

# 具有多稳势的多变量 Fokker-Planck 方程非定态问题

胡 岗

(北京师范大学物理系)

王 生 贵

(九江师范专科学校物理科)

1985年9月10日收到

## 提 要

本文通过双匣扩散的 Schlögl 模型的讨论, 将 Green 函数的  $\mathcal{Q}$  展开方法推广到多变量的 Fokker-Planck 方程非定态问题.

## 一、模 型

Schlögl 模型是研究非平衡相变的重要模型<sup>[1,2]</sup>, 其化学反应模式是



适当选取反应常数  $k_1, k_1', k_2$  和  $k_2'$  的单位及生成物的浓度单位, 可变组分  $x'$  的化学反应动力学方程为<sup>[3]</sup>

$$\frac{dx'}{dt} = \alpha(x' - c) - (x' - c)^3. \quad (2)$$

进行坐标平移  $x = x' - c$ , 则方程(2)可简化为

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - x^3. \quad (3)$$

以上讨论认为系统中各组分的空间分布均匀, 在非均匀情况下必须考虑  $x$  组分在空间中不同点之间的扩散. 为了研究扩散对反应的解及分叉特点的影响, 而又采用尽可能简化的模型, 我们引入如图 1 所示的双匣系统.  $x$  和  $y$  分别是在两个匣中的同种组分, 它们可以通过中间隔板互相渗透, 扩散系数均为  $D$ , 并假设在各匣内扩散极快以保持匣内浓度均匀. 这样的双匣扩散的动力学系统方程为

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - x^3 - D(x - y), \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - y^3 - D(y - x). \quad (5)$$

实际上是双变量偶合的化学反应动力学方程组。

控制参数  $\alpha$  和扩散系数  $D$  对分叉行为的影响在文献[4]中有详尽的讨论,这里我们仅指出当  $\alpha > 3D$  时,方程(4)和(5)有四组稳定定态解

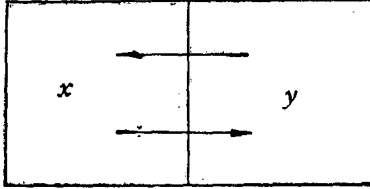


图1 双匣扩散 Schlögl 模型

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 &= \sqrt{\alpha} \\ x_2 = y_2 &= -\sqrt{\alpha}, \\ x_3 = -y_3 &= \sqrt{\alpha - 2D}, \\ x_4 = -y_4 &= -\sqrt{\alpha - 2D}. \end{aligned} \quad (6)$$

方程(4),(5)没有考虑系统的涨落,如果考虑化学反应的随机因素,决定性方程(4),(5)应近似地为 Langevin 方程

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - x^3 - D(x - y) + \varepsilon \Gamma_1(t), \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - y^3 - D(y - x) + \varepsilon \Gamma_2(t) \quad (8)$$

代替,其中 Langevin 力  $\Gamma_1(t)$ ,  $\Gamma_2(t)$  满足关系

$$\langle \Gamma_1(t) \rangle = \langle \Gamma_2(t) \rangle = \langle \Gamma_1(t) \Gamma_2(t) \rangle = 0, \quad (9)$$

$$\langle \Gamma_1(t) \Gamma_1(t') \rangle = \delta(t - t'), \quad (10)$$

$$\langle \Gamma_2(t) \Gamma_2(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (11)$$

假定 Langevin 力是高斯型, Langevin 方程可对应于 Fokker-Planck 方程<sup>[5]</sup> (以下简称 F-P 方程)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, y, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} [\alpha x - x^3 - D(x - y)] P(x, y, t) \\ &\quad -\frac{\partial}{\partial y} [\alpha y - y^3 - D(y - x)] P(x, y, t) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(x, y, t) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

该方程满足势条件<sup>[6]</sup>,其分布函数的定态解为

$$P(x, y) = N e^{-\phi(x, y)} \quad (13)$$

其中  $N$  为归一化常数,而  $\phi(x, y)$  为系统的势函数

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{\varepsilon} \left[ \alpha x^2 - \frac{1}{2} x^4 + \alpha y^2 - \frac{1}{2} y^4 - D(x - y)^2 \right]. \quad (14)$$

对于不同的  $\alpha$  和  $D$ , 这个势的形状大不相同. 我们集中研究  $\alpha > 3D$  时的势,此时势(14)式具有四个极小值  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , 一个极大值  $(0, 0)$  和四个鞍点. 势  $\phi(x, y)$  的四个极小值对应于决定性方程组的四组稳定定态解。

## 二、二维系统 Green 函数的 $\Omega$ 展开

对于一维具有双稳势的 F-P 方程的非定态问题,人们用 W-K-B 法<sup>[7]</sup>,  $\Omega$  展开理论<sup>[8,9]</sup>, 变分法及标度理论<sup>[10,11]</sup>等进行过广泛的讨论. 在文献[12]中提出了用 Green 函数的  $\Omega$  展开的新方法, 这种方法的基本点在于把不稳定点附近的线性近似与 Green 函数的  $\Omega$  展开理论结合使用, 从而把所谓“标度区”和“最终时区”的演化过程统一处理, 既解决了  $\Omega$  展开理论用于不稳定点附近时方差发散的困难, 又避免了标度理论后两个时区对接的难题. 在文献[13]中, 我们又用计算机模拟对这种方法进行了验证, 计算结果表明对处理从不稳定点附近出发的 F-P 方程的非定态问题, 这种新方法较之标度理论和传统的  $\Omega$  展开都有相当的优越性. 即使  $\varepsilon$  不太小 ( $\varepsilon = 0.01$ ), Green 函数  $\Omega$  展开方法结果与精确结果已经相当好地吻合. 现在我们将这种方法用于二维系统, 假定初始分布集中在  $(0, 0)$  的邻域, 分布函数为

$$P(x, 0) = \delta(x - a\sqrt{\varepsilon})\delta(y - b\sqrt{\varepsilon}), \quad (15)$$

$$a, b = O(1).$$

由于几率分布十分靠近  $(0, 0)$ , 所以初始时刻非线性项很小

$$|x^3| \ll |x|, |y^3| \ll |y|. \quad (16)$$

因而线性漂移力近似很好地适用. 线性化的 F-P 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, y, t) = & - \frac{\partial}{\partial x} [(\alpha - D)x + Dy]P(x, y, t) \\ & - \frac{\partial}{\partial y} [(\alpha - D)y + Dx]P(x, y, t) \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(x, y, t) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

多维线性 F-P 方程的解早已有成熟的方法<sup>[14]</sup>, 但对方程(17), 简单的线性变换

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \quad (18)$$

会带来极大的简化, 将(18)式代入方程(17), 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(u, v, t) = & \alpha \frac{\partial}{\partial u} uP(u, v, t) - (\alpha - 2D) \frac{\partial}{\partial v} vP(u, v, t) \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial u^2} P(u, v, t) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} P(u, v, t) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

其中变量  $u, v$  完全分离出来, 其解可立即写出

$$\begin{aligned} P(u, v, t) = & \frac{1}{\pi\varepsilon} \left[ \frac{\alpha(\alpha - 2D)}{(1 - e^{2\alpha t})(1 - e^{2(\alpha - 2D)t})} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \cdot \exp \left[ \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{(u - u_0 e^{\alpha t})^2}{1 - e^{2\alpha t}} + \frac{\alpha - 2D}{\varepsilon} \frac{(v - v_0 e^{(\alpha - 2D)t})^2}{1 - e^{2(\alpha - 2D)t}} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

$$u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)\sqrt{\varepsilon}, \quad v_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b)\sqrt{\varepsilon}.$$

只要

$$e^{2\alpha t} \ll \varepsilon^{-1}. \quad (21)$$

解(20)式是对时间演化过程的很好描述,而当

$$e^{2\alpha t} \gg 1 \quad (22)$$

时,绝大部分几率都已溢出了不稳定区<sup>[11]</sup>

$$\sqrt{\varepsilon} > x > -\sqrt{\varepsilon}, \quad \sqrt{\varepsilon} > y > -\sqrt{\varepsilon}. \quad (23)$$

因此 Green 函数的  $Q$  展开已经适用. 由于  $\varepsilon \ll 1$ , 所以有相当的自由找到合适的对接时间  $t_s$ <sup>[11,12]</sup>, 满足

$$\frac{1}{\varepsilon} \gg e^{2\alpha t_s} \gg 1. \quad (24)$$

此时漂移力的线性近似依然成立,而 Green 函数的  $Q$  展开已经适合.

对于一个  $t_s$  时处于  $P(x_s, y_s, t_s) = \delta(x - x_s)\delta(y - y_s)$  的 Delta 分布,  $Q$  展开表述为

$$P(x, y, t) = \frac{1}{\pi \varepsilon [\det \sigma]^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{\varepsilon} (T - T_0(t))' \sigma^{-1} (T - T_0(t)) \right]. \quad (25)$$

其中  $T$  和  $T_0(t)$  为二维矢量

$$T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad T_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

$T'$  和  $T_0'(t)$  为它们的转置,而  $\sigma$  为  $2 \times 2$  矩阵

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & \sigma_{xy}(t) \\ \sigma_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

$x(t)$ ,  $y(t)$  满足决定性动力学方程

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \alpha x(t) - [x(t)]^3 - D[x(t) - y(t)], \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \alpha y(t) - [y(t)]^3 - D[y(t) - x(t)]. \end{aligned} \quad (28)$$

而  $\sigma$  矩阵各元素满足方程组

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{xx} &= 2\{(\alpha - D) - 3[x(t)]^2\}\sigma_{xx} + \varepsilon, \\ \dot{\sigma}_{xy} &= D(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \{[(\alpha - D) - 3(x(t))^2] + [(\alpha - D) - 3(y(t))^2]\}\sigma_{xy}, \\ \dot{\sigma}_{yy} &= 2\{(\alpha - D) - 3[y(t)]^2\}\sigma_{yy} + \varepsilon. \end{aligned} \quad (29)$$

初始条件为

$$\begin{aligned} x(t_s) &= x_s, \quad y(t_s) = y_s, \\ \sigma_{xx}(t_s) &= \sigma_{yy}(t_s) = \sigma_{xy}(t_s) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

在  $t_s$  时刻将线性区解(20)式和 Green 函数的  $Q$  展开解(25)式对接,给出在  $t_s$  后整个时区的解

$$P(x, y, t) = \frac{1}{\pi^2 \varepsilon^2} \frac{\sqrt{\alpha(\alpha - 2D)}}{e^{2(\alpha - D)t} [\det \sigma]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \exp \left\{ -\frac{\alpha \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} (x_s + y_s) - u_0 e^{\alpha t} \right]^2}{\varepsilon e^{2\alpha t}} - \frac{\alpha - 2D}{\varepsilon} \right. \right. \\ & \times \left. \left. \frac{\left[ \frac{\sqrt{2}}{2} (x_s - y_s) - v_0 e^{(\alpha-2D)t} \right]^2}{e^{2(\alpha-2D)t}} \right\} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\varepsilon} [T - T(t)]' \sigma^{-1} [T - T(t)] \right\} dx_s dy_s, \quad (31) \end{aligned}$$

这样求二维二阶偏微分方程(12)的问题转化为求解两个常微分方程的方程组(28)的问题,后者显然比前者简化很多. 只要有了决定性方程的解,几率分布  $P(x, y, t)$  的弛豫过程就迎刃而解.

### 三、一维近似

虽然 Green 函数的  $\mathcal{Q}$  展开给出了从不稳定点出发的初值问题的解,但要一眼看出当  $t \rightarrow \infty$  时分别有多少几率到达各个不同的势井,仍然十分困难. 然而正是由于  $\varepsilon \ll 1$  的条件,(31)式可以进一步极大地简化.

只要  $e^{2\alpha t} \gg 1$ , 有  $t \gg 1$ , 所以

$$e^{2\alpha t} / e^{2(\alpha-2D)t} = e^{4Dt} \gg 1. \quad (32)$$

早在线性区时几率在  $u$  方向的扩散远远大于在  $v$  方向的扩散,几率分布是在  $v$  方向有一定厚度而沿  $u$  方向的长条,  $t$  越大,这个长条越细. 当  $t \gg 1$  时,几率可以认为仅仅是沿  $u$  方向扩散而分布在  $v = 0$  附近的一条一维势谷内. 当线性区和  $\mathcal{Q}$  展开时区对接时,后一时区所遇到的是在  $u_s$  方向已有相当扩散,而在  $v_s$  方向仍可近似为 Delta 分布的初始条件,所以(28)和(29)式分别变成

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) - [x(t)]^3, \\ y(t) = x(t). \end{cases} \quad (33)$$

和

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{xx} = 2\{(\alpha - D) - 3[x(t)]^2\}\sigma_{xx} + 1, \\ \sigma_{yy} = \sigma_{xx}, \\ \dot{\sigma}_{xy} = 2D\sigma_{xx} + 2\{(\alpha - D) - 3[x(t)]^2\}\sigma_{xy}. \end{cases} \quad (34)$$

其解可立即给出

$$\int_{x_s}^{x(t)} \frac{dx}{\alpha x - x^3} = t - t_s, \quad y(t) = x(t). \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= [(\alpha - D)x - x^3]^2 \int_{x_s}^x \frac{\varepsilon dx}{[(\alpha - D)x - x^3]^3}, \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{xx}, \\ \sigma_{xy} &= [(\alpha - D)x - x^3]^2 \int_{x_s}^x \frac{2D\sigma_{xx}}{[(\alpha - D)x - x^3]^3} dx. \end{aligned} \quad (36)$$

改写成  $u, v$  的形式, (36)式可对角化为

$$\begin{aligned}\sigma_{uu} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{xy}), \\ \sigma_{vv} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{xy}), \\ \sigma_{uv} &= 0.\end{aligned}\quad (37)$$

(31)式最终可写成

$$\begin{aligned}P(u, v, t) &= \frac{1}{\pi^2 \varepsilon^2} \frac{\sqrt{\alpha(\alpha - 2D)}}{e^{2(\alpha-D)t} \sqrt{\sigma_{uu}\sigma_{vv}}} \int du, dv, \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\alpha(u_s - u_0 e^{\alpha t})^2}{e^{2\alpha t}} + \frac{(\alpha - 2D)(v_s - v_0 e^{(\alpha-2D)t})^2}{e^{2(\alpha-2D)t}} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{(u - u(t))^2}{\sigma_{uu}} + \frac{v^2}{\sigma_{vv}} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (38)$$

其中  $u(t), \sigma_{uu}, \sigma_{vv}$  由(35)和(37)式给出. 由于  $\varepsilon \ll 1$ , 只要(15)式中的  $a, b$  和控制参数  $\alpha$ , 扩散系数  $D$  是单位量级

$$a, b, \alpha, D = O(1).\quad (39)$$

(38)式总是很好的近似, 所以一维近似有极大的普遍性.

在(20)式中有  $u, v$  两个模, 最不稳定模起了决定作用, 它在不稳定点附近的竞争中取得了优势, 从而支配了系统, 使二模问题实际变成了以这不稳定模为中心的一维问题. 在这里我们成功地把协同学的支配原则用到二维 F-P 方程问题, 不同的是协同学强调不稳定的慢模支配了稳定的快模, 而在这里,  $(0, 0)$  附近所有模都是不稳定的, 我们的结论是最不稳定的那个模将决定系统的最终命运. 另外, 我们应用 Green 函数的  $\mathcal{Q}$  展开处理了从不稳定区到稳定态的整个过程, 允许控制参数远远高于阈值, 而协同学的支配原则集中于讨论接近阈值附近的较小变化<sup>[6]</sup>.

随机因素的引入使 F-P 方程的解的性质和决定性方程(4), (5)的行为大不相同. 当

$$a = b = 0\quad (40)$$

时, 决定性方程不能决定系统将往哪个稳定态发展, 而解(38)式则十分确定. 当  $t \rightarrow \infty$  时, 所有  $u, > 0$  的几率向  $x = y = \sqrt{\alpha}$  势井运动. 而  $u, < 0$  时则向  $x = y = -\sqrt{\alpha}$  势井发展. 容易解出, 当  $t \rightarrow \infty$ , 系统达到亚稳分布

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \pm \sqrt{\alpha}.\quad (41)$$

而(34), (36)式的解为

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{uu} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\alpha}{(2\alpha - D)^2}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{vv} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\alpha - D}{(2\alpha - D)^2}.\end{aligned}\quad (42)$$

所以分(38)式趋于

$$P(u, v, \infty) = \frac{1}{\pi \varepsilon} \frac{(2\alpha - D)^2}{\sqrt{\alpha(\alpha - D)}} e^{-\frac{\sqrt{2}(2\alpha - D)^+}{\varepsilon(\alpha - D)} v^2} \left[ e^{-\frac{\sqrt{2}(2\alpha - D)^-}{\varepsilon \alpha} (u - \sqrt{\alpha})^2} + e^{-\frac{\sqrt{2}(2\alpha - D)^+}{\varepsilon \alpha} (u + \sqrt{\alpha})^2} \right], \quad (43)$$

即绝大部分几率对半地集中在对称解  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  的两个势井内, 而反对称解  $(x_3, y_3), (x_4, y_4)$  的势井内几乎不存在几率分布。

尤其值得指出的是当  $a = -b$ , 即  $u_0 = 0, v_0 \neq 0$  时, 决定性方程(4),(5)的解将是所有几率都发展到二、四象限的反对称定态解上去。然而由于随机力的影响, 终态不会是这种结果。只要  $\alpha$  满足(39)式的数量级, 绝大部分几率最终将发展到对称势井中去, 而反对称的势井中的几率仍然近似为零, 这是随机力带来的本质性的变化, 与决定性方程(4),(5)的结果断然相反。

#### 四、多稳势问题中几个标度关系

在上节中我们看到, 初始处于不稳定点附近的绝大多数几率都要流到以最不稳定模所决定的势井中去。那么在什么情况下几率才可能以同样数量级大体上可比拟地分配到四个对称和反对称势井中去呢?

考察一个从  $a = b = 0$  处出发的几率峰, 从(20)式可见, 到时刻  $t$  时, 沿  $u$  方向几率已经扩散到  $e^{\alpha t}$  的地方。当

$$e^{\alpha t} \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}},$$

即

$$\tau = -\frac{1}{2\alpha} \ln \varepsilon$$

时, 几率在  $u$  方向扩散的宽度已达到宏观数量级。为了使几率在正、反对称势井中有可以比较的分布, 沿  $v$  方向的几率也必须扩散到宏观数量级

$$e^{(\alpha - 2D)\tau} \propto \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad e^{2D\tau} \propto 1, \quad D \propto \frac{-\alpha}{\ln \varepsilon}. \quad (44)$$

这样我们得到了扩散系数  $D$  和随机力强度  $\varepsilon$  之间的一个标度关系。只有  $D$  和  $-\alpha/2 \ln \varepsilon$  处于同一数量级时, 几率才可能以一定的比例分配到四个势井中去。当然, 对称势井中最后集中的几率要比反对称势井中多些。当

$$O(1) \approx D \gg \frac{-\alpha}{\ln \varepsilon} \quad (45)$$

时, 则绝大多数几率都集中到对称势井内。如果

$$D \ll \frac{-\alpha}{\ln \varepsilon}, \quad (46)$$

则几率将在四个势井中以同样的比例各占四分之一的分布。

如果几率峰的出发点在  $u_0 = 0, v_0 = b\sqrt{\varepsilon} > 0$ , 要使几率在第四象限的反对称势井中有分布, 在  $\tau$  时刻, 几率必须沿  $v$  方向流动(或扩散)到离原点宏观距离。只要  $D = O(1)$ , 扩散是不会到达这个量级。要使几率达到宏观距离, 必须靠几率漂移流动, 即(见(20)式)

$$b e^{(\alpha-2D)r} \propto \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$b \propto e^{-\frac{D}{\alpha} \ln \varepsilon} = \varepsilon^{-\frac{D}{\alpha}} \gg 1, \quad (47)$$

$$v_0 \propto \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{D}{\alpha}} \gg \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (48)$$

所以只有当初始分布在  $v$  方向离原点的距离远远大于  $\sqrt{\varepsilon}$  而达到  $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{D}{\alpha}}$  时 (注意这时在  $v$  方向仍然可以在原点附近, 因为  $\alpha > 3D$ ,  $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{D}{\alpha}} \ll 1$ ), 才可能有相当比例的几率流到相应的反对称势井中去. 所以, 当

$$v_0 \gg \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{D}{\alpha}} \quad (49)$$

时绝大部分几率都集中到第四象限的反对称势井, 而对称势井和第二象限的反对称势井中几率近似为零. 当

$$v_0 \ll \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{D}{\alpha}} \quad (50)$$

时, 几率对半分配在对称势井中. 只有  $v_0 = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{D}{\alpha}})$  时, 几率才会在对称和反对称势井内各以可比拟的几率分配.

本节的讨论虽仅针对一具体的二维双匣扩散的 Schlögl 模型, 然而整个理论可直接应用于多维有势的 F-P 方程, 基本做法和以上步骤一样. 在此不再详述.

#### 参 考 文 献

- [1] F. Schlögl, *S. Physik*, **246**(1971), 446.
- [2] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in non-equilibrium systems*, Wiley, New York, (1977).
- [3] G. Nicolis and J. W. Turner, *Physica*, **89A**(1977), 326.
- [4] 王生贵等, 北京师范大学学报(自然科学版), (1) (1986), 35.
- [5] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Spinger-Verlag, New York, (1984).
- [6] H. Haken, *Advanced Synergetics*, Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, New York, Tokyo, (1983).
- [7] B. Caroli, *Adv. Chem. Phys.*, **46**(1981), 195.
- [8] N. G. Van Kampen, *Adv. Chem. Phys.*, **34**(1976), 245.
- [9] N. G. Van Kampen, *J. Stat. Phys.*, **17**(2) (1976), 71.
- [10] M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.*, **56**(1976), 477.
- [11] M. Suzuki, *Adv. Chem. Phys.*, **46**(1981), 195.
- [12] 胡岗, 物理学报, **34**(1985), 545.
- [13] Hu Gang and Zheng Qiang, *Phys. Lett.*, **110A** (1985), 65.
- [14] Ming Chen Wang and G. E. Uhlen Beck, *Rev. mod. Phys.*, **17**(1945), 323.

## TIME-DEPENDENT PROBLEM OF FOKKER-PLANCK EQUATION OF MANY VARIABLES WITH A MULTI-STABLE POTENTIAL

HU GANG

(Department of Physics, Beijing Normal University)

WANG SHENG-GUI

(Physics Section, Jiujiang Normal School, Jiangxi)

#### ABSTRACT

The two-box Schlögl model is analysed. The  $\Omega$ -expansion of the Green function is applied to such model, and then the time-dependent problem of Fokker-Planck equation of many variables with a multi-stable potential is solved on the basis of the approximation of the leading order of the system size.