第36卷 第7期 物理学报 Vol. 36, No. 7
1987年7月 ACTA PHYSICA SINICA July, 1987

任意磁场位形下弱相对论等离子体的普遍色散关系*

郭世宠 蔡诗东
(中国科学院物理研究所)

1986年4月29日收到

提 要

由相对论迴旋动力论方程出发，推导出弱相对论非均匀等离子体的普遍色散关系．该色散关系可以适用于任意的磁场位形和任意有限频率．在色散关系中把带有速度平方项分母的奇异积分用等离子体漂移色散函数解析地表示出来，从而可以把这一结果用于较系统地解析或半解析地研究由弱相对论效应，磁场的梯度和曲率，迴旋频移等共振驱动的各种微观不稳定性的性质． 由于推导时考虑了温度各向异性的麦氏分布函数，因而可以直接推广并应用到损失锥非平衡分布的情况．文中还演示了它在低杂漂移不稳定性研究中的应用．由该色散关系出发，可以简捷并系统地得到 Drake 等人[9]的结果．

一、引 言

磁约束的高 β 或高能量的等离子体的性质是十分重要且已受到广泛注意的问题．由于现代大规模磁约束聚变装置的温度、密度都比较高，加之在加热和稳定性等问题中使用不同类型的高能等离子体分量，高能粒子的数量和效应逐渐加大，因而使得这一领域的研究尤为迫切和突出．在高 β 磁约束等离子体中的线性波的性质，如稳定性和传播，辐射和吸收等等，常常与由均匀等离子体理论直接地推广或用简单的模型计算所得的结果有定性的不同．这是由于等离子体的相对论性以及等离子体和磁场的不均匀性提供了重要的附加效应，例如：新的波-粒共振的渠道，模的转换，波的捕获，自由能源等等．在实验室中的迴旋激射（cyclotron maser）和空间等离子体中[1]也都有类似于上述的情况．

从60年代以来就有很多工作讨论密度、温度、磁场等不均匀的等离子体中波的性质．据作者所知，对于磁场不均匀性产生的漂移，处理办法大致有以下几种：认为磁漂移是小量，把分母上的磁漂移频率(含有速度的平方项)泰勒展开到分母上去[2]．或者为避免在速度空间积分时遇到无法解析处理的复杂奇点，引入一个等效力来代替磁漂移[3]．这些方法无法研究磁漂移所驱动的各种微观不稳定性的性质．再者是对某些特定的参数范围做数值积分，这样就不能作较全面的解析分析．

为了对任意磁场位形约束下的高 β 等离子体中波的性质做一个全面的、较系统的解

* 中国科学院科学基金资助的课题．

析或半解析的研究，我们从相对论的迴旋动力论方程出发，利用我们最近发展的漂移色散函数的数学表达方法[1)]，解析地得到在 WKB 近似下的一般色散关系，本征方程及局域近似下的介电张量．这一结果可以用于研究由磁场梯度、曲率、迴旋频移以及弱相对论效应所驱动的各种微观不稳定性及本征模的性质．

二、色散关系的推导

相对论迴旋动力论方程[4]在弱相对论近似下的 WKB 表示形式为

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\phi}=8\pi^2\sum_j q\int\frac{Bd\mu d\varepsilon}{|u_{/\!/}|}\left\{\frac{q}{m_0}\left[\tilde{\phi}\frac{\partial F_0}{\partial\varepsilon}+\left(\tilde{\phi}-\frac{u_{/\!/}\tilde{A}_{/\!/}}{c}\right)\frac{\partial F_0}{B\partial\mu}\right]+\sum_l\langle\delta G_g\rangle_l J_l\left(\frac{k_\perp u_\perp}{\Omega}\right)\right\},\tag{1}$$

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{A}_{/\!/}=\frac{8\pi^2}{c}k_\perp\sum_j q\int\frac{Bd\mu d\varepsilon}{|u_{/\!/}|}u_{/\!/}\left\{\frac{q}{m_0}\left(\tilde{\phi}-\frac{u_{/\!/}\tilde{A}_{/\!/}}{c}\right)\frac{\partial F_0}{B\partial\mu}+\sum_l\langle\delta G_g\rangle_l J_l\left(\frac{k_\perp u_\perp}{\Omega}\right)\right\},\tag{2}$$

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{B}_{/\!/}=\frac{8\pi^2}{c}k_\perp\sum_j q\int\frac{Bd\mu d\varepsilon}{|u_{/\!/}|}u_\perp\sum_l\langle\delta G_g\rangle_l J_l\left(\frac{k_\perp u_\perp}{\Omega}\right).\tag{3}$$

其中

$$k^2=k_\perp^2-(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}_x)(B_0^{-1}\boldsymbol{e}_{/\!/}\cdot\boldsymbol{\nabla}_x),$$

$$\langle\delta G_g\rangle_l=-\left(\frac{q}{m_0}\right)\langle\delta\phi_g\rangle_l\left(\frac{\partial F_0}{B\partial\mu}\right)+\langle\delta H_g\rangle_l,$$

$$\langle\delta H_g\rangle_l=i\frac{q}{m_0}q_lP_l(F_0)\langle L_g\rangle_l^{-1}\langle\delta\phi_g\rangle_l,$$

$$P_l(F_0)=\left[\omega\frac{\partial}{\partial\varepsilon}+l\Omega\frac{\partial}{B\partial\mu}+(\boldsymbol{k}_\perp\times\boldsymbol{e}_{/\!/}/\Omega)\cdot\boldsymbol{\nabla}_x\right]F_0,\tag{4}$$

$$\langle\delta\phi_g\rangle_l=J_l\left(\frac{k_\perp u_\perp}{\Omega}\right)\left[a_l\tilde{\phi}-u_{/\!/}\frac{\tilde{A}_{/\!/}}{c}-i\left(\frac{l\Omega}{k_\perp^2c}\right)(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}_x)\left(\frac{\tilde{A}_{/\!/}}{B_0}\right)\right],$$

$$\langle L_g\rangle_l=\hat{u}_{/\!/}\boldsymbol{e}_{/\!/}\cdot\boldsymbol{\nabla}_x-i\left[\left(1+\frac{u^2}{2c^2}\right)\omega-\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{u}_D-l(\Omega-\omega_\eta)\right],$$

$$\hat{u}_{/\!/}=u_{/\!/}+\left(\frac{u_\perp^2}{\partial\Omega}\right)\boldsymbol{e}_{/\!/}\cdot\boldsymbol{\nabla}_x\times\boldsymbol{e}_{/\!/},\tag{5}$$

$$\omega_\eta=\langle\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\eta\rangle_0=u_{/\!/}[\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_{/\!/}\cdot\boldsymbol{\nabla}_x\times\boldsymbol{e}_2)-\boldsymbol{e}_{/\!/}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_x\times\boldsymbol{e}_{/\!/})/2],$$

$$\boldsymbol{u}_D=\boldsymbol{u}_d+\gamma\boldsymbol{v}_E;\ \boldsymbol{v}_E=-\boldsymbol{\nabla}_x\phi_0\times\boldsymbol{e}_{/\!/}/B_0,$$

$$\boldsymbol{u}_d=\boldsymbol{e}_{/\!/}\times\left[\left(\frac{u_\perp^2}{2}\right)\boldsymbol{\nabla}\times\ln B+u_{/\!/}^2\boldsymbol{e}_{/\!/}\cdot\boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{e}_{/\!/}\right]/\Omega,$$

$$\boldsymbol{u}=\gamma\boldsymbol{v};\ \gamma=\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}\simeq1+\frac{u^2}{2c^2},$$

$$\mu=\frac{u_\perp^2}{2B};\ \varepsilon=c(u^2+c^2)^{1/2}+\frac{q\phi_0}{m_0}\simeq c^2\left(1+\frac{u^2}{2c^2}\right)+\frac{q\phi_0}{m_0},$$

1) 蔡诗东、郭世宠、沈解伍、许怀东、，全国核聚变与等离子体物理年会第二次会议邀请报告，合肥（1985）．

$$\Omega=\frac{qB_0}{m_0c};\ a_l=1-l\frac{\omega\Omega}{k_\perp^2c^2};$$

$$q_l=1+l\boldsymbol{k}_\perp\times\boldsymbol{e}_{/\!/}\cdot\nabla_x\frac{1}{k_\perp^2}.$$

m_0为静止质量，F_0 为平衡态分布函数，B，A，ϕ 分别表示磁场、矢势和电势，符号顶上带有"～"者为扰动量，右下标有"0"者为平衡量，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_{/\!/}$ 组成局域的正交单位基矢，$\boldsymbol{e}_{/\!/}=\boldsymbol{B}/B$，$\eta$ 为粒子在速度空间的迴旋角，ω_η 为迴旋频移，q_l 中的算符表示对后面的所有平衡量作用，当波的频率 $\omega\gtrsim\Omega$ 时．q_l 中含算符的修正项有可能是重要的[5]．

(1)至(3)式表示的迴旋动力论方程是在粒子的拉摩半径 ρ 远小于平衡等离子体和磁场的特征尺度 L_0 条件下推导出来的，精确到 ρ/L_0 量级． WKB 近似意味着 $|k_\perp L_0|\gg1$ ($k_\perp$ 为垂直磁场方向的波数)． 在推导中使用了洛伦兹规范．在弱相对论近似下，我们仅保留在共振分母中以及分布函数的指数上的相对论因子 γ 并将其展开．

我们从上述迴旋动力论方程组出发，考虑各向异性的麦氏分布作为平衡态的分布函数

$$F_0(\mu,\ \varepsilon,\ \boldsymbol{x},\ \delta,\ \alpha_\perp)=\frac{N(\boldsymbol{x})}{\pi^{3/2}\alpha_{/\!/}(x)\alpha_\perp^2(x)}\exp\left[-\frac{2(\varepsilon-c^2)}{\alpha_{/\!/}^2(x)}+\left(\frac{1}{\alpha_{/\!/}^2(x)}-\frac{\delta}{\alpha_\perp^2(x)}\right)2\mu B(x)\right].\tag{6}$$

这里

$$N(x)=n(x)e^{\frac{2q\phi}{m_0}\left(\frac{1}{\alpha_{/\!/}^2(x)}-\frac{1}{\alpha_\perp^2(x)}\right)}.$$

δ 是人为引进的参数，在后面讨论非平衡的损失锥分布时会用到(见第三节)． 对于单纯的各向异性麦氏分布的情形，$\delta=1$．

在以下的推导中只限于考虑飞行粒子，也就是说，在具有捕获效应的磁场位形中，我们所感兴趣的波的频率 ω 远大于粒子的反弹频率 ω_b． 将(6)式代入(4)式，得到

$$\begin{aligned}P_l(F_0)=\frac{1}{\alpha_\perp^2}\Bigg\{\Bigg[&-\tilde{\omega}_l+\omega_{*n}+\left(\frac{\alpha_\perp^2}{\alpha_{/\!/}^2}-1\right)\omega_E\\&+2\,\omega_{*\perp}\left(\frac{2q\phi_0}{m\alpha_\perp^2}-1\right)-\omega_{*/\!/}\Bigg]\\&+\left[2\,\omega_{*/\!/}\frac{v_{/\!/}^2}{\alpha_{/\!/}^2}+\left[2\,\delta\omega_{*\perp}+\left(\frac{\alpha_\perp^2}{\alpha_{/\!/}^2}-\delta\right)\omega_{*B}\right]\frac{v_\perp^2}{\alpha_\perp^2}\right]\Bigg\}2\,F_0.\end{aligned}\tag{7}$$

$$\omega_{*n}=\frac{\alpha_\perp^2}{2}(\boldsymbol{k}_\perp\times\boldsymbol{e}_{/\!/}/\Omega)\cdot\frac{\nabla_x n}{n}$$

$$\omega_E=\frac{q\phi_0}{m_0}(\boldsymbol{k}_\perp\times\boldsymbol{e}_{/\!/}/\Omega)\cdot\frac{\nabla_x\phi_0}{\phi_0}=\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{v}_E;$$

$$\omega_{*\perp}=\frac{\alpha_\perp^2}{2}(\boldsymbol{k}_\perp\times\boldsymbol{e}_{/\!/}/\Omega)\frac{\nabla_x\alpha_\perp}{\alpha_\perp},$$

$$\omega_{*/\!/}=\frac{\alpha_\perp^2}{2}(\boldsymbol{k}_\perp\times\boldsymbol{e}_{/\!/}/\Omega)\frac{\nabla_x\alpha_{/\!/}}{\alpha_{/\!/}},$$

$$\omega_{*B}=\frac{\alpha_\perp^2}{2}(\boldsymbol{k}_\perp\times\boldsymbol{e}_{/\!/}/\Omega)\cdot\frac{\nabla_x B}{B},$$

$$\tilde{\omega}_l = \frac{\alpha_\perp^2}{\alpha_\parallel^2}\,\omega - l\Omega\left(\frac{\alpha_\perp^2}{\alpha_\parallel^2} - \delta\right).$$

再将 $\langle L_g\rangle^{-1}F_0$ 写成以下形式：

$$\langle L_g\rangle^{-1}F_0 = \frac{N}{\pi^{3/2}\alpha_\perp^2\alpha_\parallel}\int_0^\infty d\tau\exp\left\{-\frac{u_\parallel^2}{\alpha_\parallel^2}(1-ib\tau) + i\frac{u_\parallel}{\alpha_\parallel}h\tau - \frac{u_\perp^2}{\alpha_\perp^2}(1-ia\tau) + i(\omega-l\Omega)\tau - i\omega_E\tau\right\}. \tag{8}$$

$$a = \frac{\alpha_\perp^2\omega'}{2c^2} - \omega_{*B} - \frac{s_1k_\parallel}{2\Omega}\alpha_\perp^2,\qquad h = (k_\parallel - ls_2)\alpha_\parallel,$$

$$b = \frac{\alpha_\parallel^2\omega'}{2c^2} - 2\omega_{*\kappa},\qquad \omega' = \omega - \omega_E,$$

$$s_1 = \boldsymbol{e}_\parallel\cdot\boldsymbol{\nabla}_x\times\boldsymbol{e}_\parallel,\quad s_2 = \boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_\parallel\cdot\boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{e}_2) - \boldsymbol{e}_\parallel\cdot(\boldsymbol{\nabla}_x\times\boldsymbol{e}_\parallel)/2,$$

$$\omega_{*\kappa} = \frac{\alpha_\parallel^2}{2}\left[k_\perp\times\frac{\boldsymbol{e}_\parallel}{\Omega}\cdot(\boldsymbol{e}_\parallel\cdot\boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{e}_\parallel)\right].$$

在(8)式中要求 $\mathrm{Im}\omega > 0$，对于 $\mathrm{Im}\omega < 0$ 的情况可以用解析延拓的办法进行讨论.

对于方程(1)—(3)作速度空间的积分，再经过复杂的代数运算，得到如下色散关系：

$$\left\{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}\right\}\cdot\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}\\ \tilde{A}_\parallel\\ \tilde{B}_\parallel\end{pmatrix} = 0. \tag{9}$$

其中 $\mathbf{I}$ 为单位张量，

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \Gamma + \sum_l q_l\sum_j\frac{2\omega_{pj}^2}{\omega^2}\int_0^\infty d\tau e^{\sigma}I_l(\lambda)e^{-\lambda}\left\{\left[\omega_{*n} - \tilde{\omega}_l + \left(\frac{\alpha_\perp^2}{\alpha_\parallel^2} - 1\right)\omega_E\right]\mathbf{M}_1 + 2\omega_{*\perp}\left[\left(\frac{2q\phi_0}{m\alpha_\perp^2} - 1\right)\mathbf{M}_1 + 2\delta\mathbf{M}_2\right] + \omega_{*\parallel}(2\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1) + \omega_{*B}\left(\frac{\alpha_\perp^2}{\alpha_\parallel^2} - \delta\right)\mathbf{M}_4\right\}. \tag{10}$$

$$\Gamma_{11} = \sum_j\frac{2\omega_{pj}^2}{\delta\alpha_\parallel^2},\quad \Gamma_{33} = -\sum_j\frac{\omega_{pj}^2}{c^2\delta^2}\left(\frac{\alpha_\perp^2}{\alpha_\parallel^2} - \delta\right),$$

$$\Gamma_{22} = 0,\quad \Gamma_{\mu\nu} = 0\ (\mu\neq\nu),\quad \omega_{pj}^2 = \frac{4\pi ne^2}{m_j},$$

$$\mathbf{M}_1(\sigma_{\mu\nu}, p_i, Q_j) = \begin{bmatrix}\sigma_{11}p_1Q_1 & \sigma_{12}p_4Q_1 + \sigma'_{12}p_1Q_1 & \sigma_{13}p_1Q_3\\ \sigma_{21}p_4Q_1 & \sigma_{22}p_2Q_1 + \sigma'_{22}p_4Q_1 & \sigma_{23}p_4Q_3\\ \sigma_{31}p_1Q_3 & \sigma_{32}p_4Q_3 + \sigma'_{32}p_1Q_3 & \sigma_{33}p_1Q_5\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_2(\sigma_{\mu\nu}, p_i, Q_j) = \mathbf{M}_1(\sigma_{\mu\nu}, p_i, Q_{j+1}),$$

$$\mathbf{M}_3(\sigma_{\mu\nu}, p_i, Q_j) = \mathbf{M}_1(\sigma_{\mu\nu}, p_{i+1}, Q_j),$$

$$\sigma_{11} = -i\frac{\omega^2}{\alpha_\perp^2}a_l,\qquad \sigma_{12} = -\frac{\omega^2\alpha_\parallel}{\alpha_\perp^2c},$$

$$\sigma'_{12} = -\frac{\omega^2}{\alpha_\perp^2}s_g,\qquad \sigma_{13} = -i\frac{\omega^2}{\Omega c},$$

$$\sigma_{21} = i\frac{\omega^2\alpha_\parallel}{c\alpha_\perp^2}a_l,\qquad \sigma_{22} = i\frac{\omega^2\alpha_\parallel^2}{c^2\alpha_\perp^2},$$

$$\sigma'_{23} = -i\frac{\omega^2\alpha_{\parallel}}{c\alpha_{\perp}^2}s_g, \qquad \sigma_{23} = \frac{\omega^2\alpha_{\parallel}}{c^2\Omega},$$

$$\sigma_{31} = i\frac{k_{\perp}^2\omega^2}{c\Omega}a_l, \qquad \sigma_{32} = \frac{k_{\perp}^2\alpha_{\parallel}}{c^2\Omega}\omega^2,$$

$$\sigma'_{32} = \frac{k_{\perp}^2\omega^2}{c\Omega}s_g, \qquad \sigma_{33} = i\frac{\omega^2}{c^2},$$

$$s_g\tilde{A}_{\parallel} = \frac{l\Omega}{ck_{\perp}^2}\boldsymbol{B}\cdot\nabla_x\left(\frac{\tilde{A}_{\parallel}}{B}\right), \ \lambda = \frac{k_{\perp}^2\alpha_{\perp}^2}{2\Omega^2(\delta - ia\tau)},$$

$$\sigma = -\frac{h^2}{4b^2} + \frac{h^2}{4b^2(1 - ib\tau)} + iz\tau,$$

$$z = -\frac{h^2}{4b} + (\omega - l\Omega) - \omega_E, \ p_1 = \frac{1}{(1 - ib\tau)^{1/2}},$$

$$p_2 = \frac{1}{2}p_1^3 + \frac{h^2}{4b^2}(p_1 - 2p_1^3 + p_1^5),$$

$$p_3 = \frac{3}{4}p_1^5 + \frac{3h^2}{4b^2}(p_1^3 - 2p_1^5 + p_1^7) + \frac{h^4}{16b^4}(p_1 - 4p_1^3 + 6p_1^5 - 4p_1^7 + p_1^9),$$

$$p_4 = -i\frac{h}{b}\left(\frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_1^3\right),$$

$$p_5 = -i\frac{3}{4}\frac{h}{b}(p_1^3 - p_1^5) - i\frac{h^3}{8b^3}(p_1 - 3p_1^3 + 3p_1^5 - p_1^7),$$

$$Q_1 = \frac{1}{\delta - ia\tau}, \ Q_2 = Q_1^2\left[(1-\lambda) + \lambda\frac{I'_l}{I_l}\right], \ Q_3 = \frac{Q_1^2}{2}\left(1 - \frac{I'_l}{I_l}\right),$$

$$Q_4 = Q_1^2\cdot\frac{2\Omega^2}{k_{\perp}^2\alpha_{\perp}^2}\left[\lambda(1-\lambda) - \frac{l^2}{2} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda\right)\frac{I'_l}{I_l}\right],$$

$$Q_5 = \frac{Q_1\Omega^2}{k_{\perp}^2\alpha_{\perp}^2}\left[l^2 + 2\lambda^2\left(1 - \frac{I'_l}{I_l}\right)\right],$$

$$Q_6 = Q_1^2\frac{\Omega^2}{k_{\perp}^2\alpha_{\perp}^2}\left[l^2 + 8\lambda^2 - 3\lambda l^2 - 4\lambda^3 + \lambda(l^2 - 4\lambda + 4\lambda^2)\frac{I'_l}{I_l}\right],$$

$I_l(\lambda)$ 为虚宗量贝塞耳函数.

可以看出,(9)式中包含 ω_{*n}, $\omega_{*\perp}$, $\omega_{*\parallel}$, ω_E, ω_{*B} 的项,分别表示密度梯度、垂直与平行方向的温度梯度、电场漂移、磁场梯度漂移效应在分子中的贡献，而磁场曲率和梯度漂移、迴旋频移和弱相对论性对于波-粒共振效应的贡献都包含在量 a 和 b 中.

对于弱相对论均匀等离子体的情况，在(10)式中令所有各种漂移频率为零,仅保留 $\tilde{\omega}_l$ 项,且 $a = \frac{\alpha_{\perp}^2\omega}{2c^2}$, $b = \frac{\alpha_{\parallel}^2\omega}{2c^2}$, 可以重复已有的弱相对论、均匀磁化等离子体的色散关系[6]. 对于非相对论均匀等离子体的情形,可以进一步令 $a = 0$, $b = 0$, (9)式可以退化到一般均匀磁化等离子体的普遍色散关系[7]. 这里要附带说明的是,对于非相对论、非均匀磁化等离子体的情形,如果为了简单,使用库仑规范,色散关系可以表示为

$$\left\{\begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ \dfrac{\omega k_{\parallel}}{c} & k^2-\dfrac{\omega^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & k^2-\dfrac{\omega^2}{c^2} \end{bmatrix}+\boldsymbol{\varepsilon}'\right\}\begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{A}_{\parallel} \\ \tilde{B}_{\parallel} \end{pmatrix}=0. \tag{11}$$

这里的 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 与(10)式中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的差别仅有两点：1)将 $\mathbf{M}_1$ 中的系数 σ_{1v} 中的量 a_l 取1. 2)令 $a=-\left(\omega_{*B}+\dfrac{s_1 k_{\parallel}}{2\Omega}\alpha_{\perp}^2\right)$, $b=-2\omega_{*s}$.

如果将(9)式中的张量部分记作 $\boldsymbol{\Lambda}$, 在局域近似下,在基矢 $(\tilde{\phi}, \tilde{A}_{\parallel}, \tilde{B}_{\parallel})$ 上表示的色散关系应为行列式 $|\Lambda|=0$. 此外,我们注意到在 WKB eikonal 近似下有 $ik_{\perp}\longleftrightarrow\dfrac{\partial}{\partial x_{\perp}}$ 相对应的关系,当垂直磁场方向的波长远大于粒子的迴旋半径时,即 $k_{\perp}\rho_i\ll 1$, 可以将方程(9)作小参量展开,保留适当的项,将其中的 $k_{\perp}$ 还原为算符,就可以得到模的本征方程组.

为了进一步解析处理介电张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 这里引入等离子体漂移色散函数[7],表示为

$$\mathscr{F}_{mn}(z, a, b)=-i\int_0^{\infty}d\tau\,\frac{e^{iz\tau+\frac{y^2}{1-ib\tau}-y^2}}{(1-ia\tau)^m(1-ib\tau)^{n-\frac{1}{2}}}\qquad \mathrm{Im}\,\omega>0. \tag{12}$$

这里　$$y^2=\frac{h^2}{4b^2},\quad z=(\omega-l\Omega-\omega_E)-y^2 b,$$

对这一函数的普遍解析分析,我们已在其它地方作了详细讨论,这里只给出两种最常用的极限情形

1) $h=0$, $a=b$ 或 $a=0$

$$\begin{aligned} F_{m,n}(z, 0, b)&=-i\int_0^{\infty}d\tau\,\frac{e^{iz\tau}}{(1-ib\tau)^{n-\frac{1}{2}}} \\ &=\frac{1}{b}\left\{\sum_{j=0}^{n-2}\left(-\frac{z}{b}\right)^j\frac{\Gamma\left(n-\frac{3}{2}-j\right)}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right. \\ &\quad\left.+\frac{\pi^{1/2}}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{z}{b}\right)^{n-2}\left[i\left(\frac{z}{b}\right)^{\frac{1}{2}}Z\left(i\left(\frac{z}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中 Z 为等离子体色散函数.

2) $h=0$, $b=0$

$$F_{mn}(z, a, 0)=-i\int_0^{\infty}d\tau\,\frac{e^{iz\tau}}{(1-ia\tau)^m}=\frac{e^{\frac{z}{a}}}{a}E_m\left(\frac{z}{a}\right), \tag{14}$$

其中 E 为指数积分函数.

当 $\mathrm{Im}\,\omega<0$ 时,函数 F_{mn} 可以利用函数 Z 和 E 的解析性质作适当的解析延拓.

当 $y^2\ll 1$ 时（经常相应于 $k_{\parallel}/k_{\perp}^2\ll 1$ 的情形），可以考虑将 e^{σ} 展开[6]，把指数上 $\dfrac{y^2}{1-ib\tau}$ 项化为级数求和的形式. 又当 a 与 b 的值较接近时可以采用文献[6]中的展开

办法，将双脚标的函数 F_{mn} 化为(13)和(14)式的情形. 由以上可见，利用等离子体漂移色散函数，我们可以得到色散关系的完全解析表达式.

三、由各向异性的色散关系推广到非平衡损失锥分布的色散关系

考虑以下两种等效损失锥分布:

$$F_{lc}^{(1)} = \frac{N}{\pi^{3/2}\alpha_{/\!/}\alpha_{\perp}^2 m!}\left(\frac{2\mu B}{\alpha_{\perp}^2}\right)^m \exp\left[-\frac{2(\varepsilon - c^2)}{\alpha_{/\!/}^2} + \left(\frac{1}{\alpha_{/\!/}^2} - \frac{1}{\alpha_{\perp}^2}\right) 2\mu B\right], \tag{15}$$

其中

$$N = n e^{\left(\frac{1}{\alpha_{/\!/}^2} - \frac{1}{\alpha_{\perp}^2}\right)\frac{2q\phi_0}{m_0}},$$

$$F_{lc}^{(2)} = \frac{n}{\pi^{3/2}\alpha_{/\!/}(\alpha_{\perp 1}^2 - \nu\alpha_{\perp 2}^2)} e^{-\frac{2(\varepsilon - c^2)}{\alpha_{/\!/}^2}}\left(e^{2\mu B\left(\frac{1}{\alpha_{/\!/}^2} - \frac{1}{\alpha_{\perp 1}^2}\right)} - \nu e^{2\mu B\left(\frac{1}{\alpha_{/\!/}^2} - \frac{1}{\alpha_{\perp 2}^2}\right)}\right). \tag{16}$$

在(16)式的损失锥分布函数中没有包含有平衡电场存在的情况，即 $\phi_0 = 0$($\phi_0 \neq 0$ 的情形用(16)式较为复杂)并取 $\alpha_{\perp 1}^2 > \alpha_{\perp 2}^2$，$\nu$ 为常数，且 $\nu \leqslant 1$. 把(15)，(16)式与各向异性的麦氏分布函数(6)式相比较可以得出如下关系:

$$F_{lc}^{(1)}(m \neq 0) = \frac{(-1)^m}{m!}\lim_{\delta \to 1}\frac{d^m}{d\delta^m} F_M(\varepsilon, \mu, \boldsymbol{x}, \delta, \alpha_{\perp}), \tag{17}$$

$$F_{lc}^{(2)} = \frac{1}{1 - \nu R} F_M(\varepsilon, \mu, \boldsymbol{x}, 1, \alpha_{\perp 1}) - \frac{\nu R}{1 - \nu R} F_M(\varepsilon, \mu, \boldsymbol{x}, 1, \alpha_{\perp 2}), \tag{18}$$

其中

$$R = \frac{\alpha_{\perp 2}^2}{\alpha_{\perp 1}^2}. \tag{18}$$

利用(17)和(18)式可以将方程(10)直接推广到这两种损失锥分布的情况

$$\varepsilon_{ij}^{(1)}(m \neq 0) = \frac{(-1)^m}{m!}\lim_{\delta \to 1}\frac{d^m}{d\delta^m}\varepsilon_{ij}(\delta, m = 0), \tag{19}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{1}{1 - \nu R}\varepsilon_{ij}(\alpha_{\perp 1}, \delta = 1) - \frac{\nu R}{1 - \nu R}\varepsilon_{ij}(\alpha_{\perp 2}, \delta = 1). \tag{20}$$

在(20)式中我们假设了 $R\left(= \frac{\alpha_{\perp 2}^2}{\alpha_{\perp 1}^2}\right)$ 不再是空间坐标的函数. 如果考虑 $R = R(\boldsymbol{x})$，则应在(20)式的 $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ 表达式中再附加一项 $\Delta\varepsilon_{ij}^{(2)}$，这一项可以用如下方法得到: 在方程(1)至(3)中只保留包含 $\langle\delta G_g\rangle_l$ 项的速度空间积分，且取 $\langle\delta G_g\rangle_l = \langle\delta H_g\rangle_l$，而

$$\langle\delta H_g\rangle_l = i\frac{q}{m}\delta P_l(F_0)\langle L_g\rangle^{-1}\langle\delta\phi_g\rangle_l.$$

这里

$$\delta P_l(F_0) = (\boldsymbol{k}_{\perp} \times \boldsymbol{e}_{/\!/}/\Omega)\cdot\frac{\nu\nabla_x R}{(1 - \nu R)^2}(F_1 - F_2), \tag{21}$$

$$F_i = F_M(\varepsilon, \mu, \boldsymbol{x}, 1, \alpha_{\perp i}) \qquad i = 1, 2.$$

积分后可以得到 $\Delta\varepsilon_{ij}$.

四、有限 β 值等离子体的低杂漂移不稳定性

现在把前面推导出的普遍色散关系用于讨论低杂漂移不稳定性.

低杂不稳定性是在具有较大密度梯度的等离子体中产生的，它的特征参数为 $\omega \sim \omega_{*ni}$, $k_{//}=0, k_{\perp}\rho_{es}\sim 1\left[\rho_{es}^2=\rho_e^2/2\tau,\ \tau=\frac{T_e}{T_i}\right]$. 由于在感兴趣的物理问题中常常 $\tau \ll 1$，而离子有很大的拉摩半径，我们假设离子是非磁化的，而电子是强磁化的，在高 β 等离子体中我们考虑电子的电磁效应以及电子 ∇B 漂移共振对稳定性的影响. 为了简化讨论，暂不考虑等离子体的温度梯度和磁场曲率，从而 $-\frac{\beta}{2}\frac{dn}{dr}=\frac{dB}{dr}$，并假设电子是各向同性的. 这样，普遍色散关系(9)式可以简化为

$$D=\begin{vmatrix} k^2-\frac{\omega^2}{c^2}+\chi_{e11}+\chi_{i11} & 0 & \chi_{e13} \\ 0 & k^2-\frac{\omega^2}{c^2}+\chi_{e22} & 0 \\ \chi_{e31} & 0 & k^2-\frac{\omega^2}{c^2}+\chi_{e33} \end{vmatrix}=0. \tag{22}$$

其中

$$\chi_{e11}=\frac{2\,\omega_{pe}^2}{\alpha_e^2}-i\frac{2\,\omega_{pe}^2}{\alpha_e^2}\int_0^\infty dt\,e^{i\omega t}(\omega_{*e}-\omega)I_0e^{-\lambda}Q_1,$$

$$\chi_{e13}=-i\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_{ec}}(\omega_{*ne}-\omega)\int_0^\infty dt\,e^{i\omega t}I_0e^{-\lambda}Q_3,$$

$$\chi_{e22}=i\frac{2\,\omega_{pe}^2}{c^2}\int_0^\infty d\tau\,e^{i\omega t}I_0e^{-\lambda}(\omega_{*e}-\omega)\frac{1}{2}Q_1,$$

$$\chi_{31}=-k^2\chi_{13},$$

$$\chi_{e33}=i\frac{2\,\omega_{pe}^2}{c^2}\int_0^\infty dt\,e^{i\omega t}(\omega_{*e}-\omega)I_0e^{-\lambda}Q_5.$$

在上式中如果把对 t 的积分利用(8)式所表示的方法还原成对速度空间中 $v_{\perp}$ 的积分，这一色散关系与 Drake 等人[8]所推导的色散关系完全相同. 由于 $k\rho_e \ll 1$，我们将贝塞耳函数作小宗量展开，得到计算色散关系所需要的几个分量为

$$D_{e11}=1+\frac{2\,\omega_{pe}^2}{k^2\alpha_e^2}+\frac{2\,\omega_{pe}^2}{k^2\alpha_e^2}(\omega_{*e}-\omega)\Big[F_{11}(\omega,a_e,0)-\frac{1}{2}\frac{k^2\alpha_e^2}{\Omega_e^2}F_{21}(\omega,a_e,0)\Big]+\chi_{i11},$$

$$D_{13}=\frac{\omega_{pe}^2}{k^2\Omega_e c}(\omega_{*e}-\omega)\Big[F_{21}(\omega,a_e,0)-\frac{3}{4}\frac{k^2\alpha_e^2}{\Omega_e^2}F_{31}(\omega,a_e,0)\Big],$$

$$D_{31}=-k^2D_{13},$$

$$D_{e33}=-\frac{\omega_{pe}^2\alpha_e^2}{c^2\Omega_e^2}(\omega_{*e}-\omega)\Big[F_{31}(\omega,\ a_e,\ 0)$$

$$-\frac{3}{4}\frac{k^2\alpha_e^2}{\Omega_e^2}F_{41}(\omega,\ a_e,\ 0)\Big]. \tag{23}$$

离子的部分 χ_{i11} 应由非磁化的色散关系推导出来[9]，得

$$\chi_{i11}=\frac{2\,\omega_{pi}^2}{k^2\alpha_i^2}\,[1+\xi_i Z(\xi_i)], \tag{24}$$

其中 $\xi_i=\frac{\omega-\omega_{*i}}{|k|v_i}$.

由于 $|\xi_i|\ll 1$, 在以下我们仅保留χ_{i11}对虚部的贡献. 在电子的响应部分中，我们注意到当 $\mathrm{Re}\,\frac{\omega}{a_e}<0$ 时，才有可能满足共振条件 $\omega+a_e\,\frac{v_\perp^2}{\alpha_e^2}=0$, 并假设 $\mathrm{Re}\omega>\mathrm{Im}\omega$, 可以将 F 函数表示为

$$F_{11}(\omega,\ a_e,\ 0)=\frac{e^{\frac{\omega}{a_e}}}{a_e}E_1\left(\frac{\omega}{a_e}\right)\simeq\frac{e^{\frac{\omega_r}{a_e}}}{a_e}\left[\,i\pi+E_i\left(\frac{\omega_r}{a_e}\right)\right]. \tag{25}$$

$$E_i\left(\frac{\omega_r}{a_e}\right)\equiv P\int_{\frac{\omega_r}{a_e}}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt,$$

$$mF_{m+1,1}(\omega,\ a_e,\ 0)=\frac{1}{a_e}\,[1-\omega F_{m,1}(\omega,\ a_e,\ 0)]. \tag{26}$$

将(25)，(26)式代入(23)式中，可分别求出色散关系的实部和虚部.

首先，在 $\left|\frac{\omega}{a_e}\right|\sim\left|\frac{\omega_{*i}}{a_e}\right|>1$ 的情况下，将 E_i 函数作大宗量展开，保留到一次项，可以得到流体近似下的色散关系

$$1+\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)+\frac{2\,\omega_{pi}^2}{k^2\alpha_i^2}\left[1+\frac{\beta_i}{2}(1+2\tau)\right]$$

$$-\frac{2\,\omega_{pi}^2}{k^2\alpha_i^2}\frac{\omega_{*i}}{\omega}\left[\left(1+\frac{\beta}{2}\right)(1+\beta_e)-\beta_e\right]$$

$$+\frac{2\,\omega_{pi}^2}{k^2\alpha_i^4}(1+\xi_i Z_i)=0. \tag{27}$$

在 $\tau\ll 1$ 的情形下得到

$$\frac{\omega}{\omega_{*i}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{\beta}{2}}\dfrac{k^2\rho_e^2}{2\,\tau}\left(1+\dfrac{\Omega_e^2}{\omega_{pe}^2}\right)}. \tag{28}$$

这一结果与其他作者所得结果完全一致[8,9].

在 $k\rho_e\to 0$ 的极限情况下，色散关系(22)式表示为

$$D=D_{11}-\frac{D_{13}D_{31}}{D_{33}}$$

$$=1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\left(1+\frac{\beta}{2}\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)I\right)+\xi_i\,Z_i$$

$$+\frac{\frac{\beta_i}{2}\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)^2 I^2}{1+\frac{\beta_e}{2}\frac{\omega}{a_e}(1-I)\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)}=0. \tag{29}$$

这里
$$I\equiv\frac{\omega}{a_e}\left[1-\omega F_{11}(\omega,\ a_e,\ 0)\right].$$

经过一系列代数运算可求得色散关系的虚部为

$$D_i=i\sqrt{\pi}\,\xi_i Z_i+i\pi\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_{*i}}+\frac{\beta}{2}\right)I_i, \tag{30}$$

其中
$$I_i=\mathrm{Im}I=-\frac{\omega^2}{a_e^2}e^{\frac{\omega}{a_e}}.$$

以上的(29),(30)式完全重复了 Jrake 等人的结果[8]. 再由

$$\frac{\partial D}{\partial\omega}=\frac{\omega_{*i}\left(1+\frac{\beta}{2}\right)}{\omega_r^2},$$

我们可以得到不稳定性的增长率 γ

$$\frac{\gamma}{\omega_{*i}}=\frac{\omega_r^2}{\omega_{*i}^2\left(1+\frac{\beta}{2}\right)}\left[\sqrt{\pi}\,\frac{\omega}{|k|v_i}\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}-1\right)-\pi\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}-1\right)\left(\frac{\omega}{\omega_{*i}}+\frac{\beta}{2}\right)\frac{\omega^2}{a_e^2}e^{\frac{\omega}{a_e}}\right]. \tag{31}$$

由这里可以看出,在一般情况下,离子的共振是起不稳定作用的,而电子的磁场梯度漂移共振是起稳定作用的. 在小电子拉摩半径极限下 ($k\rho_e\to 0$), $\omega_{*i}-\omega\sim O(\tau)$, ($\tau\ll 1$) 因而在 (31) 式中,离子的贡献为 $O(\tau)$, 电子的贡献为 $O\left(\frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}}\right)$; 当 τ 足够小时电子的贡献可以忽略. 当 $\tau\ll 1$ 但保持有限时,电子有可能使该模稳定化.

对于 $k\rho_e\sim 1$ 的更为复杂的情形,我们将另外作详细讨论.

五、讨论和总结

在本文中由相对论迴旋动力论方程出发,推导出弱相对论,磁约束等离子体的普遍色散关系. 这个色散关系包含了各种非均匀的效应,如密度、温度、磁场的非均匀性以及在垂直方向存在较弱的平衡电场的情形. 而且它可以适用于任意的磁场位形和任意有限频率. 在色散关系中把带有速度平方项的共振分母的奇异积分用等离子体漂移色散函数解析地表示出来,从而可以把这一结果用于较系统地解析或半解析地研究由弱相对论效应、磁场的梯度和曲率,迴旋频移等共振驱动的各种微观不稳定性的性质.

在推导以上的色散关系中,我们所用到的假设主要有: 1)粒子的拉摩半径远小于平衡等离子体的非均匀特征尺度,这一假设是迴旋动力论方程最基本的出发点. 2)应用了 WKB 近似, 这意味着垂直于磁场方向扰动的波长远小于平衡等离子体非均匀的特征长

度. 3) 我们所感兴趣的波的频率远大于捕获粒子的反弹频率，也就是说没有考虑捕获粒子的效应. 4)弱相对论近似,即 $u^2/c^2 \ll 1$.

这一色散关系可以直接推广到非平衡分布,如损失锥分布的情形.

本文的主要目的是给出普遍色散关系的表达式. 此外，为了演示这一色散关系的应用方法,我们用它研究了低杂漂移不稳定性的问题. 由这一普遍色散关系可以直接作简化推导出包含电子电磁效应,∇B 漂移共振效应等的低杂漂移不稳定性色散关系,它可以完全重复已有的结果,同时,我们可以用更系统的方法求出模的增长率并对其进行讨论.

很明显，由这一普遍色散关系出发去推导针对某一具体问题的非均匀等离子体色散关系是简单易行且直截了当的，特别是在研究非均匀、弱相对论等离子体所特有的波-粒共振效应方面，这--色散关系提供了系统的解析或半解析的处理方法. 它的应用将是非常广泛的. 我们应用它进行一系列的研究工作，例如: 非均匀磁场中的离子迴旋漂移不稳定性等等,这些工作今后将陆续发表.

参 考 文 献

[1] C. S. Wu, *Space Science Rev.*, **41**(1985), 215.
[2] 郭世宠、沈解伍、陈骝、蔡诗东，物理学报，**31**(1982)，17.
[3] N. A. Krall, *Advances in Plasma Physics,* **1**(1968), 153, 及其中引文.
[4] S. T. Tsai, J. W. Van Dam and L. Chen, Plasma Physics and Controlled Fusion, **26**(7), (1984), 907.
[5] H. L. Berk and R. R. Dominyuez, *Phys. Fluids.*, **26**(1983), 1825.
[6] S. T. Tsai, C. S. Wu, Y. D. Wang, S. W. Kang, *Phys. Fluids,* **24**(1981), 2186.
[7] S. T. Tsai and S. C. Guo, Proceeding of Sino-Japan Bilateral Workshop on statistical physics and Condensed Matter Theory, edited by Xie Xide, (World Scientific (1986), p. 240.
[8] J. F. Drake, J. D. Huba, N. T. Gladd, *Phys. Fluids,* **26**(1983), 2247.
[9] R. C. Davidson, N. T. Gladd, C. S. Wu and J. D. Huba, *Phys. Fluids,* **20**(1977), 301.

DISPERSION RELATION OF GENERAL MAGNETICALLY CONFINED WEAK RELATIVISTIC PLASMAS

GUO SHI-CHONG CAI SHI-DONG (S. T. TSAI)

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The dispersion relation for weak relativistic inhomogeneous plasma in general magnetic field configurations is derived from the relativistic gyrokinetic equations, which is valid for arbitrary frequencies. In the derivations the singular integrations with the quadratic denominator are represented by the drift plasma dispertion functions. This dispersion relation can be used to study the various micro instabilities driven by gradient and curvature of B, weak relativistic effects, and/or gyrofrequency shift. Extending the results to the nonequilibrium case such as loss-cone distribution is simple and straight forward. For demonstration, we apply it to investigate the lower hybrid drift instability. Using this dispersion relation we can recover the results of Drake et al. in a straight forward and much more transparent way.