

流动等离子体对托卡马克中 撕裂模的影响

汪 茂 泉

(中国科学院等离子体物理研究所)

1985年5月22日收到

提 要

本文分析了托卡马克中的等离子体具有一个整体流动速度时,撕裂模的活动情况。分析与数值计算指出,等离子体的整体流动(等价于具有一个旋转频率)不影响撕裂模的活动,只是使撕裂模具有一个和等离子体相同的旋转频率。外加螺旋场在撕裂层能有效地抑制住等离子体的旋转。螺旋场对撕裂模的稳定作用不受等离子体旋转的影响。

一、引 言

在分析与计算托卡马克等离子体的磁流体力学稳定性时,以往都忽略平衡等离子体的流动,即不把等离子体的平衡速度考虑在内,而令平衡速度 $V_0 = 0$ 。这在不考虑外加定态磁场扰动时是可以的,因为可把坐标架固定在等离子体上。但是,当考虑外加定态磁场扰动时(如考虑外加螺旋场时),坐标架只能固定在实验室上,这时就必须考虑等离子体的初速度 V_0 。在托卡马克结构中,等离子体的整体流动表现为它有一个旋转频率 $\omega_{00} = V_0/X$, $X = r$ 或 R , 其中 r, R 分别是托卡马克小截面和大截面的径向坐标。 ω_{00} 代表角向或环向旋转频率。

本文的目的是分析与计算等离子体具有初速度 V_0 时,撕裂模的增长和螺旋场对撕裂模的抑制会受到什么影响;同时分析与计算了螺旋场对等离子体旋转的抑制作用。

二、处在平衡状态下磁约束等离子体的流动速度

平衡等离子体常具有角向和环向运动速度。这种速度的来源或者是欧姆加热,或者是中性注入等其它辅助加热。欧姆加热引起的角向旋转在很多装置上测量到,如 LT-3^[1], FT-1^[2], T-10^[3], HT-6B^[4] 等。中性注入引起的旋转在 PDX^[5] 装置上测量到。

除了加热引起等离子体的流动以外,尚有密度、温度、磁场等不均匀引起的各种飘移速度。在托卡马克等离子体中,密度飘移是主要的。当然,大功率的局部加热造成的温度梯度也会引起显著的粒子飘移,但在一般情况下,主要是密度梯度引起的飘移,叫反磁飘移。

在一个磁约束等离子体中,若等离子体是热等离子体,必须考虑反磁飘移效应.当反磁飘移频率很高时,飘移模式与撕裂模耦合,通常把这些模式叫飘移撕裂模.已经指出^[6],飘移撕裂模磁岛的增长率和饱和宽度大大减小,因此,反磁飘移具有一定的增稳作用.但是,随着磁岛的增长和饱和,岛区密度被拉平,反磁效应消失^[7],因此,当我们考虑等离子体旋转对撕裂模的影响时,尤其考虑存在外加共振螺旋场时,就不考虑反磁效应了(因为外加螺旋场已经把反磁效应遮挡住),而只考虑欧姆加热和辅助加热引起的旋转.

三、磁流体力学模型

对于低 β 托卡马克等离子体,可用下面的磁流体力学方程描述:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \boldsymbol{\chi}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}. \quad (5)$$

其中 \mathbf{B} , \mathbf{j} , \mathbf{E} , ρ , \mathbf{V} , P , η 分别是等离子体中的磁场、电流、电场、密度、速度、压强和电阻率.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}),$$

代表流体元间的粘滞力, μ , ζ 分别是第一、第二粘滞系数.

假定 $\varepsilon \ll 1$ ($\varepsilon = a/R$, R , a 分别是大半径和小半径),在分析与计算中均采用柱面近似.在柱面坐标系 (r, θ, z) 中, z 代表纵场方向.纵场 $B_z \gg$ 垂直磁场 B_\perp .我们假定等离子体的初速度平行于磁面,即等离子体只能在磁面上流动,满足 $\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B} = 0$,或 $\mathbf{V}_0 \cdot \nabla \phi_0 = 0$, ϕ_0 是平衡磁场的螺旋磁通(以下凡加脚标“0”的量代表平衡量,加脚标“1”的量代表扰动量,不加脚标的量代表两者之和).进一步假定初速度不影响平衡磁结构,即 $\mathbf{V}_0 \cdot \nabla \mathbf{V}_0 = 0$.采用垂直不可压缩假定, $\nabla \cdot \mathbf{V}_\perp = 0$.定义一个流函数 ϕ , 令

$$\mathbf{V}_\perp = \nabla \phi \times \boldsymbol{z}. \quad (6)$$

$\phi = \phi_0 + \phi_1$, ϕ_0 对应垂直初速度 $\mathbf{V}_{0\perp}$.

假定密度 ρ 在小半径范围内改变很小,用 $\boldsymbol{z} \cdot \nabla$ 乘作用动量方程两边,忽略第二粘滞系数,得

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{V}_\perp \cdot \nabla U \right) = -\frac{1}{c} \mathbf{B} \cdot \nabla j_z + \mu \nabla_\perp^2 U. \quad (7)$$

其中 $U = \nabla_\perp^2 \phi$.为了使方程无量纲化,长度除以小半径 a ,时间用电阻扩散时间 τ_r 除,磁场用中心纵场 B_0 除,其它变量以此为根据做相应变换,得到下面无量纲的欧姆定律和

动量方程:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V}_\perp \cdot \nabla \phi = -\eta j_z + E_0. \quad (8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{V}_\perp \cdot \nabla U = -s^2 \mathbf{B} \cdot \nabla j_z + \mu \nabla_\perp^2 U. \quad (9)$$

$s = r_r / \tau_0$ 是磁雷诺数, τ_0 是阿尔芬特征时间, j_z 是 z 方向电流, 我们设平衡电场 $E_0 = \eta_0 j_0$, η_0 是电阻率. 假设扰动量的形式为

$$f_1 = f_1(r, t) e^{i(m\theta + n\zeta)} + \text{c.c.}, \quad \zeta = \frac{z}{R}.$$

当等离子体有初速度 V_0 时, 类似于多普勒效应, f_1 将产生一个附加频率 ω_0 , 即 f_1 变成 $f_1 e^{-i\omega_0 t}$. 将扰动量代入磁面方程 (8), 取到二级项

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - i\omega_0 \phi_1 + V_{0\theta} \frac{im}{r} \phi_1 + V_{1\perp} \cdot \nabla \phi_0 + V_{1\perp} \cdot \nabla \phi_1 = -\eta_0 j_{1z} - \eta_0 \delta j_{z0}.$$

得到扰动量的旋转频率 $\omega_0 = \frac{m}{r} V_{0\theta}$. $V_{0\theta}$ 是 $\mathbf{V}_{0\perp}$ 的角向分量, 径向分量 V_{0r} 按假定为零. 我们看到, 当 $\omega_0 = \frac{m}{r} V_{0\theta}$ 时, 磁面方程就是通常在 $V_0 = 0$ 假定下的磁面方程. 所以, 当等离子体存在初速度时, 扰动量有一个旋转频率 ω_0 , 它等于等离子体的角向旋转频率. 定义 $\phi_0 = \frac{1}{2m} \omega_0 r^2$. 在非线性力 $\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_1$ 的作用下, ϕ_0 发生变化, 由 (9) 式取到二级项, 得

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = \frac{2m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \text{Im}(\phi_1 u_1^* - s^2 \phi_1 j_1^*) + \mu \nabla_\perp^2 u_0 \quad (10)$$

其中 $\text{Im}(\)$ 表示取虚部. u_1^* , j_1^* 分别是 u_1 , j_1 的复数共轭. 我们取归一化的第一粘滞系数 $\mu = (3.5\text{s})^{-1}$, 表示粘滞作用很小, 用 $\mu = 0$ 计算, 其结果几乎是一样的. ω_0 的大小可以任意取, 不影响计算结果.

四、撕裂模的旋转频率与等离子体旋转的关系和螺旋场对等离子体旋转的抑制作用

上一节我们从磁面方程得出: 当等离子体具有初速度时, 撕裂模有一个旋转频率 ω , 它等于等离子体的角向旋转频率 $\omega_0 = \frac{m}{r} V_{0\theta}$. 下面我们将进一步证明, 这两个频率必须相等.

电磁场和等离子体发生动量交换(表现为非线性力 $\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_1$ 使 ϕ_0 发生变化, 见 (10) 式), 磁流体模式与等离子体旋转发生某种联系. 忽略粘滞, 由 $\nabla_\perp^2 \phi_0 = u_0$, 得

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial r} = \frac{1}{r} \int_0^r r' u_0 dr',$$

由 (10) 式,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right) = -\frac{2m}{r} \text{Im}[\phi_1 u_1^* - s^2 \phi_1 j_1^*],$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_0 = -2 \left(\frac{m}{r} \right)^2 \text{Im}[\phi_1 u_1^* - s^2 \phi_1 j_1^*]$$

在有理面 r_s 附近进行磁面平均,因为在有理面两侧, ϕ_1 变号, $\langle \phi_1 u_1^* \rangle_\psi \approx 0$, 所以有

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_0 = 2 \left(\frac{m}{r_s} \right)^2 s^2 \text{Im} \langle \phi_1 j_1^* \rangle_\psi.$$

因为 $j_1^* = j_1^*(\psi)$, 即 j_1^* 是磁面量, 可以从磁面平均号中取出, 上式写成

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial t} = 2 \left(\frac{m}{r_s} \right)^2 s^2 \text{Im}(\langle \phi_1 \rangle_\psi j_1^*(\psi)).$$

由磁面方程,

$$j_1^* = \frac{1}{\eta} i(\Omega - \omega_0) \phi_1^{*[6]},$$

Ω 是复频率, $\Omega = \omega + i\gamma$, γ 是增长率, 代入上式

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_0 = 2 \left(\frac{m}{r_s} \right)^2 s^2 \frac{(\omega - \omega_0)}{\eta} |\phi_1|^2. \quad (11)$$

上式表示磁扰动的频率与等离子体的角向旋转频率 ω_0 的关系。若等离子体的旋转频率 ω_0 与撕裂模的频率 ω 有差异, 它们很快地会自动调整到彼此相等, 即 $\omega = \omega_0$ 。这与 Biskamp 的结论相一致^[6]。撕裂模的旋转频率 ω 可以测量^[8], 测量相同 θ 角不同时刻的位相差, 就可以测得撕裂模的旋转频率^[9], 因为 $\phi_1 = \phi_1(r, t) e^{i(m\theta - \omega t)}$ 。

如果在放电开始, 加上螺旋场, 当自发撕裂模出现以前, (11) 式中的 $|\phi_1|$ 用螺旋磁通 ϕ_{hel} 代替, 因螺旋磁通是定态, $\omega = 0$ 。由 (11) 式得

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_0 = 2 \left(\frac{m}{r_s} \right)^2 (-\omega_0) \phi_{hel}^2 s^2 / \eta.$$

等离子体的旋转频率很快降到零, 从而说明了螺旋场抑制等离子体旋转的有效功能。由于等离子体的旋转被抑止, 自发撕裂模就不会有旋转频率, 实验上测不到撕裂模的旋转^[6]。

在撕裂层之外, 扰动电流可以写成^[7]

$i_1^* = i_0 / \phi_0' \phi_1^*$, 因为旋度 U_1^* 近似为零, 即

$$U_1^* = -i \frac{1}{\Omega} \frac{m}{r} s^2 [\phi_0' j_1^* - i_0 \phi_1^*] = 0.$$

而 $\phi_1 j_1^* = i_0 / \phi_0' |\phi_1|^2$ 是实数, 所以, 由 (10) 式得出, 在撕裂层之外, $\frac{\partial}{\partial t} \omega_0 = 0$ 。即等离子体的旋转在撕裂层(岛区)之外改变很小。事实上, 如果我们在岛区之外忽略非线性效应(即去掉方程中的二级项), 显然 $\frac{\partial \omega_0}{\partial t} = 0$ 立刻能看出。

数值计算的结果与以上的分析相一致。等离子体旋转频率 ω_0 的改变率, 在撕裂层(岛区)改变很大(约 90%), 在岛区以外改变很小(约 10%), 如图 1 所示。图中 a, b 两曲线对应不同时刻。随着时间的发展, 曲线下凹的区域不断扩大, 其大小与岛宽相应。说

1) 测量撕裂模还有其它方法: 如测量某些重原子(如 CV) 的光谱线的多普勒位移, 可以测到撕裂模的旋转频率, 见文献 [4]。

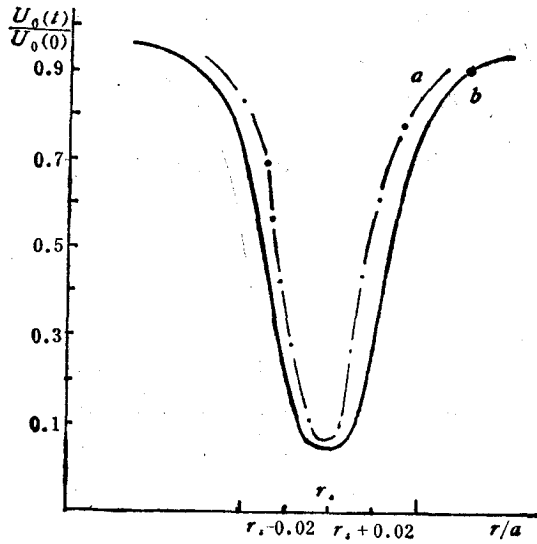


图1 加螺旋场后等离子体旋转频率 ω_0 的改变率

$a \rightarrow t = 10^{-2} \tau_R$; $b \rightarrow t = 2 \times 10^{-2} \tau_R$

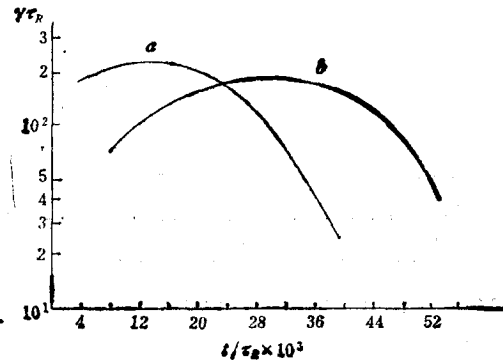


图2 增长率随时间的变化

$a \rightarrow$ 加螺旋场; $b \rightarrow$ 不加螺旋场

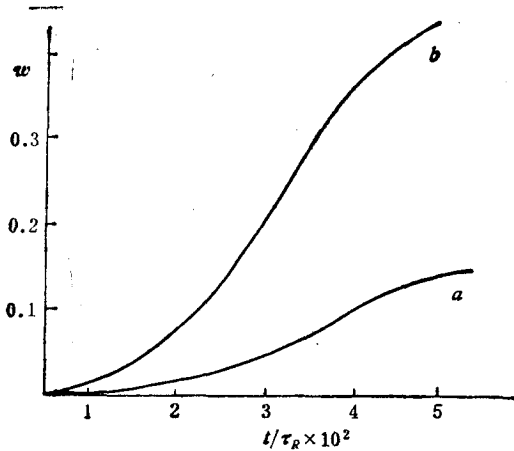


图3 磁岛宽度随时间的变化图例同图2

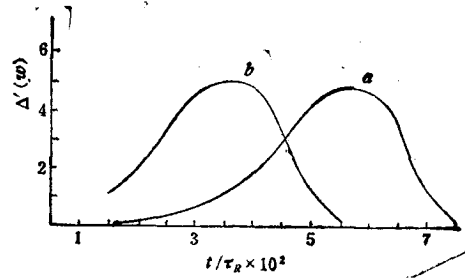


图4 $\Delta'(w)$ 随时间的变化图例同图2

明磁岛区的等离子体旋转被抑制住。在计算中用的参数,平衡电流分布和计算方法等与文献[7]一样。当不加螺旋场时,等离子体的 ω_0 基本不变,撕裂模 ($m = 2, n = 1$) 的增长率和磁岛宽度随时间的变化都与文献[7]的结果一样(见图2和图3)。这就是说,在假定初速度平行磁面 ($V_0 \cdot \nabla \phi_0 = 0$) 和初速度不影响磁结构 ($V_0 \cdot \nabla V_0 = 0$) 时,初速度的存在也不影响撕裂模的活动。加螺旋场后,由于撕裂层(岛区)的旋转被抑制住,得到的结果与文献[7]假设 $V_0 = 0$ ($\omega_0 = 0$) 的结果一样。因为撕裂模的活动主要在撕裂层(岛区)。从而说明螺旋场对撕裂模的稳定作用不受等离子体流动的影响。

图4表示

$$\Delta'(\omega) = (\phi'_1/\phi_1) \begin{cases} r_s + \frac{\omega}{2} \\ \omega \\ r_s - \frac{\omega}{2} \end{cases}$$

ω 是磁岛宽度, $\Delta'(\omega)$ 正比于磁岛的增长, $\frac{\partial \omega}{\partial t} \propto \Delta'(\omega)$, $\Delta'(\omega) = 0$, 磁岛停止增长.

五、结 论

托卡马克等离子体, 由于欧姆加热和其它辅助加热, 具有初速度. 假设等离子体的初速度平行于磁面, 不影响磁结构. 相应于等离子体的旋转, 撕裂模有一个旋转频率, 其大小等于等离子体的角向旋转频率. 外加共振螺旋场在岛区可以有效地抑制等离子体的旋转. 螺旋场对撕裂模的抑制作用不受等离子体旋转的影响. 以上事实已在 HT-6 装置上得到证实^[6].

参 考 文 献

- [1] M. G. Bell, *Nucl. Fusion*, 19(1979), 33.
- [2] A. P. Zhilinsky *et al.*, in *Controlled Fusion and Plasma Physics (Proc. 10th Eur. Conf. Moscow, 1981)* vol. 1, 31.
- [3] S. M. Egorov *et al.*, *ibid.*, p. 35.
- [4] K. Bran *et al.*, *Nucl. Fusion*, 23(1983), 1643.
- [5] H. R. Hicks, B. A. Carreras, A. Holmes, *Phys. Fluids*, 27(1984), 909.
- [6] D. Biskamp, *Nucl. Fusion*, 19(1979), 777.
- [7] 汪茂泉、赵晴初, *物理学报*, 33(1984), 449.
- [8] Zhao Qingchu, Chen Jiayu, Xie Jikang, Li Linzhong, Zhang Guangqiu Wang Maoquan. *Huo Yuping "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research"*, vol. 345(1984).

THE EFFECT OF FLOWING PLASMA IN TOKAMAK ON TEARTING MODES

Wang Mao-quan

(Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hefei)

ABSTRACT

In this article, the activities of tearing modes was analyzed when the plasma in Tokamak has a flowing velocity. The analysis and numerical calculation indicate, the total flowing of the plasma (equivalent to a plasma with a rotational frequency) does not influence the activities of tearing modes, only causes the rotation of the magnetic island with a frequency equal to the rotational frequency of the plasma. The applied helical magnetic field can suppress the rotation of the plasma effectively in the tearing layer. The role of stabilization of the helical magnetic field on the tearing modes is not affected by the plasma rotation.