

# 非线性环形光学腔中分岔混沌的新行为

赵 勇 霍 裕 平

(中国科学技术大学物理系) (中国科学院等离子体物理研究所)

1986年7月22日收到

## 提 要

利用数值模拟方法研究了非线性环形光学腔中的 Ikeda 方程,发现:长延时下,分岔图的拓扑结构、分岔方式、收敛速率以及周期窗口的结构都随参数  $B, \phi_0$  的取值不同而异. 短延时下,通过适当近似,将 Ikeda 方程化为带有一定记忆效应的迭代映象,所得到的近似系统显示出非倍周期分岔行为,并伴有一些奇特的周期窗口,混沌区中的无限嵌套的自相似结构变得模糊,不易分辨.

## 一、引 言

迄今为止,关于光学双稳中的分岔、混沌行为的研究已有不少结果<sup>[1-2]</sup>. 随着对该系统研究的不断深入,新的现象不断被发现. 由于强色散近似下的环形光学腔实际上是多稳的<sup>[1]</sup>,其动力学特性可以用 Ikeda 方程描写<sup>[2]</sup>,

$$\tau \frac{d}{dt} \phi(t) + \phi(t) = \pi\mu \{1 + 2B \cos[\phi(t - t_R) - \phi_0]\}. \quad (1)$$

这个方程具有以下一些特点:极长延时下退化为一维多峰映象;极短延时下退化为保守可积系统. 一般情形下受着两种机制的制约:一个是以差分形式体现的耗散性,它倾向于使系统出现分岔混沌的行为;另一个是以微分形式表现的保守可积性,它使系统倾向于确定论的过程. 这两种机制的同时存在使系统的时间演化行为具有非马尔可夫性<sup>[3]</sup>. 这些特点导致了它比通常的一维单峰映象、比微分耗散系统具有更为丰富而复杂的动力学行为.

本文中,我们采用数值模拟方法研究了其长延时和短延时下的行为. 其结果表明:长延时下,多峰映象导致分岔混沌行为的细节依赖于参数  $B, \phi_0$  的取值. 它表现为:分岔图的拓扑结构、分岔方式和收敛速率皆随  $B, \phi_0$  的取值不同而异,同时出现了新的周期窗口,如树分岔的周期三窗口等. 在短延时下,通过适当近似,将原方程化为带有一定记忆效应的一维映象. 这种计入了记忆效应的系统,其分岔图表现出非倍周期分岔行为和—些奇异的周期窗口,且混沌区中的无限嵌套的自相似结构变得非常模糊,不易分辨.

## 二、计算结果

### 1. 长延时情形

当  $t_R \gg \tau$  时,以  $T_R^{-1} = \tau/t_R$  为小量的一级近似结果可以表示成一维映象<sup>[3]</sup>

$$\phi_{n+1} = \mu\pi[1 + 2B \cos(\phi_n - \phi_0)]. \quad (2)$$

该动力学系统的基本周期是  $T_0 = 2(t_R + \tau)$ .

取  $B = 0.5$ ,  $\phi_0 = -\pi/2$ , 其分岔图是典型的单峰映象的行为 (图 1). 由于系统是多稳的, 因此分岔图中有多个分支 (这里只绘出了两支), 但每个分支都是拓扑等价的, 具有一维单峰映象的特征, 相应的分岔参数值见表 1.

表 1  $B = 0.5$ ,  $\phi_0 = -\pi/2$  时的分岔点数值

分岔点标号	1	2	3	4	5
临界值 $\mu^{(n)}$	0.37359	0.62562	0.68196	0.69405	0.69664
收敛参数 $\delta_n$	4.4734	4.6600	4.6680		

表 2  $B = 0.2$ ,  $\phi_0 = \pi$  时的分岔点数值

分岔点标号	1	2	3	4
临界参数 $\mu^{(n)}$	1.02199	1.61017	1.69296	1.70460
收敛参数 $\delta_n$	7.104	7.112		

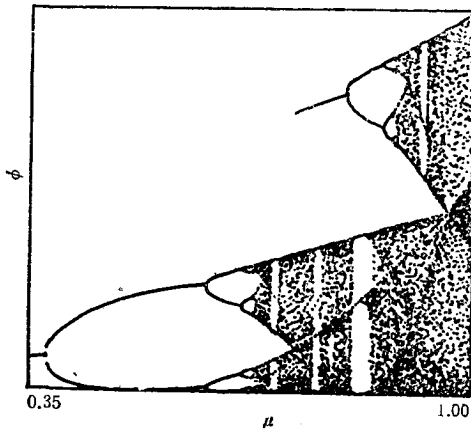


图 1

$B = 0.5$ ;  $\phi_0 = -\pi/2$ ;  $\Delta\mu = 0.0007$

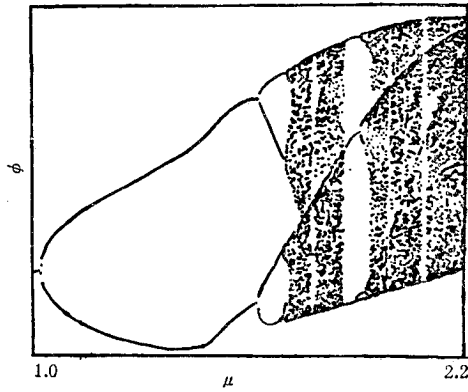


图 2

$B = 0.2$ ;  $\phi_0 = \pi$ ;  $\Delta\mu = 0.0012$

虽然在上述参数下的分岔行为与单峰映象的相同 (指每一支分岔图), 收敛常数也与 Feigenbaum 常数  $\delta = 4.66920\dots$  很接近, 然而这并不能表明映象 (2) 式具有的分岔类型都将会如此. 实际上, 当取  $B = 0.2$ ,  $\phi_0 = \pi$  时, 其分岔图具有比单峰映象更快的收敛速率 (图 2), 相应的参数见表 2. 此时收敛速率接近  $\delta = 7.284\dots$ .

由此可见, 映象 (2) 式的收敛速率并不是恒定的, 它随参数  $B$ ,  $\phi_0$  变化.

再则, 一维单峰映象的倍周期分岔行为是: 经过周期倍增直到进入混沌状态, 这种过程在分岔图的更精细的层次内无限重复, 成为无限嵌套的自相似结构. 对映象 (2) 式, 取  $B = 0.1$ ,  $\phi_0 = 0$  时, 出现了如图 3 所示的“间歇”分岔行为: 即当倍周期分岔进行到一定状态后, 系统不再向更高的周期态 (或混沌态) 进行, 而是进行逆向的合并过程, 逐渐回到定态. 这个“间歇”的状态随  $B$ ,  $\phi_0$  的不同取值可以是周期态 (如图 3 所示) 或是“准周期

态”(如图 4 所示)或是完全的混沌态(如图 5 所示)。类似的现象在文献 [4, 5] 中也有所见。然而,我们这里要强调的是另外的两个方面: 第一,这种正、反过程具有明显不同的收敛速率;第二,这种“间歇”分岔行为在更精细的层次上重复。

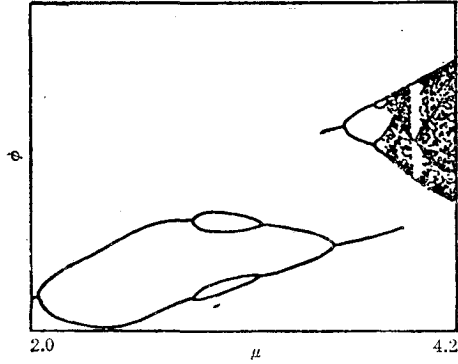


图 3

$$B = 0.1; \phi_0 = 0; \Delta\mu = 0.003$$

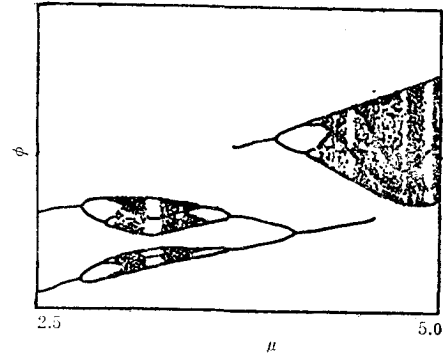


图 4

$$B = 0.1; \phi_0 = \pi/4; \Delta\mu = 0.0025$$

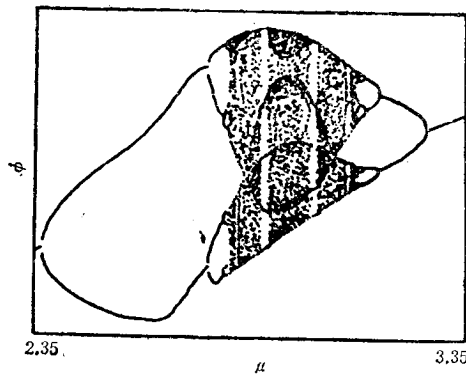


图 5

$$B = 0.1; \phi_0 = \pi/2; \Delta\mu = 0.002$$

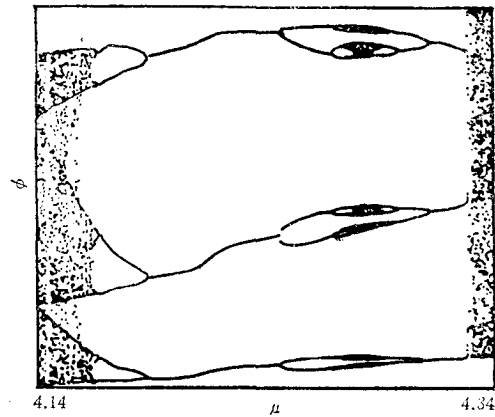


图 6

$$B = 0.1; \phi_0 = 0; \Delta\mu = 0.00025$$

第一点在以上的各分岔图(图 3 至图 5)中明显可见。为了阐明第二点,我们把分岔图局部放大(见图 6)。这是在周期三窗口中出现的“间歇”分岔行为。更进一步的研究还可表明,在更精细的层次内也重复着这种过程(见图 7)。

细致考察这些分岔行为,不难发现,在参数  $B$ ,  $\phi_0$  取值的一定范围内,“间歇”分岔行为可能成为一种无限嵌套的自相似结构。具有这种自相似结构的分岔图其拓扑性质与单峰映象的拓扑性质是不相同的。

在周期三窗口中,随着“间歇”态向混沌状态过渡,在一定的参数区出现突发的混沌行为,这相当于由一个“准周期三”的运动状态突变到湍态(图 8),其结果使得在  $A-A'$  之间形成了一个“树分岔”的周期三窗口,在  $B-B'$  之间形成了一个通常的切分岔的周期三窗口。由此看来,随着“间歇”行为的产生及发展,最终导致将一个周期三窗口分成两个性质不同的周期三窗口,特别是“树分岔”的周期三窗口在单峰映象中是不曾出现过的。

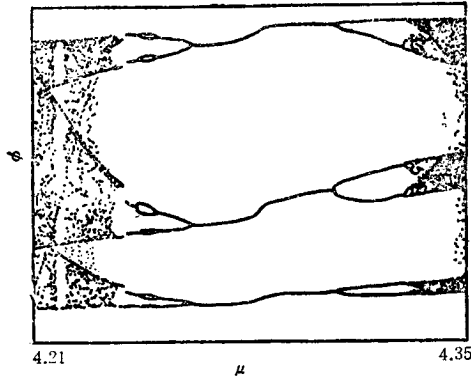


图 7

$B = 0.1; \phi_0 = \pi/16; \Delta\mu = 0.00015$

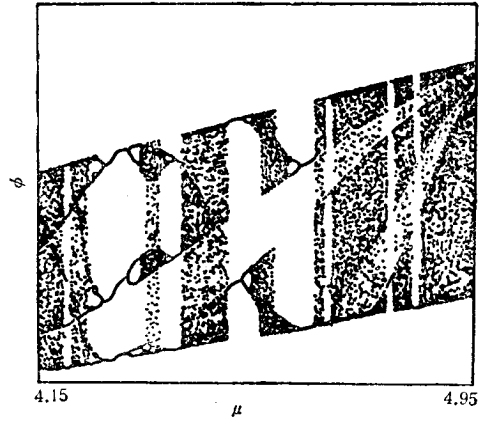


图 8

$B = 0.1; \phi_0 = \pi/16; \Delta\mu = 0.0008$

### 2. 短延时情形

当  $T_R < 1$  时, 系统 (1) 式可以近似化成如下的迭代映象 (见附录):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \pi\bar{\mu}(T_R)\{1 + 2B \cos(x_n - \phi_0) + e^{-T_R}[1 + 2B \cos(y_n - \phi_0)]\}, \\ y_{n+1} &= \pi\bar{\mu}(T_R)[1 + 2B \cos(y_n - \phi_0)] + e^{-T_R}z_n, \\ z_{n+1} &= \pi\bar{\mu}(T_R)[1 + 2B \cos(x_n - \phi_0)]. \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\bar{\mu}(T_R) = T_R e^{-T_R} \mu$ .

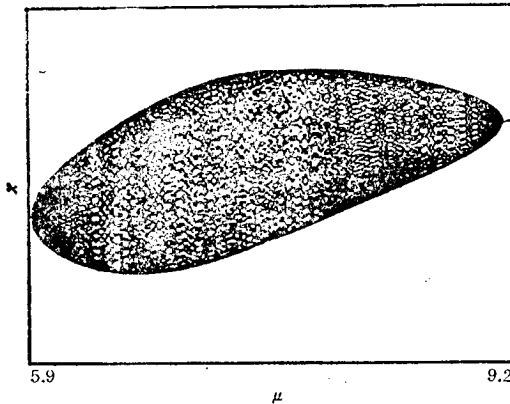


图 9

$B = 0.1; \phi_0 = \pi/8; T_R = 0.3; \Delta\mu = 0.0005$

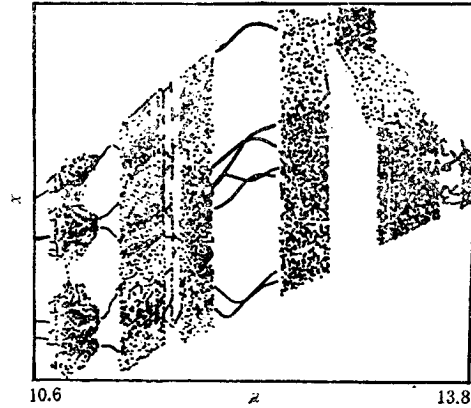


图 10

$B = 0.1; \phi_0 = \pi/8; T_R = 0.3; \Delta\mu = 0.0056$

取  $B = 0.1, \phi_0 = \pi/8, T_R = 0.3$ . 当  $\mu \in [5.7, 9.2]$  时, 其分岔图呈网络结构 (图 9). 这里看不到倍周期分岔的痕迹, 而表现出一种非倍周期分岔行为, 它远比通常的分岔行为复杂.

当  $\mu \in (10.6, 15.4)$  时, 出现了一些突发的周期窗口, 它的两端似乎都不由树分岔过渡而来. 在周期七窗口中还出现了状态交迭现象 (图 10).

从图 10 中还可看出, 系统 (3) 式的混沌带结构与通常的混沌带的结构大不相同, 其

中几乎看不到层次结构和混沌带的交迭行为,状态点趋向于均匀分布,可见,它比一维单峰映象的混沌结构更为混乱。并且图 10 中还可以看到类似于图 9 的网络分岔行为,它正是该系统从定态进入湍态的一条途径。

### 三、讨 论

对于以上出现的一些新的分岔、混沌现象,我们认为:

1. 长延时下出现的行为主要来源于多峰映象。在多峰映象中,系统的失稳系数  $I_s$  与分岔参数  $\mu$  之间的关系一般说来是非单调的<sup>[3]</sup>,而失稳系数  $I_s$  正是系统的非平衡性的量度。当  $I_s$  随着  $\mu$  单调上升时,系统经历由定态 $\rightarrow$ 倍周期分岔 $\rightarrow$ 混沌的过程;当  $I_s$  随  $\mu$  单调下降时,系统经历混沌 $\rightarrow$ 周期态 $\rightarrow$ 定态的过程,而  $I_s$  的极大值(指多稳态的某一支而言)  $I_{s,m}$  就决定了系统所能达到的“间歇”状态究竟是周期态还是混沌态或停留在定态不变(即不满足起振条件)。

当  $dI_s/d\mu$  恒定时,系统不出现“间歇”行为,从而表现出与单峰映象相似的拓扑结构,但收敛常数可以随  $dI_s/d\mu$  的取值不同而变化。

2. 短延时下,用系统 (3) 式来代替原系统 (1) 式是一种近似,它与系统 (1) 式有着较大的差别:从 (3) 式的推异中(见附录)可以看到,系统 (1) 式是一个在时间上有无限关联的典型的非马尔可夫系统;再则,其基本周期也不完全等于  $4t_R$ ,而是略为短一些。为简化问题,(3) 式只考虑了较近邻的时间关联,并且振动周期取的是极短延时下的极限周期。

尽管如此,它仍然部分地保留了原系统 (1) 式的两个基本特性:即多峰映象和记忆效应。因此有可能反映出延时系统的某些特殊行为,如非倍周期分岔行为。另一方面,把它看成一个特定系统进行研究,其结果给予我们的启示对于进一步认识普遍存在的湍流现象具有一定的意义。

就系统 (3) 式而言,由于计入了记忆效应,并且由于多峰映象的复杂行为,使其分岔行为不仅具有长延时下的特点,而且与记忆效应混杂在一起,形成了非倍周期分岔的网络结构。网络结构比周期结构混乱,因而在进入混沌区后,记忆效应把这种微弱的混乱带入了混沌结构,形成了更为混乱的湍态行为。这种过程类似于在混沌区再加上一个内在的随机扰动,使层次结构变得复杂化而不易分辨,并且这种记忆效应引入的“内部噪声”比外部的随机扰动带来的影响更为复杂。

由于 (3) 式的近似性,其表现出的各种行为是否真正反映了环形光学腔中的动力学特性还值得进一步的探索和实验的检验。

### 附 录

将方程 (1) 表示成如下形式:

$$\phi(t) = \mu \int_0^t e^{-\nu(t-t')} f[\phi(t-t' - T_R)] dt' + \phi(0)e^{-\nu t}, \quad (\text{A.1})$$

其中  $f[\phi] = \pi\{1 + 2B \cos[\phi - \phi_0]\}$ 。

再将原时分作  $0 \rightarrow t_R \rightarrow 2t_R \rightarrow \dots$ , 并记  $\phi_{n+1} = \phi[(n+1)t_R]$ , 于是有

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= \mu \int_0^{(n+1)T_R} e^{-t'} f[\phi_n(-t')] dt' + \phi(0) e^{-(n+1)T_R} \\ &= \mu \int_0^{T_R} e^{-t'} f[\phi_n(-t')] dt' + \mu \int_{T_R}^{2T_R} e^{-t'} f[\phi_n(-t')] dt' \\ &\quad + \dots + \mu \int_{nT_R}^{(n+1)T_R} e^{-t'} f[\phi_n(-t')] dt' + \phi(0) e^{-(n+1)T_R}.\end{aligned}$$

将以上积分限全部化成  $\int_0^{T_R} dt' \dots$ , 则有

$$\text{其中} \quad \phi_{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} A_m(\phi_{n-m}) e^{-mT_R}, \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned}A_m(\phi_{n-m}) &= \mu \int_0^{T_R} e^{-t'} f[\phi_{n-m}(-t')] dt' \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \\ A_{n+1} &= \phi(0)\end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

(A.2) 式是一个以  $e^{-T_R}$  为小量的渐近展开式. 展开系数  $A_m$  可近似求得

$$A_m = \mu T_R e^{-T_R} f[\phi_{n-m-1}]. \quad (\text{A.4})$$

如果只保留展开式的前两项, 则

$$\phi_{n+1} = \mu T_R e^{-T_R} f[\phi_{n-1}] + \mu T_R e^{-2T_R} f[\phi_{n-2}]. \quad (\text{A.5})$$

利用递推关系, 并记  $x_{n+1} = \phi[(n+1)T_R]$ ,  $y_{n+1} = \phi(nT_R)$ ,  $z_{n+1} = T_R e^{-T_R} \mu f[x_n]$ , 则有

$$x_{n+1} = \bar{\mu}(T_R) \{f(x_n) + e^{-T_R} f(y_n)\}, \quad y_{n+1} = \bar{\mu}(T_R) f(y_n) + e^{-T_R} z_n, \quad z_{n+1} = \bar{\mu}(T_R) f(x_n). \quad (\text{A.6})$$

其中  $\bar{\mu}(T_R) = T_R e^{-T_R} \mu$ . 将  $f[\phi] = \pi\{1 + 2B \cos[\phi - \phi_0]\}$  代入 (A.6) 式, 即得 (3) 式.

### 参 考 文 献

- [1] K. Ikeda, *Opt. Commun.*, **30**(1979), 257.
- [2] K. Ikeda, H. Daido and O. Akimodo, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 709.
- [3] 赵勇、霍裕平, *物理学报*, **35**(1986), 1115.
- [4] 陈历学、李淳飞、洪晶, *光学学报*, **5**(1985), 128.
- [5] 戴建华、张洪钧、王鹏业、金朝鼎, *物理学报*, **34**(1985), 992.

## NEW BEHAVIORS OF BIFURCATION AND CHAOS IN A NONLINEAR OPTICAL RING CAVITY

ZHAO YONG

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

HUO YU-PING

(Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hefei)

### ABSTRACT

In this paper, Ikeda equation for a nonlinear optical ring cavity is studied by numerical method. It is found that the topological structure, the way of bifurcation and its convergence rate and the period-window-structure depend on the parameters  $B$  and  $\phi_0$  in long delay time limit. In short delay time limit, some anomalous period-windows and nonperiod-doubling bifurcations are revealed, and it is also discovered that the self-similar structure in chaotic bands is blurred in the short time limit.