第35卷 第5期　　物 理 学 报　　Vol. 35, No. 5
1986年5月　　ACTA PHYSICA SINICA　　May, 1986

Minkowski 空间有限温度 QCD 的讨论

刘　强　　汪克林
(上海交通大学)　(中国科学技术大学)

1985年3月21日收到

提　要

在 Niemi 和 Semenoff 提出的实时有限温度标量场论的基础上，将其推广到规范场的情形，使之适用于闵氏空间的有限温度 QCD. 利用本文引入的有限温度传播子，计算了高温 QCD 自由能的二圈修正，结果和 Kapusta 用欧氏空间场论方法得到的结果一致。

一、引　言

到目前为止在研究强相互作用的理论中，一般认为量子色动力学(QCD)是较好的理论. 在具体的应用中常用的是微扰论的计算，由于相互作用耦合常数小时微扰论有效，所以有限温度 QCD 在高温下可以很自然地使用微扰论进行计算[1-3]. 这是我们研究有限温度 QCD 的一个有利之处. 另一方面，常常需要讨论高温和高重子密度状态的物理性质. 天体物理学中认为中子星内部的密度远大于核子密度(核子密度 $\rho\sim10^{11}$—10^{14}g/cm^3，中子星密度 $\rho\sim10^{15}$g/cm^3). 还有极早期宇宙的相变过程，宇宙中的重子从夸克态变成核子态，这是在高温下完成的. 每个核子都带有很高能量的重离子碰撞过程也可产生高温和局部的高密度. 因此，我们对有限温度 QCD 理论的研究是有意义的.

在有限温度理论的研究方法上目前普遍采用的是虚时场论或称欧几里德场论. 这种方法把时间分量限制在一定的范围内变化 $(0\leqslant t\leqslant\beta)$. 它的傅氏变换是分立指标求和的形式. 这样便带来了一些计算上的困难. 当然，对于平衡态热力学量的计算，这种方法仍然是有效的. 由于受到统计力学的影响，实时场论或称 Minkowski 空间的有限温度理论一直没有什么发展. 直到最近 Niemi 等人[4]才提出了有限温度标量场在 Minkowski 空间中的理论. 在本文中我们要在 Minkowski 空间中对有限温度 QCD 作一些讨论. 这样就扩充了有限温度 QCD 的使用范围，使得对非平衡态热力学的研究有了可能的前景，从而会对研究早期宇宙有帮助.

二、基本计算公式

我们将时空扩大到一维复数时间和三维空间. 在这样的时空中定义更普遍的生成泛函，

$$Z[j_\mu\xi\xi]=\int D_cA_\mu D_c\bar{C}D_cC\exp\left(i\int_c[\mathscr{L}_{\rm eff}+j_\mu A_\mu+\xi C+\bar{C}\xi]\right),\qquad(1)$$

其中

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -(F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}/4) - ((\partial_\mu A^a_\mu)^2/(2\alpha)) + (\partial_\mu \bar{C})(\partial_\mu C) + gf^{abc}\bar{C}^a\partial_\mu A^c_\mu C^b, \tag{2}$$

积分迴路 c 是复数时间平面中的一条曲线，见图 1. j_μ 是引入的 c-number 外源，ξ，$\bar{\xi}$

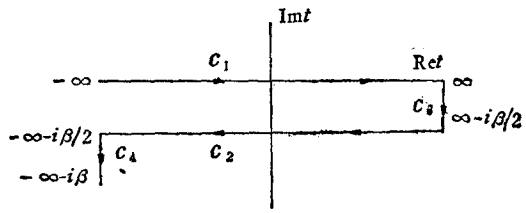

图 1

是 Grassman 数外源. 场量必须满足周期性边界条件，

$$A_\mu(-\infty, x) = A_\mu(-\infty - i\beta, x),$$

$$C(-\infty, x) = C(-\infty - i\beta, x), \quad \bar{C}(-\infty, x) = \bar{C}(-\infty - i\beta, x).$$

假定复时空中的泛函积分仍然满足一般泛函积分的基本假定，即平移不变性和线性性. (1) 式可以写为

$$Z[j_\mu, \bar{\xi}, \xi] = \exp\left\{-i\int_c V\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_\mu}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi}\right]\right\}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_c [j^a_\mu(x)D^{ab}_{\mu\nu\beta}(x-y)j^b_\nu(y) + 2\bar{\xi}^a(x)D^{ab}_\beta(x-y)\xi^b(y)]d^4xd^4y\right\}, \tag{3}$$

其中

$$V[A_\mu, \bar{C}, C] = \frac{1}{8}\operatorname{Tr}\int\{2g(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)[A_\mu, A_\nu] + g^2([A_\mu, A_\nu])^2 + g\bar{C}\partial_\mu[A_\mu, C]\}, \tag{4}$$

$$\left[-\Box_c\delta_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right]D^{ab}_{\nu\rho\beta}(x-y) = \delta_c(x-y)\delta_{\mu\rho}\delta^{ab}, \tag{5}$$

$$\Box_c D^{ab}_\beta(x-y) = \delta_c(x-y)\delta^{ab}. \tag{6}$$

在 Feynman 规范下，$\alpha = 1$，(5) 式化为

$$-\Box_c D^{ab}_{\mu\nu\beta}(x-y) = \delta_c(x-y)\delta_{\mu\nu}\delta^{ab}, \tag{7}$$

加上周期性条件可以解出[5](我们略去指标不写)

$$D_\beta(\tau-\tau', \omega_k) = -\frac{i}{2\omega_k}\frac{1}{1-e^{-\beta\omega_k}}\{[e^{-i\omega_k(\tau-\tau')} + e^{-\beta\omega_k+i\omega_k(\tau-\tau')}]\theta(\tau-\tau') + [e^{\beta\omega_k-i\omega_k(\tau-\tau')} + e^{i\omega_k(\tau-\tau')}]\theta(\tau'-\tau)\}, \tag{8}$$

其中三维空间进行了傅氏变换

$$\omega_k = \sqrt{\bar{k}^2}. \tag{9}$$

由 Riemann 引理:

$$D_\beta(\tau_{1,2} - \tau_{3,4}) = 0, \tag{10}$$

$\tau_{1,2}$ 是在 c_1, c_2 上的值，$\tau_{3,4}$ 是 c_3, c_4 上的值．这样我们可以将生成泛函(1)式分为两部分：一部分只和 c_1, c_2 有关；另一部分只和 c_3, c_4 有关．对我们有兴趣的，即描述系统热力学性质的部分(即配分函数)是其中只和路径 c_1, c_2 相关的部分，

$$Z[j_\mu, \bar{\xi}, \xi, c_1, c_2] = \exp\left\{-i\int_{c_1,c_2} V\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_\mu}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi}\right]\right\}$$
$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}i\int_{c_1,c_2}[jD_\beta j + 2\bar{\xi}D_\beta\xi]\right\}. \tag{11}$$

在(11)式中我们定义

$$\int_{c_1c_2} jD_\beta j = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\,dt' \int d^3\bar{x}\,d^3\bar{y}\, j_\mu^{a(r)}(t, x) D_{\mu\nu\beta}^{ab(rs)}(t-t', \bar{x}-\bar{y}) j_\nu^{b(s)}(t', \bar{y}), \tag{12}$$

其中 $r, s = 1, 2$; $j_\mu^{a(1)}(x) = j_\mu^a(x)$, $j_\mu^{a(2)}(x) = j_\mu^a\left(t - \frac{1}{2}i\beta, \bar{x}\right)$. 传播子 $D_{\mu\nu\beta}^{ab(rs)}$ 称为有限温度 QCD 胶子传播子，

$$iD_{\mu\nu\beta}^{ab(rs)}(k) = \begin{pmatrix} \cosh\theta_k & \sinh\theta_k \\ \sinh\theta_k & \cosh\theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2+i\eta}\delta^{ab}\delta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{k^2-i\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\theta_k & \sinh\theta_k \\ \sinh\theta_k & \cosh\theta_k \end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中 $\cosh^2\theta_k = e^{\beta|k_0|}/(e^{\beta|k_0|}-1)$. 对于鬼粒子也有完全类似的结果．配分函数(11)式写为

$$\begin{aligned} Z[j_\mu, \bar{\xi}, \xi, c_1, c_2] &= Z[j_\mu^{(1)}, j_\mu^{(2)}, \bar{\xi}^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}] \\ &= \exp\left\{-i\int\left(V\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_\mu^{(1)}}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^{(1)}}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi^{(1)}}\right]\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - V\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_\mu^{(2)}}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^{(2)}}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi^{(2)}}\right]\right)\right\} \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{i}{2}\int[j_\mu^{(r)}D_{\mu\nu}^{(rs)}j_\nu^{(s)} + 2\bar{\xi}^{(r)}D_\beta^{(rs)}\xi^{(s)}]\right\} \end{aligned} \tag{14}$$

$$= \int \mathscr{D}A_\mu^{(r)}\mathscr{D}\bar{C}^{(r)}\mathscr{D}C^{(r)}\exp\left\{+i\int[\mathscr{L}_{\mathrm{eff}\beta} + j_\mu^{(r)}A_\mu^{(r)} + \bar{\xi}^{(r)}C^{(r)} + \bar{C}^{(r)}\xi^{(r)}]\right\}, \tag{15}$$

其中：

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\mathrm{eff}\beta} &= \frac{1}{2}A_\mu^{(r)}[D_{\mu\nu\beta}^{-1}]^{(rs)}A_\nu^{(s)} - \bar{C}^{(r)}[D_\beta^{-1}]^{(rs)}C^{(s)} \\ &\quad - V[A_\mu^{(1)}\bar{C}^{(1)}C^{(1)}] + V[A_\mu^{(2)}\bar{C}^{(2)}C^{(2)}]. \end{aligned} \tag{16}$$

相互作用 $V[A_\mu, \bar{C}, C]$ 的形式并未发生变化，只是有两种类型而已．Feynman 规则和 Feynman 图中只需要将原来的普通传播子换成有限温度传播子．我们引进的传播子(13)式可以分为两部分：一部分是不含温度的普通传播子，另一部分是和温度有关的．

$$iD_\beta^{(rs)}(k) = iD_0^{(rs)}(k) + i\bar{D}_\beta^{(rs)}(k) \tag{17}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2+i\eta} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{k^2-i\eta} \end{pmatrix} + \frac{\eta}{(k^2)^2+\eta^2}\begin{pmatrix} 2\sinh^2\theta_k & \sinh 2\theta_k \\ \sinh 2\theta_k & 2\sinh^2\theta_k \end{pmatrix}. \tag{18}$$

注意到 $\eta \to 0$ 时，

$$\frac{\eta}{(k^2)^2+\eta^2} \xrightarrow[\eta\to 0]{} \pi\delta(k^2). \tag{19}$$

我们在 Feynman 图中用在传播子线上划一短横代表 $i\bar{D}_\beta$（见图 4，6，7，9）.

三、有限温度 QCD 自由能的二圈修正

讨论 QCD 所描述的系统的热力学性质，重要的是讨论系统的自由能．在文献[6]中 Kapusta 用欧几里德场论的方法对有限温度 QCD 自由能的二圈修正作了计算．我们试图用 Minkowski 空间有限温度 QCD 的理论对此再作一次讨论．这不是简单的重复，而是通过计算更清楚的看到我们引进的有限温度传播子的意义和正确性．我们采用微扰论圈展开的方法．自由能的零级近似，即所谓理想气体近似极易求得，在此不多赘述．一级修正为零．我们仅计算二圈修正．二圈修正的 Feynman 图见图 2．图 2 中存在许多发

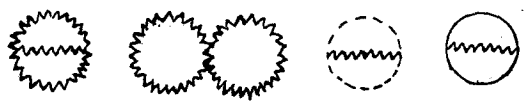

图 2

散子图，必须引进抵消项进行消除[7]．图中每一根内线都是有限温度传播子内线．每个顶角也都有两种类型，在我们所讨论的自由能二圈修正中只有标号为 1 的类型．由此，我们可略去顶角标号不写．下面我们分别对鬼粒子、胶子和费密子作自由能二圈修正贡献的计算．所有的 Feynman 图均由文献[7]给出．

1. 鬼粒子图（见图 3）

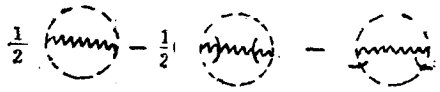

图 3

由于 Feynman 图中的每根内线都包含两部分，即和温度无关部分以及和温度有关部分．我们将这两部分分开得出两种类型的 Feynman 图，其中图 4(a) 是零温度下的圈图，

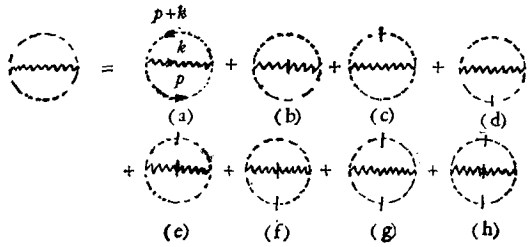

图 4

在此不作讨论．图 4(h) 中包含三个 δ 函数

$$\delta(k^2),\ \delta(p^2),\ \delta[(p+k)^2].$$

在不讨论红外发散问题时这个图的贡献为零．图 4(b)，(c)，(d) 是发散的，将和抵消项消去，剩下的仅有图 4(e)，(f)，(g)．它们的贡献为

$$4\pi^2 g^2 f_{abc} f_{abc} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [p(p+k) - pk + p(p+k)]$$
$$\cdot [(p+k)^2 + i\eta]^{-1} \delta(k^2)\delta(p^2) \sinh^2\theta_p \sinh^2\theta_k. \tag{20}$$

我们得到二圈鬼粒子图对自由能的贡献为

$$\frac{1}{576} g^2 f_{abc} f_{abc} \beta^{-4}. \tag{21}$$

那些发散图形和图 3 中的抵消项是严格消去的，在此不作计算．

2. 胶子圈（见图 5）

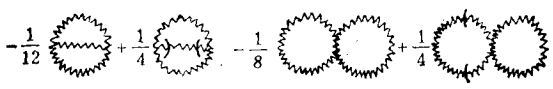

图　5

图 5 写成有限温度传播子的形式，三顶点胶子圈见图 6．

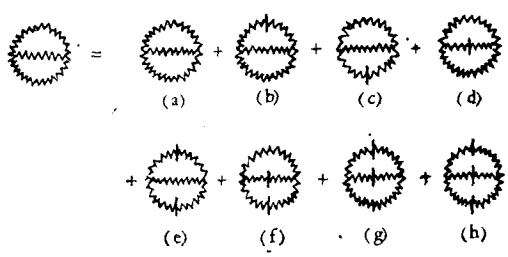

图　6

同样的道理，我们在此只需计算图 6(e)，(f)，(g)，

$$4\pi^2 g^2 f_{abc} f_{abc} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [g_{\mu\nu}(p-k)^2 + g_{\mu\nu}(k+2p)^2$$
$$+ (n-6)p_\mu p_\nu + (4n-6)k_\mu k_\nu - (3n-2)(p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu)]$$
$$\{g_{\mu\nu}\delta(k^2)\delta(p^2) \sinh^2\theta_p \sinh^2\theta_k [(p+k)^2 + i\eta]^{-1}$$
$$+ g_{\mu\nu}\delta(p^2)\delta[(p+k)^2] \sinh^2\theta_p \sinh^2\theta_{p+k} (k^2 + i\eta)^{-1}$$
$$+ g_{\mu\nu}\delta(k^2)\delta[(p+k)^2] \sinh^2\theta_k \sinh^2\theta_{p+k} (p^2 + i\eta)^{-1}\}, \tag{22}$$

其中

$$n = 4,\quad g_{\mu\nu}g_{\mu\nu} = n,\quad g_{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta_{\mu\nu},\quad g_{\mu\nu}p_\nu = p_\mu. \tag{23}$$

另一个四顶点胶子圈图为图 7．

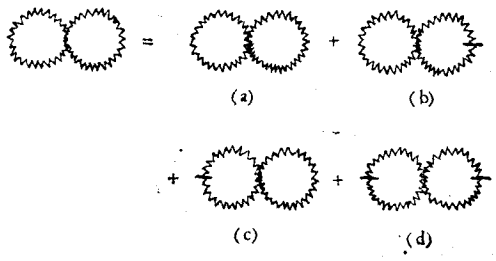

图 7

仅有图 7(d) 是收敛的含温度的图形

$$-4\pi^2g^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}[f_{abc}f_{cde}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})+f_{ace}f_{bde}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu})$$
$$+f_{ade}f_{cbe}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma})]\delta(k^2)\delta(p^2)\sinh^2\theta_p\sinh^2\theta_k g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\delta^{ab}\delta^{cd}. \tag{24}$$

计算 (22) 和 (24) 式并考虑到这些图相应的系数. 得到二圈胶子图对自由能的贡献为

$$\frac{1}{192}g^2f_{abc}f_{abc}\beta^{-4}. \tag{25}$$

3. 费密子

要讨论有限温度 QCD 中费密子的贡献,我们首先要得到它的有限温度传播子,

$$iS_\beta^{(s)}(k)=\begin{pmatrix}\cos\theta_k & \sin\theta_k\\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i(\gamma k+m)/(k^2-m^2+i\eta) & 0\\ 0 & -i(\gamma k+m)/(k^2-m^2-i\eta)\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}\cos\theta_k & \sin\theta_k\\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k\end{pmatrix}, \tag{26}$$

其中

$$\sin^2\theta_k=(\theta(k_0)/\{1+\exp[\beta(k_0-\mu)]\})$$
$$+\theta(-k_0)/\{1+\exp[-\beta(k_0-\mu)]\}. \tag{27}$$

同样,(26)式也可以被分为两部分,一部是普通 QCD 理论的传播子,另一部分是和温度有关的. 对于自由能的贡献,费密子的二圈图为图 8.

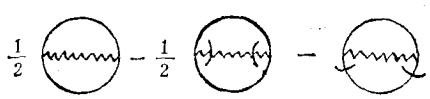

图 8

写成有限温度传播子的形式,我们仍然不考虑零温度项和发散图,只讨论有限部分的图形. 图 9(c) 为

$$4\pi^2g^2\tau^a_{ij}\tau^a_{ji}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}[8pk+16m^2]\delta(p^2-m^2)$$
$$\times\delta(k^2-m^2)\sin^2\theta_p\sin^2\theta_k\frac{1}{(p+k)^2+i\eta}. \tag{28}$$

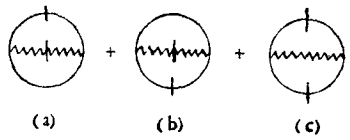

图　9

图 9(a), (b) 是同一类型，

$$-8\pi^2 g^2 \tau^a_{ij}\tau^a_{ji} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [-8p(p+k)+16m^2]\delta(p^2-m^2)$$

$$\times\ \delta(k^2)\sin^2\theta_p \sin^2\theta_k \frac{1}{(p+k)^2-m^2+i\eta} \tag{29}$$

精确的计算 (28) 和 (29) 式是困难的，我们仅在几个极限情况下讨论．在极相对论情况下，$m=0$，同时我们假设化学势 $\mu=0$，则费密子对自由能的二圈贡献为

$$\frac{5}{576} g^2 N_g N_F \frac{1}{\beta^4}, \tag{30}$$

其中 $\tau^a_{ij}\tau^a_{ji} = \mathrm{Tr}\tau^a\tau^a = \frac{1}{2}N_g$，$N_F$ 是费密子的味指标，

$$f_{abc}f_{abc} = N_c N_g, \tag{31}$$

N_c 是规范对称群 $SU(N_c)$ 的指标，表示色数．所以在此极限情况下，自由能的二圈修正为

$$\Omega_I = \frac{1}{144} g^2 \frac{1}{\beta^4} N_g \left(N_c + \frac{5}{4} N_F\right). \tag{32}$$

这和 Kapusta 用欧几里德场论的方法得到的结果完全一样．

我们讨论另外一种极限情况，极相对论粒子的低温情形，即零点能．$\beta\to\infty$，$\mu\neq 0$，此时胶子和鬼粒子对自由能的贡献均趋向于零．

$$\frac{1}{1+\exp[\beta(p_0\mp\mu)]} \xrightarrow[\beta\to\infty]{} \theta(\pm\mu - p_0). \tag{33}$$

我们得到零温度自由能的二圈修正为

$$\frac{1}{64\pi^2} g^2 N_g N_F \mu^4. \tag{34}$$

四、讨　　论

首先，我们要指出上述计算都是在 Feynman 规范下进行的，这样一种规范选择对于我们的自由能二圈修正是可行的，结果不会因规范选择而变．因为 $g^2(1) = g^2(\alpha) + o(g^4(\alpha))$，在讨论更高级修正，超过四级时才需要讨论规范有关性．

从自由能的二圈修正计算，我们看到引进的有限温度传播子对于计算带来了不少方便之处．另外，从物理概念上看，热效应似乎是由每个粒子携带，如果将传播子的两部分分开看，认为一部分(即不含温度部分)仍是粒子的传播子，而另一部分是热激发的一个伴

随粒子,这一部分是专门传播热效应的.

从另一个角度来看,热效应可以看成是一种背景场. 这一点在此似乎还不太明显,只能从有限温度传播子的形式作此猜测. 这还有待于进一步的讨论.

在我们的计算中最后结果和欧几里德场论方法得到的结果一样. 这还不能说明我们引进的有限温度传播子一定是正确的. 关于这一点我们在另文中将专门讨论, 研究两种方法的一致性.

衷心感谢阮图南、阎沐霖二同志有益的讨论.

参 考 文 献

[1] H. D. Politzer, *Phys. Reports*, **14**(1974), 129.
[2] J. C. Collins and M. J. Perry, *Phys. Rev. Lett.*, **34**(1975), 1353.
[3] D. J. Gross, R. D. Pisarski and L. G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(1) (1981), 43.
[4] A. J. Niemi and G. W. Semenoff, *Nucl. Phys.* **B230**(1984), 181.
[5] A. J. Niemi and G. W. Semenoff, *Ann. Phys.*, **152**(1984), 105.
[6] J. Kapusta, *Nucl. Phys.*, **B148**(1979), 461.
[7] B. A. Freedman and L. D. Mclerran, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 1130; 1147; 1169.

A DISCUSSION ON FINITE-TEMPERATURE QCD IN MINKOWSKI SPACE

LIU QIANG
(Shanghai Jiaotong University)

WANG KE-LIN
(University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

The scalar field theory at finite temperature of real time suggested by Nieme and Semenoff is extended to the case of gauge field. It is useful in finite temperature QCD in Minkowski space. With the propagator of finite temperature QCD introduced in this paper, the two-loop correction of free energy of high temperature QCD is calculated and the result is consistent with that obtained by Kapusta with the method of Euclidean field theory.