

等离子体中粒子与 cavitons 相互作用

贺 贤 士

(应用物理与计算数学研究所)

1986 年 4 月 14 日收到

提 要

从 Vlasov-Poisson 方程组出发,我们导出了电子慢变分布函数 δF_e , 慢变场 E , 和快变场 E 之间耦合的动力学方程组,并在一维稳态下解析求解了这一方程组,从而获得了粒子分布函数与 soliton 作用关系;进一步讨论了高维下 δF_e , E_s , E 塌缩运动和它们的多个 cavitons 行为.

我们知道,当湍动态的 L 波 (Langmuir 波) 波包在 Fourier 空间展宽到一定大小时,且能量达到了 $|E|^2/8\pi n_0 T_e \gtrsim (\Delta k \lambda_c)^2$ 后,在长波长区的湍动母体上可以激发短波方向相干性的局域运动不稳定性,随后发展成为 solitons (一维稳态) 或 cavitons (高维塌缩) 运动,并向新的湍动态过渡. 这里 $|E|^2/8\pi$ 为 L 波场能; T_e , λ_c 分别为电子温度和 Debye 长度; Δk 为波包宽度; n_0 为背景粒子数密度.

应用 Zakharov 方程能够很好预言上述系统的调制不稳定性,获得 L 波场和低频振荡粒子数密度扰动随空、时变化关系. 但遗憾的是它们只是流体力学框架下的结果,无法给出波被波本身势阱中捕获的细致情况,更无法了解势阱中粒子微观速度分布,而这两者对了解粒子与波相互作用,包括粒子在波中的加速情况是十分重要的. 本文将从 Vlasov-Poisson 方程出发,应用导得 Zakharov 方程时同样的近似^[1],获得了粒子分布函数,低频场与 L 波之间耦合方程组,并且在一维稳态下解析求得这组方程的解,从而获得了粒子在 solitons 中的微观分布行为和低频场的变化情况,进而还讨论了它们在高维下塌缩性质.

一、粒子分布函数与高、低频场耦合方程组

把 Vlasov 分布函数分成 $f_a + \delta F_a + F_{0a}$ 三部分,其中 f_a , δF_a 分别为高频和低频振荡部分, F_{0a} 为背景部分;并考虑到 L 波(以下也称高频波)二次非线性频率差拍过程,从 Vlasov 方程得到高频分布形式解^[1]

$$f_a(k, v) = \frac{e_a}{im_a(\omega - k \cdot v)} \left\{ E(k) \cdot \frac{\partial F_{0a}}{\partial v} + \int E(k_1) \cdot \frac{\partial \delta F_a(q, v)}{\partial v} \delta^4(k - k_1 - q) \frac{d^4 k_1 d^4 q}{(2\pi)^4} \right\}$$

$$+ \left\{ \mathbf{E}_s(q) \cdot \frac{\partial f_\alpha(k_1)}{\partial \mathbf{v}} \delta^4(k - k_1 - q) \frac{d^4 k_1 d^4 q}{(2\pi)^4} \right\}. \quad (1)$$

这里 $\mathbf{E}_s(q)$ 为二次非线性差拍激发的低频场, 一般情况下它可以是纵、横波, 但为方便我们只考虑纵场情况. $k \equiv \{\mathbf{k}, \omega\}$ 表示高频波四维波矢; 同样 $q \equiv \{\mathbf{q}, \Omega\}$ 为低频波四维波矢. m_α, e_α 分别为粒子质量和电荷. $\alpha = e, i, F_{0\alpha}$ 满足

$$\int F_{0\alpha}(\mathbf{v}) d^3 v = n_{0\alpha} = n_0.$$

同样可得低频分布

$$\delta F_\alpha(q, \mathbf{v}) = \frac{e_\alpha}{im_\alpha(\Omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})} \left\{ \mathbf{E}_s(q) \cdot \frac{\partial F_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} + \int_{(s)} \mathbf{E}(k_1) \cdot \frac{\partial f_\alpha(k_2, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \delta^4(q - k_1 - k_2) \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^4} \right\}. \quad (2)$$

(2) 式中已略去低频波二次非线性拍频过程, 显然它们为高频场的四次非线性效应.

积分号 $\int_{(s)}$ 表示只取差拍过程.

为了以下运算方便, 引入一些简易表示: 令高频场

$$\mathbf{E}(k) = \mathbf{e}_k E(k), \quad \mathbf{E}(k_1) = \mathbf{e}_1 E(k_1),$$

这里

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{k_1};$$

显然

$$\mathbf{e}_{-k} = -\mathbf{e}_k, \quad E^-(k) \equiv E(-k) = -E^{*-}(k),$$

而

$$E^+(k) \equiv E(+k).$$

对于低频场 $\mathbf{E}_s(q) = \mathbf{e}_q E_s(q)$ 也有类似表示. 现在把(1)和(2)式代入 Poisson 方程, 得到高、低频场方程分别为

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) E(k) = & -4\pi \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha |\mathbf{k}|} \int \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left\{ \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \delta F_\alpha(q, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} E(k_1) \right. \\ & \left. + \mathbf{e}_q \cdot \frac{\partial f_\alpha(k_2, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} E_s(q) \right\} \delta^4(k - k_1 - q) \frac{d^4 k_1 d^4 q}{(2\pi)^4} d^3 v, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(q) E_s(q) = & -4\pi \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha |\mathbf{q}|} \int_{(s)} \frac{1}{\Omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial f_\alpha(k_2, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} E(k_1) \\ & \cdot \delta^4(q - k_1 - k_2) \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^4} d^3 v, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\varepsilon(k) = 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{n_0 |\mathbf{k}|} \int \frac{\mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial F_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v \quad (5)$$

为熟知的 L 波介电函数, ω_α 为 $\alpha = e, i$ 的等离子体频率. $\varepsilon_s(q)$ 是低频介电函数.

若只取到二次高频场拍频, 这时(3)式中 f_α 只需取(1)式右端第一项就够. 现在若 ε 的实部取到 k^2 项以及(3)式右端速度积分时略去 $\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega}$ 项, 这样, (3)式两边乘上 ω^2 ,

并作双边 Fourier 逆变换后, 不难得到空时表象中高频场 \mathbf{E} 的方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - 3v_c^2 \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\omega_c^2}{n_0} \left(n_0 + \int \delta F_c(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \right) \mathbf{E} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{v_c \lambda_c^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\omega^3}{k^3} \cdot \exp \left\{ -\frac{\omega^2}{2k^2 v_c^2} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t \right\} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \quad (6)$$

其中等号右边第二项为线性 Landau 阻尼项来自 ε 虚部, $v_\alpha = \sqrt{T_\alpha/m_\alpha}$ 为 $\alpha = e, i$ 粒子热速度. (6) 式中只留下扰动密度 $n_c = \int \delta F_c d^3v$ 为未知, 但为了研究粒子微观分布, 我们将保留 δF_c 的形式, 并设法求得 δF_c 满足的方程. (1) 式代入 (2) 式后, 取到高频场二次非线性拍频, 我们得到

$$i(\Omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \delta F_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E}_s(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial F_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} + 2i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int h_\alpha(k_1, -k_2, \mathbf{v}) \times E^+(k_1) E^{-*}(k_2) \delta^4(k - k_1 + k_2) \frac{d^4k_1 d^4k_2}{(2\pi)^4} \right\}, \quad (7)$$

其中

$$h_\alpha(k_1, k_2, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial F_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}}}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}} + 1 \leftrightarrow 2 \right\}. \quad (8)$$

由于已取了差拍, 积分号下指标 s 便可省去.

进一步化简 (8) 式, 得

$$\begin{aligned} h_\alpha(k_1, -k_2, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}}{(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v})(\omega_2 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v})} \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \left(\frac{\mathbf{k}_2}{(\omega_2 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v})^2} - \frac{\mathbf{k}_1}{(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v})^2} \right) \right\} \cdot \frac{\partial F_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \\ &= \frac{1}{2\omega_c^2} \left\{ (\Omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_{0\alpha} - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{q} \cdot \frac{\partial F_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right\} \\ &\quad + o \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} \right)_{1,2}. \end{aligned} \quad (9)$$

上式代入 (7) 式并作 Fourier 逆变换后, 得到空时表象中的方程 ($\alpha = e$)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \left\{ \delta F_c(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{D}_c \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_{0c}(\mathbf{v}) \right\} \\ &= \frac{e}{m_e} \left\{ \frac{e}{2m_e \omega_c^2} \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) + \mathbf{E}_s(\mathbf{x}, t) \right\} \cdot \frac{\partial F_{0c}}{\partial \mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中,

$$\mathbf{D}_c \equiv \frac{e^2}{2m_e^2 \omega_c^2} \mathbf{E} \mathbf{E}^*,$$

$$\left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{\mathbf{E} \mathbf{E}^*} \right) \equiv 2 \iint \frac{d^4k_1 d^4k_2}{(2\pi)^4} \left(\frac{\mathbf{E}^+(k_1) \cdot \mathbf{E}^{-*}(k_2)}{\mathbf{E}^+(k_1) \mathbf{E}^{-*}(k_2)} \right) \cdot \exp \{ i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - i(\omega_1 - \omega_2)t \}. \quad (11)$$

为了使方程 (10) 及 (6) 式闭合, 现在需要给出 \mathbf{E}_s 的空时方程 (1) 代入 (4) 式, 并取二次拍频, 得到

$$\mathbf{E}_i = -i \frac{(\epsilon_c(8) - 1)}{\epsilon_s(q)} \frac{e}{n_0 m_e \omega_c^2} \mathbf{q} \int \mathbf{E}^+(k_1) \cdot \mathbf{E}^{*-}(k_2) \delta^4(q - k_1 + k_2) \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^4}. \quad (12)$$

上式已略去离子非线性电流的贡献。

注意到

$$\frac{\epsilon_c(q) - 1}{\epsilon_s(q)} = \begin{cases} \Omega^2 (\Omega^2 - q^2 v_i^2 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} |\mathbf{q}| \Omega v_i \sqrt{\mu})^{-1} & \text{对 } v_i \ll \frac{\Omega}{|\mathbf{q}|} \ll v_e, \\ \frac{T_i}{T_e + T_i} & \text{对 } \frac{\Omega}{|\mathbf{q}|} \ll v_i. \end{cases} \quad (13)$$

这里,

$$\epsilon_c(q) = 1 + \frac{\omega_c^2}{q^2 n_0} \int \frac{\mathbf{q} \cdot \frac{\partial F_{0c}}{\partial \mathbf{v}}}{\Omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}}, \quad v_i = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$$

为离子声速度, $\mu = m_e/m_i$. 从 (12) 式得到低频纵场的空时方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Gamma_c \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E}_i(\mathbf{x}, t) - v_i^2 \nabla^2 \mathbf{E}_i = - \frac{e}{2\omega_c^2 m_e} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*), \quad (14)$$

其中 Landau 阻尼项

$$\begin{aligned} \Gamma_c \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_i &= v_i \sqrt{\frac{\mu\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \int |\mathbf{q}| \mathbf{E}_i(\mathbf{q}, t) \cdot \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \\ &= -(2\pi)^{-3/2} \sqrt{\mu} v_i \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{E}_i(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d^3 x'. \end{aligned} \quad (15)$$

(14)式从表明像低频密度方程一样, 低频场 \mathbf{E}_i 是由有质动力 $\nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)$ 驱动所形成, 并以离子声速度 v_i 进行传播.

方程组 (6), (10) 及 (14) 虽然是闭合方程组, 但是由于方程 (6) 具有与其它方程不同的时标, 不便于求解, 为此, 把高频场 \mathbf{E} 分解为缓变振幅 ϵ 和快振荡因子两部分. 令

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon e^{-i\omega_e t} + \text{c.c.}). \quad (16)$$

注意到 $\omega_e \epsilon \gg \frac{\partial}{\partial t} \epsilon$, 略去 ϵ 的两次时间导数后, 方程 (6) 式便为

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_c \right) \epsilon + \frac{3v_e^2}{2\omega_e} \nabla^2 \epsilon = \frac{\omega_e}{2n_0} \epsilon \int \delta F_c(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 v, \quad (17)$$

其中线性 Landau 阻尼项

$$\gamma_c \epsilon = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2v_e^2 \lambda_e} \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{\omega^3}{k^3} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_e^2} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}\right). \quad (18)$$

(10), (14), (17) 式是我们讨论问题的出发点. 由于 (16), (10) 和 (14) 式中的

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \text{Re} \epsilon \cdot \epsilon = |\epsilon|^2.$$

二、Soliton 中低频场和粒子速度分布函数

方程组 (10), (14) 和 (17) 是包含 Landau 阻尼效应的非线性偏微分方程组. 为了

了解粒子在 caviton 中与波场的相互作用, 我们将在 1 + 1 维无阻尼情况下求这组方程的稳态解. 引入行波坐标

$\xi = x - ut$, 其中 u 是波包平均速度, 这时低频纵场 (14) 式的稳态解为

$$E_s(\xi) = \frac{u^2}{v_i^2 - u^2} \frac{e}{2m_e\omega_c^2} \frac{\partial}{\partial \xi} |\varepsilon|^2. \quad (19)$$

解 (19) 式已取 $\xi \rightarrow \pm\infty$ 时, E_s 和 ε 及它们的导数 $\rightarrow 0$.

同样, 从方程 (10) 得到低频振荡电子分布函数稳态解为

$$\delta F_c(\xi, v) = \frac{|\varepsilon|^2}{8\pi n_0 T_c} \left\{ \frac{v_i^2}{(v_i^2 - u^2)(v - u)} + \frac{\partial}{\partial v} \right\} \frac{\partial F_{0c}(v)}{\partial v}. \quad (20)$$

这里 $F_{0c}(v)$ 取为电子的 Maxwell 分布. 对 (20) 式速度积分后, 得到慢变电子扰动密度

$$\frac{n_c}{n_0} = \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta F_c(\xi, v) dv = \begin{cases} -\frac{|\varepsilon|^2}{8\pi n_0 T_c} \frac{(1 - u_c^2)}{(1 - u_i^2)} & \text{对 } u_c \ll 1, \\ \frac{|\varepsilon|^2}{8\pi n_0 T_c} \frac{1}{u_c^2(u_i^2 - 1)} & \text{对 } u_c \gg 1. \end{cases} \quad (21)$$

对 (20) 式速度积分时, 在 v 接近 u 处有奇点, 积分线路与求介电函数时一样, 取主值积分即得 (21) 式. 这里 $u_c \equiv u/v_c$, $u_i \equiv u/v_i$. 对 $u_c \ll 1$, 在 $u_i < 1$ 亚声区粒子数密度扰动发生凹陷, 有 Soliton 解, 这正是 Захаров 方程粒子数密度的稳态解; 而在 $1 < u_i \ll 1/\sqrt{\mu}$ 超声区, 不出现密度扰动凹陷, 是波被波捕获的不稳定区, 稳态解没有意义. 对 $u_c \gg 1$, 即波包平均速度远大于电子热速度, 我们不感兴趣.

最后, 我们求解 $\gamma_c = 0$ 的方程 (17), 表示行波坐标系的量为

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon(\xi) \exp(iq_0 x - iQ_0 t), \quad (22)$$

其中 $\varepsilon(\xi)$ 为模量. (22) 式代入 (17) 式, 应用 (21) 式亚声密度 n_c , 虚部方程给出了 $q_0 =$

$\frac{1}{3\lambda_c} u_c$, 而实部方程则为

$$\frac{d^2 \varepsilon(\xi)}{d\xi^2} - \alpha^2 \varepsilon(\xi) + \beta_0^2 \varepsilon(\xi)^3 = 0. \quad (23)$$

这里

$$\alpha_0^2 = \frac{1}{9\lambda_c^2} \left(u_c^2 - 6 \frac{Q_0}{\omega_c} \right),$$

$$\beta_0^2 = \frac{1}{24\pi n_0 T_c \lambda_c^2} \frac{(1 - u_c^2)}{(1 - u_i^2)}. \quad (24)$$

如果 $\alpha_0^2, \beta_0^2 > 0$, 即 $u_c < 1$ 和 $u_c > 6Q_0/\omega_c$, (23) 式的解便为熟知的

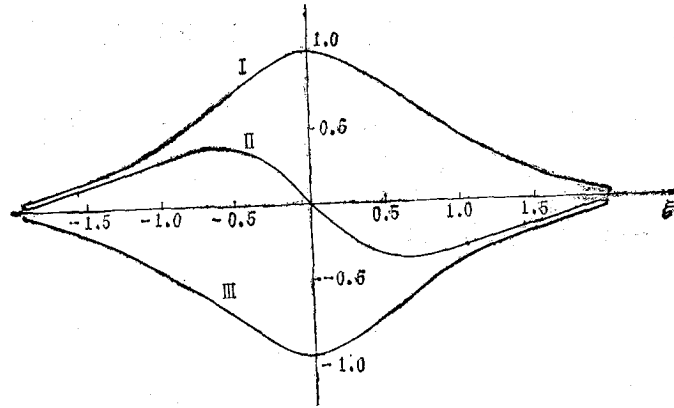
$$\varepsilon(\xi) = \varepsilon_0 \operatorname{sech} \alpha_0 \xi, \quad (25)$$

其中 $\varepsilon_0 = \sqrt{2\alpha_0/\beta_0}$. (25) 式也是通常 Захаров 方程中 L 波场振幅的稳态解形式, 它是双参量 Q_0, u 的 Soliton 解, 显然, $\xi \rightarrow \pm\infty$ 时, $\varepsilon(\xi)$ 及 $\frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi} \rightarrow 0$.

有了 (25) 式便可写出低频场 E_s 和低频分布 δF_c 的具体形式. 从 (19) 式得到

$$E_s(\xi) = -A_0 \operatorname{sech}^2 \alpha_0 \xi \tanh \alpha_0 \xi. \quad (26)$$

这里

图1 $|\varepsilon|^2$, E_s 及 n_c 随 ξ 变化

曲线 I $|\varepsilon|^2/\varepsilon_0^2$; 曲线 II $\frac{8\pi n_0 T_c}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{(1-u_i^2)\varepsilon}{2u_i^2 \alpha_0 T_c} \right) E_s$; 曲线 III $\frac{1-u_i^2}{1-u_e^2} \frac{8\pi n_0 T_c}{\varepsilon_0^2}$

$$A_0 = \frac{u_i^2}{1-u_i^2} \frac{2\alpha_0 T_c}{e} \left(\frac{\varepsilon_0^2}{8\pi n_0 T_c} \right). \quad (27)$$

图1给出了 $|\varepsilon|^2$, n_c/n_0 及 E_s 随 ξ 的变化关系, 可见 $E_s(\xi)$ 以 $\xi=0$ 为对称点, 由负值 ($\xi > 0$) 到正值 ($\xi < 0$) 反极性地改变. 由于 $\xi \rightarrow \pm\infty$, E_s 及其导数均趋向于零, 显然, E_s 亦是一种 Soliton 运动, 它的谷和峰位置在 $\alpha_0 \xi = \pm 0.7$ 点, 峰谷间距 $\Delta \xi = 1.4\alpha_0^{-1}$. 在这两点 $|\varepsilon|^2$ 已从 $\alpha_0 \xi = 0$ 的极大值降到相对比 0.625 左右.

Soliton 中低频粒子流体运动将取决于 E_s , 热压力和有质动力三者作用结果, 在相消后剩余力 $-\left(\frac{e}{m_e} E_s + \frac{c_s^2}{n_0} \frac{\partial n_c}{\partial x} - \frac{F_p}{n_0 m_e}\right)$ 作用下粒子发生加速运动. 这里有质动力 $F_p = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial |\varepsilon|^2}{\partial x}$, 等离子体声速 $c_s = \sqrt{\Gamma T_c}$, $\Gamma = 3$.

现在讨论 $\delta F_c(\xi, \nu)$ 随 ξ, ν 的变化关系. 利用解 (25) 式后, (20) 式可写成

$$\delta F_c(\xi, \nu) = \frac{\varepsilon_0^2}{8\pi n_0 T_c} \operatorname{sech}^2 \alpha_0 \xi \left\{ \tilde{\nu}^2 - \left(1 + \frac{\tilde{\nu}}{(\tilde{\nu} - u_e)(1 - u_i^2)} \right) \right\} F_{0c}(\tilde{\nu}), \quad (28)$$

其中无量纲速度

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{\nu_c}, \quad F_{0c}(\tilde{\nu}) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\tilde{\nu}^2}{2}\right).$$

从方程 (10) 可以知道, 在二次高频场作用下, δF_c 的空、时变化是由于有质动力和低频场 E_s 所驱动. 因为 E_s 也是以有质动力为驱动源, 所以方程 (10) 的解, 即这里的 (28) 式直接由 $|\varepsilon|^2$ 的 Soliton 场及与背景粒子速度变化有关两部分组成. 因此 δF_c 的空时行为完全是 Soliton 运动. 而保持空间的对称结构.

$\delta F_c(\xi, \tilde{\nu})$ 随 $\tilde{\nu}$ 的分布行为如上(见图1).

在 $\tilde{\nu} = 0$ 点有一个负的极小值 $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|\varepsilon|^2}{8\pi n_0 T_c}$, 可以看到速度在 $-\tilde{\nu}_0 < \tilde{\nu} < \tilde{\nu}_0 \equiv \left(1 + \frac{1}{1-u_i^2}\right)^{1/2}$ 区的粒子在 E_s 和有质动力作用下, 一部分跑出 Soliton 铃形空间区, 另一

部分加速到其它速度区域。前者正是发生扰动密度 $n_c < 0$ 凹陷的原因; 后者导致了 \tilde{v} 轴上有两个极大点 $\tilde{v}_{m_1} = \pm \left(3 + \frac{1}{1-u_c^2}\right)^{1/2}$, 它近似与场无关, 这里已用了 $\tilde{v}_{m_1} \gg u_c = \sqrt{\mu u_c}$ 的假定。最后, δF_c 形成了以 $\tilde{v} = 0$ 为对称轴的图 2 的双峰分布形状, 峰值 $\delta F_c(\pm \tilde{v}_{m_1}) = 2 \frac{\epsilon_0^2}{8\pi n_0 T_c} \text{sech}^2 \alpha_0 \xi F_{0c}(\pm \tilde{v}_{m_1})$ 。显见在 $-\tilde{v}_0 < \tilde{v} < \tilde{v}_0$ 区扰动分布 $\delta F_c(\tilde{v}) < 0$, 而对于 $\tilde{v} \gg 1$ 区 $\delta F_c \sim \frac{|\epsilon|^2}{8\pi n_0 T_c} \tilde{v}^2 \cdot \exp\left(-\frac{\tilde{v}^2}{2}\right)$ 形状, 比指数减少缓慢。

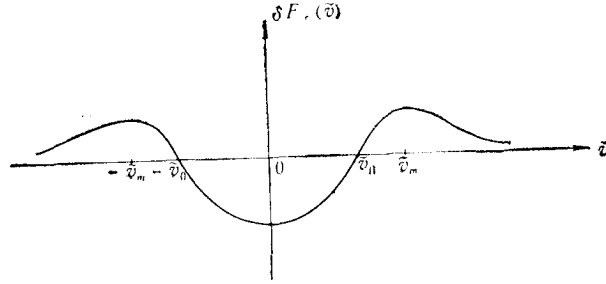


图 2 扰动分布函数 $\delta F_c(\tilde{v})$ 随 \tilde{v} 的变化关系

在调制相互作用时间尺度上平均的慢变分布函数便为

$$F_c(\xi, \tilde{v}) = \left\{ 1 + \frac{|\epsilon|^2}{8\pi n_0 T_c} \left[\tilde{v}^2 - \left(1 + \frac{\tilde{v}}{(\tilde{v} - u_c)(1 - u_c^2)} \right) \right] \right\} F_{0c}(\tilde{v}). \quad (29)$$

(29) 式在 $-\tilde{v}_0 < \tilde{v} < \tilde{v}_0$ 区低于背景粒子分布, 显然在 $\tilde{v} = 0$ 中心附近

$$F_c(\xi, \tilde{v}) = \left\{ 1 - \frac{|\epsilon|^2}{8\pi n_0 T_c} \right\} F_{0c}(\tilde{v}),$$

峰值为

$$F_c(\xi, 0) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\{ 1 - \frac{|\epsilon|^2}{8\pi n_0 T_c} \right\}.$$

当场能密度不太小且满足 $\left(\frac{|\epsilon|^2}{8\pi n_0 T_c}\right)^{-1} < \tilde{v}_{m_1}^2$ 时, $F_c(\xi, \tilde{v})$ 随 \tilde{v} 变化亦有双峰结构, 其极大值发生在 $\tilde{v}_{m_1} = \left(\tilde{v}_{m_1}^2 - \frac{1}{A_1}\right)^{1/2}$, 这里 $A_1 = |\epsilon|^2/8\pi n_0 T_c$; 对于很低的场能密度 $A_1 \ll 1$, 从而 $\tilde{v}_{m_1}^2 < 1/A_1$, 这时虽然 $\delta F_c(\tilde{v})$ 有双峰结构, 但叠加背景分布后, 主要仍取决于 F_{0c} 随 \tilde{v} 变化的单峰结构。

当 $\tilde{v} \gg 1$ 时, $F_c(\xi, \tilde{v}) = \left(1 + \frac{|\epsilon|^2}{8\pi n_0 T_c} \tilde{v}^2\right) \cdot \exp(-\tilde{v}^2/2)$, 表明了粒子在 Soliton 内受到加速, 高能粒子多于 Maxwell 分布。在 (29) 式等号两边乘上 $\frac{1}{2} m v^2$ 积分后, 得粒子动能

$$E_k = \frac{1}{2} n_0 T_c \left\{ 1 + \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}^2 \delta F_c d\tilde{v} \right\} \approx \frac{1}{2} n_0 T_c \left\{ 1 + \frac{|\epsilon|^2}{8\pi n_0 T_c} \left(2 - \frac{1}{1-u_c^2} \right) \right\}. \quad (30)$$

(30) 表明了 Soliton 中粒子平均地获得或减少能量取决于亚声波包平均速度 $u_c (< 1)$ 的

大小. 当 $u_i < 1/\sqrt{2}$ 时, 粒子发生了等效加热作用, 有效温度

$$T_{\text{eff}} = T_e \left\{ 1 + \frac{|\epsilon|^2}{8\pi n_0 T_e} \left(2 - \frac{1}{1 - u_i^2} \right) \right\}.$$

三、关于慢变分布函数、慢变场塌缩运动讨论

在讨论 δF_e 及 \mathbf{E}_i 的塌缩运动之前, 我们首先讨论 Zakharov 方程的一些性质. 如果从导得 δF_e , \mathbf{E}_i 和 ϵ 的原始方程 (7), (12) 及 (3) 式出发, 在二级高频场拍频近似下, Fourier 逆变换后不难获得所需要的 Zakharov 方程

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_c \right) \epsilon + \frac{3\nu_c^2}{2\omega_c} \nabla^2 \epsilon = \frac{\omega_c}{2n_0} n_c \epsilon, \quad (31)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Gamma_c \frac{\partial}{\partial t} \right) n_c - \nu_i^2 \nabla^2 n_c = \frac{1}{8\pi m_i} \nabla^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*). \quad (32)$$

这个方程组已有很多重要性质被揭露. Zakharov 和他的合作者首先证明了^[2-4]类似球层结构的 Caviton 是不稳定的, 具有类似冲击波自相似聚心运动规律, 调制不稳定产生的高维扰动能够导致波包塌缩运动, 或者伴随声辐射.

对于保守系统, 从方程 (31) 和 (32) 可以得到各种守恒关系和守恒量. 引入无量纲量

$$\frac{2}{3} \frac{\sqrt{\mu}}{\lambda_c} \mathbf{x} \rightarrow \xi, \quad \frac{2}{3} \omega_c \mu t \rightarrow \tau, \quad \frac{\sqrt{3} \epsilon}{(32\pi \mu n_0 T_e)^{1/2}} \rightarrow \mathbf{e},$$

(31) 和 (32) 式可以无量纲化. 于是准粒子数守恒给出

$$N = \int |\mathbf{e}(\xi, \tau)|^2 d^3 \xi \quad (33)$$

即

$$|\mathbf{e}(\xi, \tau)| \sim \xi^{-3/2}. \quad (34)$$

这表明 (17) 式的自相似解形式为^[4]

$$|\mathbf{e}| = \frac{1}{\tau} \phi \left(\frac{\xi}{\tau^{2/3}} \right), \quad \int \phi(\xi) d^3 \xi = 1. \quad (35)$$

因此, 当 Caviton 向球心塌缩时, $\phi(\xi) \rightarrow \infty$, 对 $\tau < 1$, 就有 $|\mathbf{e}| \rightarrow \infty$.

大量数值解都肯定了^[5-8]Zakharov 方程具有 Cavitons 行为, 并表明了有多个 Cavitons 解的性质. 事实上, 调制不稳定性使原始一个大尺度波包破碎成为一系列小尺度波包之和, 正是它们在调制相互作用发展过程中形成了很多 Cavitons.

在低频波相速度小于离子热速度情况下, Zakharov 方程退化为非线性 Schrödinger 方程. Goldman 和 Nicholson^[9]利用维里定理证明了非线性 Schrödinger 方程所描述的波包平均平方宽度随时间变化关系为

$$\langle \delta x^2 \rangle = A t^2 + B t + C - (D - 2) \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' I(t''), \quad (36)$$

其中

$$I(t) = \int |\epsilon|^4 d^D x,$$

D 为空间维数, $A < 0$ 为运动常数. 因此, 当 $D \geq 2$ 时, 随着时间 t 的增大, 波包总是不断地塌缩.

上述有趣的结论虽然是从 Захаров 方程组得出, 但是前面已经提到, Захаров 方程组中的密度方程(32)是由 δF_e , 方程(7)和 E_e , 方程(12)耦合而来, 因此, 方程(10), (14)和(17)与 Захаров 方程是等价的. 这样, 利用 Захаров 方程求得的 ϵ 从(14)和(17)式就可自然求得 δF_e 和 E_e , 并立刻可知 ϵ 的塌缩性质必然使 δF_e 和 E_e 也具有塌缩行为. 这一点还可从一维行波解结果(26)和(28)式直接看出来, 由于 $\epsilon(\xi)$ 具有 Soliton 性质, δF_e 和 E_e 的解直接与 $\epsilon(\xi)$ 有关而出现了 Soliton 行为.

参 考 文 献

- [1] 贺贤士, 物理学报, **32**(1983), 325.
- [2] В. Е. Захаров, ЖЭТФ, **62**(1972), 1745.
- [3] Л. М. Дегтярев и пр., ЖЭТФ, **67**(1974), 533.
- [4] А. Г. Литвак, Г. М. Фрайман, Л. Д. Юнаковский. Письма в МЭТФ, **19**(1974), 23.
- [5] Л. М. Дегтярев, В. Е. Захаров, Динамика Ленгмюровского коллапса, 第二次等离子体理论国际会议, 基辅, (1974).
- [6] D. R. Nicholson, *Physica Scripta*, **27**(1983), 77.
- [7] N. R. Pereira, R. N. Sudan, J. Denavit, *Phys. Fluids*, **20**(1977), 936.
- [8] D. R. Nicholson and M. V. Goldman, *Phys. Fluids*, **21**(1978), 1766.
- [9] M. V. Goldman and D. R. Nicholson, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 406.

THE INTERACTION OF PARTICLES WITH CAVITONS IN PLASMA

HE XIAN-TU

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, P. O. Box 8009, Beijing)

ABSTRACT

Starting from Vlasov-Doisson equations, the coupled dynamics equations for slowly varying electron distribution function δF_e , slowly varying field E_e , and fast varying field E are derived and the system of above equations is analytically solved. Thus, the interactions of the particles distribution functions with solitons are revealed. Furthermore, the collapse motions of δF_e , E_e , E for higher dimensions and their many cavitons behavior are discussed.