第 37 卷 第 4 期　　物 理 学 报　　Vol. 37. No. 4
1988 年 4 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Apr., 1988

直接模拟法和统计估计法研究平面波通过离散随机介质的散射*

吴振森　　王一平
（西北电讯工程学院物理系）

1987 年 3 月 24 日收到

提　　要

本文从输运理论出发，利用逐项积分法获得直接模拟法和统计估计法的估计函数．研究了平面波通过平面离散随机介质的透射光强和反射光强随光学厚度、反照率、不对称因子的变化．统计估计法获得与文献 [2] 给出数据完全一致的结果．在直接模拟法中由于粒子空间位置抽样产生较大的统计涨落，当光学厚度增大，散射的各向异性增强及强吸收时其结果的偏差增大．

一、输运方程的蒙特卡罗方法

我们考虑厚度为 h 的平行平面介质中随机分布介电性质相同、尺寸参数相同的球形粒子．强度归一化的非偏振平面波垂直入射，选择入射平面为 xz 平面，平板介质的边界平面为 $z=0$ 和 $z=h$，且忽略边界反射．如图 1 所示．当介质内部无源时，减约强度率 $I_{ri}(\tau,\mu)$ 和扩散强度率 $I_d(\tau,\mu)$ 分别满足[1]

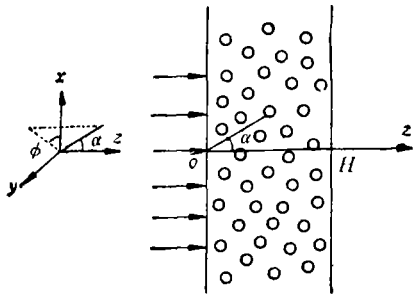

图 1

$$I_{ri}(\tau,\mu)=e^{-\tau}\delta(\mu-1)\delta(\phi), \tag{1}$$

$$\mu\frac{dI_d(\tau,\mu)}{d\tau}+I_d(\tau,\mu)=J(\tau,\mu)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}d\mu' B_0(\mu,\mu')I_d(\tau,\mu')$$

$$+\frac{1}{4\pi}B_0(\mu,1)e^{-\tau}, \tag{2}$$

其中 $\tau=\int C_t dz=C_t z$ 为光学厚度，$\tau_0=\int_0^h C_t dz=C_t h$，$C_t$ 为单个粒子的衰减截面与数密度的乘积，$B_0(\mu,\mu')$ 为相函数，强度率 $I(\tau,\mu)=I_{ri}(\tau,\mu)+I_d(\tau,\mu)$，$\mu=\cos\alpha$

* 中国科学院科学基金资助的课题．

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

为散射方向与 z 轴的夹角.

在两边界上的强度率对应给定方向的透射密度和反射密度，由 (1) 和 (2) 式强度率为

$$I(\bar{\tau}, \mu) = \int_0^{\tau_0} \exp\left[-\frac{(\bar{\tau}-\tau')}{\mu}\right] J(\tau', \mu) \frac{d\tau'}{|\mu|} + I_{ri}(\bar{\tau}, \mu), \tag{3}$$

式中

$$\bar{\tau} = \begin{cases} \tau_0 & \mu > 0; \\ 0 & \mu < 0. \end{cases}$$

蒙特卡罗方法作为处理辐射问题的一种数值方法，认为光子与随机分布粒子相互作用为弹性散射. 光子在随机介质中或被粒子散射或被粒子吸收或从介质中逃逸出. 每个光子遭受多重散射时，每一次散射只与前一次散射有关. 即可把光子历史的状态序列用马尔科夫过程描述. 为了方便，令 $s = (\tau, \mu, \phi)$ 为相空间点，在平板模型中对应于光子输运的历史状态. 则方程 (3) 可改写为一般数学形式

$$I(s) = I_{ri}(s) + \int I(s')K(s' \to s)ds'. \tag{4}$$

显然

$$\int I_{ri}(s)ds = \int_0^{\infty} e^{-\tau}d\tau \iint_{4\pi} \delta(\mu - 1)\delta(\phi)d\mu d\phi = 1.$$

众所周知，(4) 式有下列诺伊曼级数解:

$$I(s) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(s), \tag{5}$$

式中

$$\begin{aligned} I_0(s) &= I_{ri}(s), \\ I_1(s) &= \int I_0(s_0)K(s_0 \to s)ds_0 \\ &= \int I_{ri}(s_0)K(s_0 \to s)ds_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ I_m(s) &= \int I_{m-1}(s_{m-1})K(s_{m-1} \to s)ds_{m-1} \\ &= \int \cdots \int I_0(s_0)K(s_0 \to s_1)\cdots K(s_{m-1} \to s)ds_{m-1}\cdots ds_1 ds_0. \end{aligned}$$

积分算子 $\int K(s_{l-1} \to s_l)ds_{l-1}$ 相当于光子经历一次空间输运和碰撞. 通项 $I_m(s)$ 具有明确的物理意义. $I_0(s) = I_{ri}(s)$ 表示源发出光子未遭受碰撞直接透射的光子数，即零次透射强度率. $I_1(s)$ 表示源发出的光子经过一次空间输运和一次碰撞后的光子数. 同理，$I_m(s)$ 表示源发出光子经过 m 次空间输运和碰撞后到达相空间点 s 的光子数.

我们可将 (5) 式改写为概率模型. 光子在离散随机介质中空间输运和碰撞到达相空间点 s，作为一个事件，它是由 $m(m = 0, 1, 2, \cdots)$ 个可能的相互排斥的事件组成. 由全概率法则，其概率

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$P(s)=\sum_{m=0}^{\infty}P_m(s), \tag{6}$$

式中 $P_m(s)$ 表示光子通过 m 次空间输运和碰撞后到达相空间点 s 的概率. 它对应于(5)式中的 $I_m(s)$.

光子通过 m 次空间输运和碰撞的历史状态序列 $\{s_l\}(l=0,1,2,\cdots,m)$, 作为任意的事件 $P_m(s)=P(s_0s_1\cdots s_{m-1}s)>0$. 由于

$$P(s_0)\geqslant P(s_0s_1)\geqslant\cdots\geqslant P(s_0s_1\cdots s_{m-1}s)>0,$$

有

$$\begin{aligned}&P(s_0s_1s_2\cdots s_{m-1}s)\\&=P(s_0)P(s_1|s_0)P(s_2|s_0s_1)\cdots P(s|s_0s_1\cdots s_{m-1})\\&=P(s_0)P(s_1|s_0)P(s_2|s_1)\cdots P(s|s_{m-1}),\end{aligned} \tag{7}$$

式中后一等式表明光子在介质中随机游动过程是一种马尔科夫过程. 比较(5)和(7)式,不难看出积分算子 $\int K(s_{l-1}\to s_l)ds_{l-1}$ 对应于条件概率 $P(s_l|s_{l-1})$. 即光子在相空间点 s_{l-1} 状态下从该点输运到相空间点 s_l 的概率.

二、直接模拟法

在直接模拟法中光子从状态 s_l 输运到 s_{l+1}, 积分算子 $\int K(s_l\to s_{l+1})ds_l$ 对应于转移概率

$$P(s_{l+1}|s_l)=\eta\left(\frac{c_s}{c_t}-\xi_l\right)\eta(h-z_l)\eta(z_l), \tag{8}$$

其中 $\eta(c_s/c_t-\xi_l)$ 为光子从相空间点 s_l 输运到相空间点 s_{l+1} 不被吸收的概率. ξ_l 为(0,1)上均匀分布的随机数, c_s 为单个粒子的散射截面和数密度的乘积. 类似地算子 $\int K(s_m\to s)ds_m$ 对应于 $P(s|s_m)=\eta(z_m-h)$, 于是估计函数[3]

$$P_t=\sum_{m=0}^{\infty}\eta(z_m-h)\prod_{l=1}^{m}\eta\left(\frac{c_s}{c_t}-\xi_l\right)\eta(h-z_l)\eta(z_l) \tag{9}$$

是透射率的无偏估计. 这里引入函数 $\eta(x)$:

$$\eta(x)=\begin{cases}1 & x>0;\\0 & x\leqslant 0.\end{cases} \tag{10}$$

事实上在(9)式中估计 P_t 只能取1或0值. 即是说,每个光子在输运过程中只有当每次碰撞都是散射,而最后一次穿透 $z=h$ 平面时, $P_t=1$. 否则一当吸收发生和从 $z=0$ 平面逸出,结果 $P_t=0$. 另外,当 $\xi_m\geqslant c_s/c_t$ 或 $z_m\geqslant h$ 或 $z_m<0$ 时, P_t 中的求和号被截断. 光子随机游动的历史终止. 同理

$$P_r=\sum_{m=0}^{\infty}\eta(0-z_{m+1})\prod_{l=1}^{m}\eta\left(\frac{c_s}{c_t}-\xi_l\right)\eta(h-z_l)\eta(z_l) \tag{11}$$

是反射率的无偏估计. 我们跟踪 N 个光子,平均透射率 T 和平均反射率 R 分别为

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$T = \frac{1}{N}\sum^{N} P_t, \qquad R = \frac{1}{N}\sum^{N} P_r. \tag{12}$$

三、统计估计法

在统计估计法中积分算子 $\int K(s_l \to s_{l+1})dl_s$ 对应的条件概率

$$P(s_{l+1}|s_l) = \exp\left[-c_a\left|\frac{z_{l+1}-z_l}{\cos\alpha_l}\right|\right]\cdot\eta(h-z_l)\eta(z_l), \tag{13}$$

其中指数部分表示光子从第 l 次散射的相空间点 s_l 到达相空间点 s_{l+1} 不被吸收的概率. 类似地积分算子 $\int K(s_m \to s)ds_m$ 对应的转移概率

$$P(s|s_m) = \exp\left[-c_t\frac{h-z_m}{\cos\alpha_m}\right]\eta(\cos\alpha_m), \tag{14}$$

其中指数部分表示光子从第 m 次散射直接穿透界面不被吸收的概率,(13)和(14)式中角度 α_i 为光子第 i 次散射方向与 z 轴的夹角. 引入权函数.

$$W_{m+1} = W_m\exp\left[-c_a\left|\frac{z_{m+1}-z_m}{\cos\alpha_m}\right|\right]. \tag{15}$$

显然

$$P_0 = W_0\exp\left[-c_t\frac{h-z_0}{\cos\alpha_0}\right] \tag{16}$$

为未经散射直接透射的概率，$W_0 = 1$ 为光子的初始权重，α_0 为入射光方向与 z 轴夹角.于是估计函数

$$P_t = \sum_{m=0}^{\infty} P_m = \sum_{m=0}^{\infty} W_m\exp\left[-c_t\frac{h-z_m}{\cos\alpha_m}\right]\cdot\eta(\cos\alpha_m) \times\prod_{l=1}^{m}\eta(h-z_l)\eta(z_l) \tag{17}$$

为光子透射率的无偏估计. 同理

$$P_r = \sum_{m=1}^{\infty} P_m = \sum_{m=1}^{\infty} W_m\exp\left[-c_t\frac{0-z_m}{\cos\alpha_m}\right]\cdot\eta(-\cos\alpha_m) \times\prod_{l=1}^{m}\eta(h-z_l)\eta(z_l) \tag{18}$$

为反射率的无偏估计. 总共跟踪 N 个光子,平均透射率 T 和平均反射率 R 仍由(12)式给出.

四、结果比较

波通过平行平面随机介质传播和散射问题已被充分地研究. 它描述许多物理现象，例如行星大气、大气层、海水中各类源的辐射问题.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

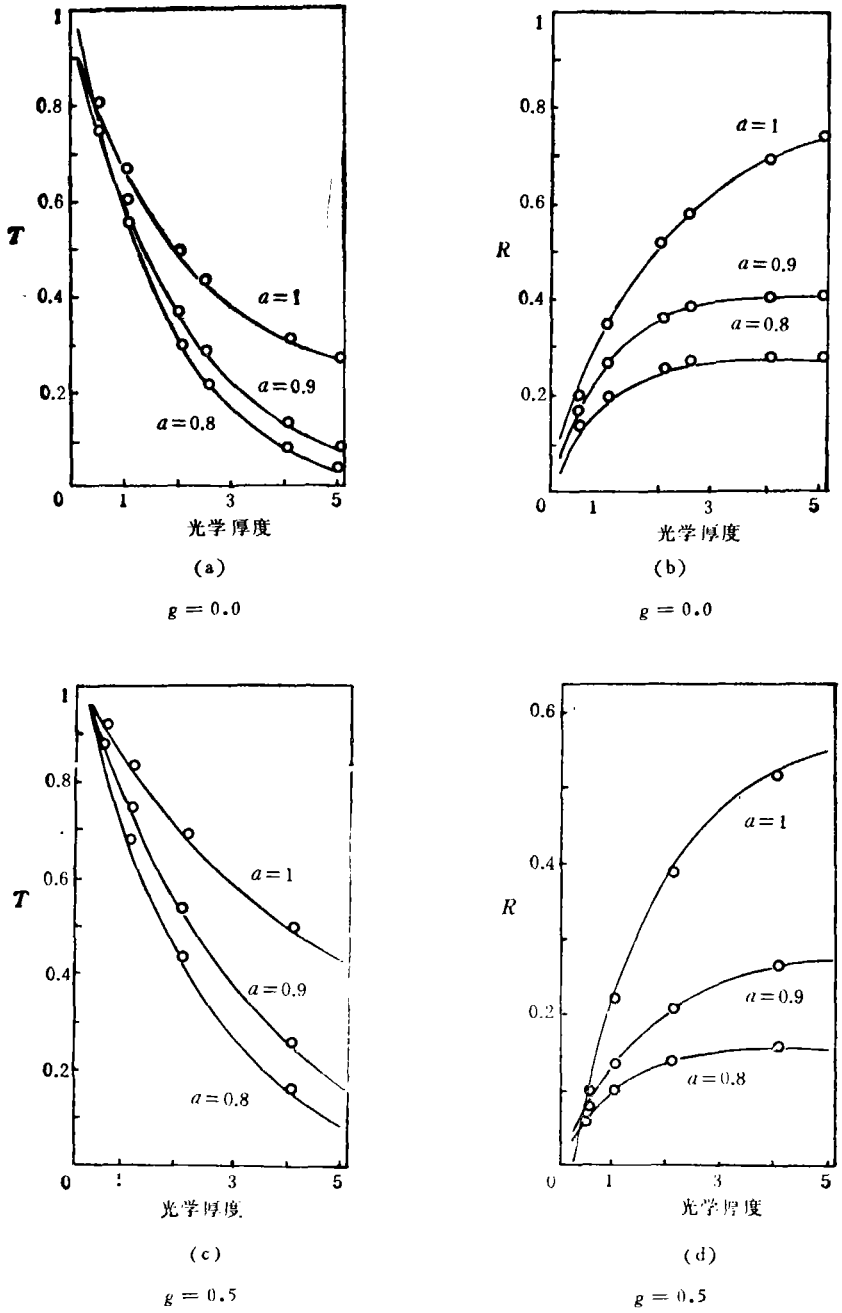

图 2 透射率和反射率随光学厚度的变化

本文采用蒙特卡罗方法的直接模拟法和统计估计法计算平面被通过平行平面离散随机介质的透射率和反射率，以及它们随光学厚度，单个粒子的反照率、不对称因子的变化. 图 2 中实线为统计估计法计算的结果，离散点数据由文献 [2] 给出. 无论是各向同性散射 ($g = 0$)，还是各向异性散射 ($g \neq 0$)；无论是守恒散射(无吸收 $a = 1$)，还是非守恒

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

散射(有吸收 $a < 1$)两种计算的透射率和反射率随光学厚度变化的结果完全符合.

图 3 给出透射率和反射率随反照率的变化. 当反照率减小，直接模拟法获得的结果与其它两种算法相比偏差增大. 但在无吸收时，三者的结果相当符合. 图 4 和图 5 将三种方法获得的透射率、反射率随光学厚度及不对称因子的变化进行了比较. 图 5 中"S"

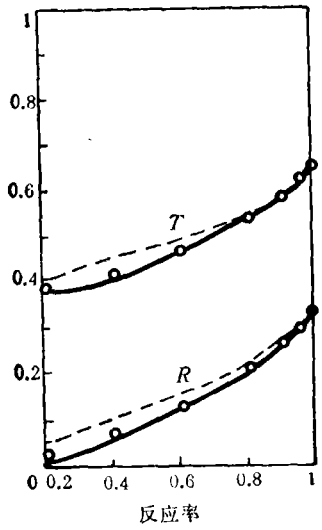

图 3　透射率和反射率随反照率的变化
实线为统计估计法;虚线为直接模拟法;圆圈为文献 [2] 数据; $g = 0.0$; $H = 1.0$

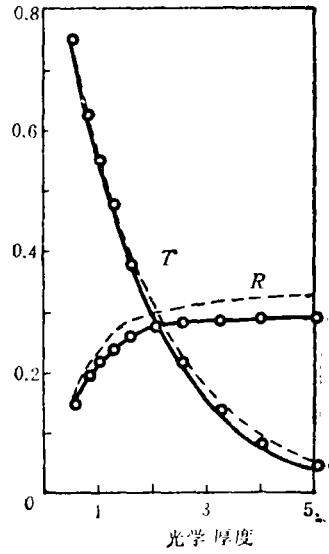

图 4　透射率和反射率随光学厚度的变化
实线为统计估计法;虚线为直接模拟法;圆圈为文献 [2] 数据;反照率为 0.8

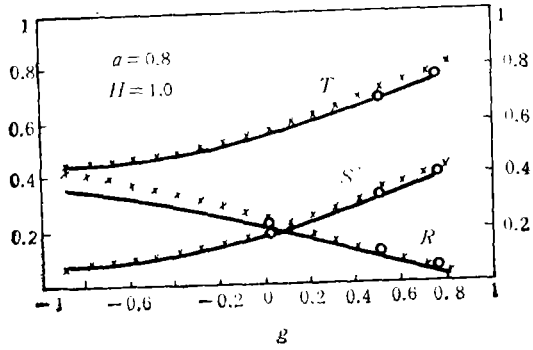

图 5　透射率和反射率随不对称因子的变化
实线为统计估计法;×为直接模拟法;圆圈为文献 [2] 数据; $a = 0.8$; $H = 1.0$

曲线和对应的离散点表示遭受多重散射的散射强度. 显然，随光学厚度增加或粒子散射的各向异性程度增强,直接模拟法计算的结果偏差增大.

蒙特卡罗方法应用到辐射输运问题中,粒子位置、光子散射方向等变量的随机抽样均会产生统计误差,其中位置变量引起的统计误差最显著. 从模拟物理过程来说,直接模拟

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

法技巧是最简单，也是最基本的方法．但它只注重光子在输运过程中的最终历史状态．由于这一缺点，使得虽然观察了大量的光子，也只可能有很少很少的光子能从介质的边界逸出对透射率或反射率有贡献．并且位置的随机抽样带来统计涨落很大．鉴于上述原因，当介质层较厚时，直接模拟法计算的结果偏离较大．当粒子散射是各向异性时，也是由于粒子空间位置抽样所引起的统计涨落较大造成结果的偏离．强吸收时由于光子的绝大多数在平行平面介质中与粒子碰撞时被吸收．类似于厚层介质，只有极少数光子能对透射率和反射率有贡献．另外，蒙特卡罗方法中光子首次与随机分布粒子碰撞位置对结果的影响颇大．实际计算结果正好表明，直接模拟法中零次散射或第一次散射时光子与粒子碰撞位置抽样起伏较大，导致结果的误差较大．

统计估计法比较好地克服了上述缺点．对光子和粒子的碰撞采用了强迫散射的加权方法．注重了每一个光子在输运过程中的每一次散射对透射率和反射率的贡献．所以其结果与文献[2]的数据符合很好．对于文献[2]的数据，各向同性散射时来自于倍增法，而各向异性散射时来自于 Milne 积分算子法[2]．两种处理方向难以统一起来．而蒙特卡罗方法的统计估计法求解输运方程时，没有任何附加的近似条件和限制，适用于各种情况．它不但能获得正确的结果而且能揭示光子在随机介质中输运的某些细微过程．

参 考 文 献

[1] A. Ishimaru, Wave Propagation and Scattering in Random Media, vol I, Academic Press, New York, (1978).
[2] H. C. Van de Hulst, Multiple Light Scattering, vol I, II, Academic Press., New York, (1980).
[3] 裴鹿成、张孝泽，蒙特卡罗方法及其在粒子输运问题中的应用，科学技术出版社，(1980).

STUDY OF SCATTERING OF PLANE WAVE THROUGH DISCRETE RANDOM MEDIUM BY DIRECT ANALOGUE AND STATISTICAL ESTIMATION

WU ZHEN-SEN WANG YI-PING
(Department of Physics, North-West Institute of Radio Engineering, Xian)

ABSTRACT

In this paper, starting from transport theory, estimated functions of Monte carlo direct analogue and statistical estimation have been obtained by means of term wise integration. We deal with variations of transmissivity and reflectivity in optical thickness τ, albedo of a single partical a, and anisotropy g when plane wave passes through a layer discrete random media. The results of statistical estimation method are in good agreement with those given in reference [2]. As a result of considerable statistical fluctuation of scattering point samples in direct analogue method, the deviation of calculation would be larger as the optical thickness increases or anisotropic scattering or absorption becomes stronger.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net