 1.42386$$

1) 发现一系列倍周期分岔和混沌行为. 当  $k' = 0.3, Q = 1.5$  时的结果见表 1 及图 4—6 中.  $\mu' > 0$  时先是周期为  $2\pi/\omega$  的周期解(单点周期), 随  $\mu'$  增大出现一系列倍周期分岔, 并在  $\mu_\infty \approx 1.42386$  附近进入混沌(表 1). 进一步增大  $\mu'$ , 出现  $8I \rightarrow 4I \rightarrow 2I$  的混沌带的倒分岔序列. 图 4 为  $\mu' = 1.4255$  时的八片奇异吸引子, 图 5 为  $\mu' = 1.44$  时的四片奇异吸引子. 图 6 为  $\mu' = 1.455$  时的二片奇异吸引子.  $\mu'$  接近 1.457 时系统趋于发散,  $\mu' < 0$  时只有单点周期而没有分岔行为.  $\mu' < -0.35$  时系统也趋于发散.

2) 固定  $k' = 0.3$ , 使  $Q = \omega/\omega_0$  取不同值时,  $Q = 1$  时没有观察到分岔行为. 由于我们所选择的 Poincaré 截面, 此时 (10) 式中的系数  $a$  及  $d$  很小, 非线性项系数  $\alpha$  (出现在  $\mu'$  中) 影响很小, 增大  $\mu'$ , 解也近似地线性地增大.  $Q > 1$  时分岔发生在  $\mu' > 0$  的区域内.  $Q < 1$  时分岔则发生在  $\mu' < 0$  的区域(例如  $Q = 0.75$  时在  $\mu' \approx -0.3$  处观察到二分岔,  $Q = 0.25$  时在  $\mu' \approx -1$  处出现二分岔. 但  $Q = 1.5$  时由表 1 可见, 所有分岔均发生在  $\mu' > 0$  区域内). 这可由 (11) 式看出,  $k'$  小时,  $a, d$  值主要由含因子  $(Q^2 - 1)$  的项决定.  $Q^2$  由大于 1 过渡到小于 1 时  $a, d$  反号, 所以分岔时  $\mu'$  值也反号, 但保持  $\alpha\mu'$  和  $d\mu'$  不变号.

3) 固定  $Q = 1.5$ , 增大  $k'$  可减轻发散困难而观察到更丰富的混沌现象. 例如  $k' = 0.5$  时就观察到  $1I$  混沌带. 减小  $k'$ , 例如  $k' = 0.2$  时暂态过程十分长, 往往叠代 1 万次才最后进入周期解.  $\mu' \geq 0.73$  时, 系统在 Poincaré 截面上逐渐由单点周期膨大为闭曲线, 它很可能是由于发生了二不可约频率而进入准周期解的一个叠代实例.  $k'$  愈小类似现象出现愈早. 对此不拟在本文中详细讨论.

4) 为了对  $\alpha$  取不同值进行比较, 不影响普遍性取  $\omega_0 = 1$ , 不用 (8) 式而直接由 (3) 式推导二维叠代方程, 重复第二节中的步骤, 代替 (10) 式可得到如下的叠代方程:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + g\alpha x_n^2 - a\mu, \\ y_{n+1} &= -bx_n - cy_n - f\alpha x_n^2 - d\mu. \end{aligned} \quad (12)$$

表 2  $\mu$  的分岔临界值与  $\alpha$  的关系(二维叠代映象  $k' = 0.3, Q = 1.5, \omega_0 = 1$ )

| $\mu_n$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 0.5$ | $\alpha = 0.4$ | $\alpha\mu$ (平均值) |
|---------|--------------|----------------|----------------|-------------------|
| $\mu_1$ | 0.83         | 1.66           | 2.075          | 0.83              |
| $\mu_2$ | 1.3349       | 2.6698         | 3.337          | 1.3349            |
| $\mu_3$ | 1.40395      | 2.8078         | 3.5099         | 1.40395           |
| $\mu_4$ | 1.41956      | 2.8396         | 3.5489         | 1.41956           |
| $\mu_5$ | 1.42294      | 2.845875       | 3.55735        | 1.42294           |

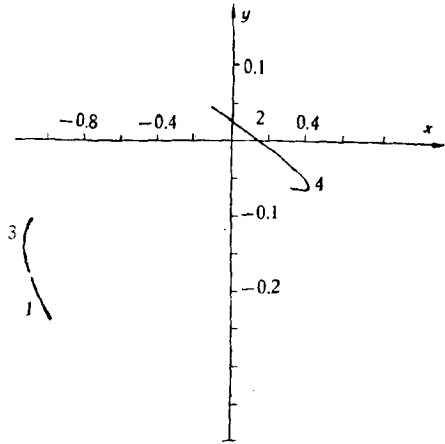


图 6 二片吸引子 ( $k' = 0.3, Q = 1.5, \mu' = 1.455$ ) (二维叠代映象)

注意到  $\omega_0 = 1$  时,  $\Omega = \omega, k' = k$ , 上式中各系数  $a, b, c, d, f$  及  $g$  均可由(11)式计算. 叠代结果列于表 2 中. 从表 2 明显可见相应分岔的临界参数值仅与乘积  $\alpha\mu$  有关, 即作为控制参数的外周期力振幅  $\mu$  的分岔临界值与非线性平方项系数  $\alpha$  成反比, 由第二节中关于无量纲化的讨论这一结果是意料之中的.

## 2. 微分方程解的直接计算

上面的二维叠代结果只是(10)式的解. 为了验证原来的微分方程(7)或(8)也具有混沌和分岔解还必须直接对(8)式进行数字计算. 为此, 我们用文献[11]中给出的方法进行

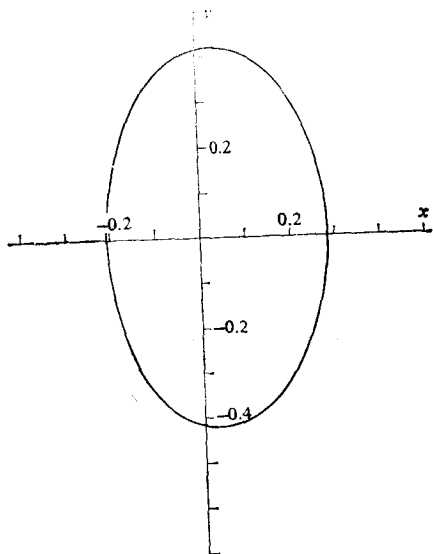


图7 方程(7)的单周期解 ( $k' = 0.2, \Omega = 1.7,$   
 $\mu' = 0.4895$ )

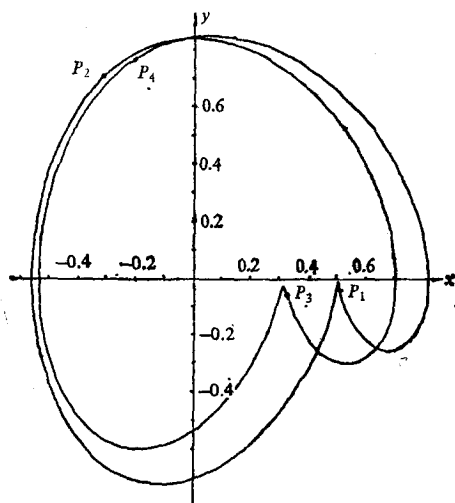


图8 方程(7)的四周期解 ( $k' = 0.2, \Omega = 1.7,$   
 $\mu' = 0.498$ )

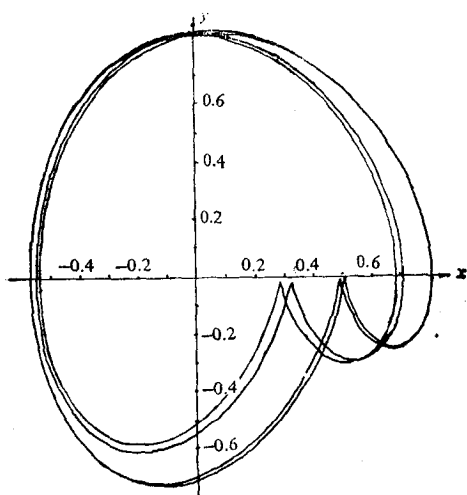


图9 方程(7)的八周期解 ( $k' = 0.2,$   
 $\Omega = 1.7, \mu' = 0.5$ )

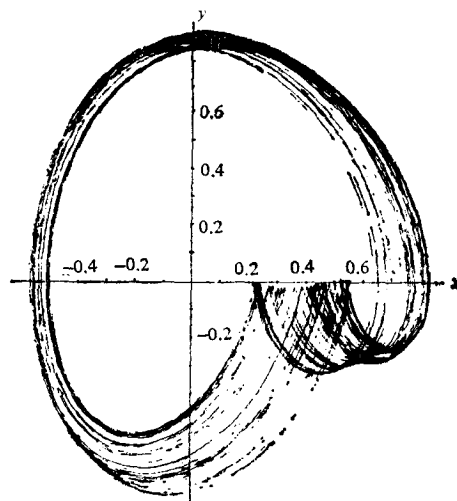


图10 方程(7)的奇异吸引子 ( $k' = 0.2,$   
 $\Omega = 1.7, \mu' = 0.512$ )



计算,步长为  $0.01T$ 。取  $k' = 0.2, \Omega = 1.7$ , 初值取  $(0,0)$  附近点,  $\mu' \leq 0.4895$  时为单周期解, 在  $x, y$  相平面上其轨迹十分接近于中心偏右的椭圆(图 7), 随  $\mu'$  增大出现了分岔和混沌解。图 8 为  $\mu' = 0.498$  时的四周期解。图 9 为  $\mu' = 0.5$  时的八周期轨道(相平面上)。图 10 为  $\mu' = 0.512$  时的混沌解, 其形状如一束折叠的丝束, 中间仍有疏密不同,  $\mu'$  减小疏处呈现出比较明显的空白,  $\mu'$  增大则空白减小, 当  $\mu' \geq 0.515$  时又回到单周期轨道其形状和图 7 基本相同。值得指出的是, 当  $\mu' = 0.4899$  时仍是单周期轨道,  $\mu' = 0.49$  时立即进入四周期轨道, 未找到二分岔。这是由于此时  $\mu'_2 - \mu'_1$  很小还是其它原因仍不清楚。但  $k' = 0.3, \Omega = 1.7$  时, 则从  $\mu' \approx 0.63$  起进入二分岔, 然后经过一系列倍周期分岔进入混沌。

对郝柏林研究员的热情支持和讨论, 谨致谢意。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] J. P. Eckmann, *Rev. Mod. Phys.*, **53** (1981), 643.
- [ 2 ] Edward Ott, *Rev. Mod. Phys.*, **53** (1981), 655.
- [ 3 ] 郝柏林, 物理学进展, **3** (1983), 329.
- [ 4 ] F. D. Murnaghan, *Finite Deformation of An Elastic Solid*, Wiley and Sons, New York, (1951),
- [ 5 ] 例如参阅 J. W. Tucker and V. W. Rampton, *Micro-Wave Ultrasonics In Solid State Physics*. North-Holland, Amsterdam, (1972); E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, "Statistical Physics" part 2, Translated in to Engh'sh by J. B. Sykes and M. J. Kearsley, Pergamon Press, Oxford (1980).
- [ 6 ] N. Minorsky, *Introduction to Nonlinear Mechanics*, J. W. Edwards, Ann. Arbor, Mich., (1947).
- [ 7 ] P. S. Linsay, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1349.
- [ 8 ] S. G. Deo and V. Raghavendra, *Ordinary Differential Equations and Stability Theory*, Tata McGraw-Hill New Delhi, (1980).
- [ 9 ] M. W. Hirsch, C. C. Pugh and M. Shub, *Invariant Manifolds*, Springer Lect. Notes Math., Berlin, Spriger Verlag, (1977), p. 583.
- [ 10 ] P. Holmes, *Phil. Trans. of Royal Soc of London*, **292** (1979), 419.
- [ 11 ] E. N. Lorenz, *J. Atmospheric Sci.*, **20**(1963), 130.

## BIFURCATION AND CHAOS IN FORCED VIBRATION SYSTEMS CONTAINING A SQUARE NONLINEAR TERM

NI WAN-SUN WEI RONG-JUE

(Department of Physics and Institute of Acoustics, Nanjing University)

### ABSTRACT

The phenomena of bifurcation and chaos in forced vibration systems containing a square nonlinear term

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x - \alpha x^2 = \mu \cos \omega t$$

have been investigated by using a 2-D iterated map and by integrating the differential equation. The critical values of control parameter  $\mu$  are inversely proportional to  $\alpha$ .