

# 非么正变换系统中的二维相位恢复问题

汪 力 董碧珍 杨国栋

中国科学院物理研究所

1989 年 1 月 9 日收到

本文讨论了一般的非么正变换系统中二维波场分布的相位恢复问题。利用我们所建立的迭代算法,以一个具有衍射损耗的光学系统作为模型,对五个二维象差函数进行了重构相位的计算。在迭代的初始估计为随机分布的情况下,通过 100—200 次迭代,得到了满意的相位恢复解。

## 一、引 言

与波场的振幅分布一样,波场的相位分布是一个很重要的物理量。在物理学的许多领域中,如电子显微学、X 射线晶体学、相干光学及逆源问题等研究中,经常需要确定波场的相位分布<sup>[1]</sup>。然而,在许多情况下,由于观测方法或实验条件的限制,直接测量波场的相位往往非常困难,甚至是不可能的,能够方便地进行直接测量的常常只是波场的强度(振幅)分布。因此,从强度测量数据来恢复相位的问题一直受到人们广泛的关注,即通过数学的方法,利用测得的强度数据,求出波场相应的相位分布。近十几年来,以电子显微学中的物质结构分析作为应用背景,几乎所有的研究都集中于傅里叶变换系统,通常考虑两个坐标平面上的波场分布:样品后表面的出射场  $U_1(\mathbf{x}_1)$  和成象系统后焦面的场分布  $U_2(\mathbf{x}_2)$ , 这两个不同空间位置的波函数由一个傅里叶变换相联系,即  $U_2(\mathbf{x}_2) = \mathcal{F}[U_1(\mathbf{x}_1)]$ 。所谓相位恢复问题,就是已知  $U_2$  的振幅分布  $|U_2|$  和  $U_1$  的部分信息(按照不同的定解条件,可以是  $U_1$  的振幅分布  $|U_1|$ , 或  $U_1$  的非零区域,或要求  $U_1$  为非负的实函数等),确定  $U_2$  的相位分布,以重构完整的波函数  $U_1$ , 得到通过样品后的电子波的全部信息。理论研究表明,当  $U_1$  定义在有限区域,并且具有不可约的带限傅里叶频谱时,相位恢复问题的解是唯一的<sup>[2]</sup>。对于实际中的二维问题,这个条件几乎总可以满足<sup>[3]</sup>。因此,建立有效的算法是当前相位恢复研究中的一个主要努力方向。

自从 1971 年 Gerchberg 和 Saxton 提出第一个迭代算法以来<sup>[4]</sup>,实用算法的研究已经取得了很大的进展。关于傅里叶变换系统的相位恢复建立了多种算法体系<sup>[5]</sup>,包括数值的算法和利用解析函数性质的算法,可以处理各种定解条件下的相位恢复问题。尽管许多模拟计算都给出了较好的相位恢复解<sup>[6]</sup>,但目前尚无实际应用的报道。我们认为,除了测量数据中噪声的影响以及大数据量导致的计算困难以外,一个重要的问题是,在许多情况下,两个相关平面上的波场分布之间不能简单地用一个傅里叶变换相联系,实际存在的往往是非傅里叶型的么正变换,甚至是非么正的变换。例如,在一个真实的电子显微镜

中,色差和孔径光阑的存在就会导致传递函数的非么正性质,如果这个变换和傅里叶变换偏离较远,那么,基于傅里叶变换建立的算法就不能采用.因此,为了处理实际系统中存在的更为广泛的一类相位恢复问题,我们对一般的非么正系统中的相位恢复问题进行了研究,而把傅里叶变换系统作为其中的一个特例.在文献中[7]已经建立了一般变换系统中相位恢复的理论和迭代算法,并以一个具有强衍射损耗的光学系统作为非么正变换的实例,对若干一维波函数进行了相位恢复的模拟计算,得到了令人满意的结果.在本文中,进一步讨论非么正系统中的相位恢复问题,把文献[7]的结果推广到二维情况.以邵志锋和西门纪业曾采用过的五个象差函数为例<sup>[6]</sup>,利用两个平面上的强度数据,用迭代的方法计算它们的相位.计算结果表明,我们提出的涉及非么正系统的算法处理二维相位恢复问题是同样有效的.

## 二、基本公式与迭代算法

按照上一节关于相位恢复问题的一般描述,所考虑的波场在两个不同平面上的分布

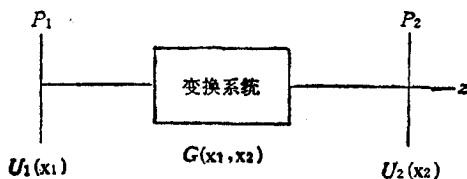


图1 相位恢复问题中的一般变换系统

可以用一个已知的变换相联系,如图1所示.

$P_1$  和  $P_2$  分别为输入和输出两个测量平面,  $z$  轴为波场的传播方向,算符  $G$  描述波场由平面  $P_1$  到  $P_2$  的变换,可写成

$$U_2(\mathbf{x}_2) = G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)U_1(\mathbf{x}_1). \quad (1)$$

这里研究完全一般的情况,允许  $G$  为一个非么正的变换,即  $G^+G \equiv A \neq I$  (上标

“+”表示共轭操作,  $I$  为恒等算符). 对于傅里叶变换系统,  $G$  简单地取作傅里叶变换,有  $G^+G = I$ , 这是目前相位恢复研究中通常采用的模型,它作为一种特例自然地包含在我们考虑的理论框架之内.

以下讨论非么正变换系统中的相位恢复:  $G$  为一非么正算符,已知输入、输出两平面的振幅分布  $\rho_1 = |U_1|$  和  $\rho_2 = |U_2|$ ,它们由测量给出,全部问题是如何求出  $U_1$  和  $U_2$  的相位分布  $\varphi_1 = \arg U_1$  和  $\varphi_2 = \arg U_2$ .

为了表示两个函数  $U_2$  和  $GU_1$  的逼近程度,定义它们的“距离”为

$$\begin{aligned} D[\rho_1, \varphi_1; \rho_2, \varphi_2] &\equiv \|U_2 - GU_1\| \\ &= \left[ \int d\mathbf{x}_2 |U_2 - GU_1|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

在目前的问题中,因为  $\rho_1$  和  $\rho_2$  已知,  $D$  的值仅依赖于相位分布  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ . 对于任何给定的  $\varphi_1, \varphi_2$ ,  $D$  给出函数  $U_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$  和  $GU_1 = G(\rho_1 e^{i\varphi_1})$  两者逼近程度的一个估计. 一个理想的  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  解应满足条件  $D = 0$ , 这也是  $D[\varphi_1; \varphi_2]$  的极小点. 通过求极值的方法寻找这样的解. 为此,下面考察  $D$  的变分性质.

令  $D$  相对于  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  的一级变分为零,即

$$\delta_{\varphi_1} D = 0, \quad (3a)$$

$$\delta_{\varphi_2} D = 0, \quad (3b)$$

得到  $D$  的稳定点所满足的方程

$$\bar{\varphi}_1(\mathbf{x}_1) = \arg[G^+U_2 - A_N U_1], \quad (4a)$$

$$\bar{\varphi}_2(\mathbf{x}_2) = \arg[GU_1], \quad (4b)$$

式中  $A_N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \equiv [G^+G]_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)}$ .

可以证明(详阅文献 [7]), 在这些稳定点上, 相应的二级变分大于零:

$$\delta_{\bar{\varphi}_1}^2 D[\bar{\varphi}_1; \bar{\varphi}_2] > 0, \quad (5a)$$

$$\delta_{\bar{\varphi}_2}^2 D[\bar{\varphi}_1; \bar{\varphi}_2] > 0. \quad (5b)$$

因此, 由方程 (4a) [或 (4b)] 所确定的  $\bar{\varphi}_1$  [或  $\bar{\varphi}_2$ ] 就是  $\varphi_2$  [或  $\varphi_1$ ] 固定时,  $D$  的极小点, 即

$$D[\bar{\varphi}_1; \varphi_2] = \min\{D[\varphi_1; \varphi_2]\}_{\varphi_2 \text{ 固定}}, \quad (6a)$$

$$D[\varphi_1; \bar{\varphi}_2] = \min\{D[\varphi_1; \varphi_2]\}_{\varphi_1 \text{ 固定}}. \quad (6b)$$

为了得到使  $D$  趋于零的解, 利用 (4a), (4b) 两式进行如下迭代计算: 以一个任意分布  $\varphi_i^{(0)}$  作为初始输入, 由方程 (4b) 可直接得到  $\varphi_i^{(0)}$  和  $D[\varphi_i^{(0)}; \varphi_i^{(0)}]$ ; 然后, 将  $\varphi_i^{(0)}$  代入方程 (4a), 利用求不动点的方法解出  $\varphi_i^{(1)}$ , 同时得到  $D[\varphi_i^{(1)}; \varphi_i^{(0)}]$ . 反复进行上述计算, 可相继得到  $\varphi_i^{(2)}$ ,  $D[\varphi_i^{(2)}; \varphi_i^{(1)}]$ ;  $\varphi_i^{(3)}$ ,  $D[\varphi_i^{(3)}; \varphi_i^{(2)}]$ ;  $\dots\dots$ .

根据方程 (4a), (4b) 解的性质, 有

$$D[\varphi_i^{(0)}; \varphi_i^{(0)}] = \min\{D[\varphi_i^{(0)}; \varphi_2]\}_{\varphi_2 \text{ 固定}},$$

$$D[\varphi_i^{(1)}; \varphi_i^{(0)}] = \min\{D[\varphi_1; \varphi_i^{(0)}]\}_{\varphi_1 \text{ 固定}},$$

$$D[\varphi_i^{(2)}; \varphi_i^{(1)}] = \min\{D[\varphi_i^{(1)}; \varphi_2]\}_{\varphi_2 \text{ 固定}}, \quad (7)$$

$\dots\dots$

因此, 如下不等式成立:

$$D[\varphi_i^{(0)}; \varphi_i^{(0)}] > D[\varphi_i^{(1)}; \varphi_i^{(0)}] > D[\varphi_i^{(2)}; \varphi_i^{(1)}] > \dots\dots. \quad (8)$$

这表明所进行的迭代计算总是收敛的, 随着迭代次数  $n$  的增大, 由方程 (4a), (4b) 确定的解  $\varphi_i^{(n)}$ ,  $\varphi_i^{(n)}$  使函数  $U_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$  和  $GU_1 = G(\rho_1 e^{i\varphi_1})$  之间的距离单调减小. 按照对解的精度要求, 可设置一个小量  $\varepsilon$  和正整数  $N$ , 当  $D \leq \varepsilon$  或  $n = N$  时终止迭代计算.

### 三、数值结果

图 2 为数据计算中所采用的具有非么正变换性质的光学系统.  $P_1, P_2$  分别为输入、输出平面;  $L$  为一个凸透镜, 焦距为  $f$ ;  $A$  为紧贴在  $L$  之后的孔径可变的正方形光阑, 边长为  $2a$ .  $P_1, P_2$  与  $L$  的距离分别为  $l_1$  和  $l_2$ ,  $z$  轴为光场传播方向. 在波长为  $\lambda$  的单色光照明下, 联系光场  $U_1(\mathbf{x}_1)$  和  $U_2(\mathbf{x}_2)$  的变换  $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  可表为

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G_0(l_2)P_2HG_0(l_1), \quad (9)$$

式中  $G_0$  为自由空间传播函数, 在傍轴近似下它具有如下形式:

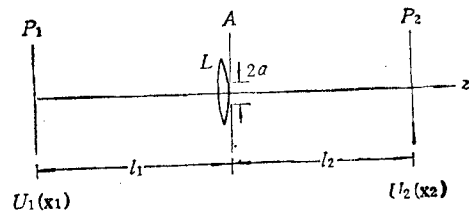


图 2 数值计算中所采用的非么正光学变换系统

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; l) = (i\lambda l)^{-1} e^{i2\pi l/\lambda} e^{i\pi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2/\lambda l}, \quad (10)$$

$P_a$  为光阑函数,

$$P_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & |\mathbf{x}|, |y| \leq a, \\ 0 & |\mathbf{x}|, |y| > a; \end{cases} \quad (11)$$

$H$  为透镜的相位调制函数,

$$H(\mathbf{x}) = e^{-i\pi x^2/\lambda l}. \quad (12)$$

把(10)–(12)式代入(9)式,略去常数相位因子,并取  $a, \mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  的单位为  $\sqrt{f\lambda}$ , 算符  $G$  可具体表达为

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} e^{-i2\pi \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2} \int_{-\sqrt{2}(a+x_1+x_2)}^{\sqrt{2}(a-x_1-x_2)} du \int_{-\sqrt{2}(a+y_1+y_2)}^{\sqrt{2}(a-y_1-y_2)} dv e^{i\pi(u^2+v^2)/2}. \quad (13)$$

这里为简便起见,取  $l_1 = l_2 = f$ . 可以看到,当光阑孔径  $a$  趋于无穷大时,上面表达式为傅里叶变换. 而当  $a$  取有限值时,  $G$  为一个非么正变换,可以视为对实际问题中光场各种损耗机制的一种模拟.

为了说明变换  $G$  的性质与光阑孔径  $a$  的关系,令  $B$  表示算符  $G^+G \equiv A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1)$  的“对角元”的平均值,用  $C$  表示  $A$  的“非对角元”的模的平均值,

$$B(a) = \int_S d\mathbf{x}_1 A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) / \sigma \equiv \text{Tr} A / \sigma, \quad (14a)$$

$$C(a) = \iint_{\substack{S \\ \mathbf{x}'_1 \neq \mathbf{x}_1}} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}'_1 |A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1)| / (\sigma^2 - \sigma), \quad (14b)$$

$S$  为  $U_1$  在平面  $P_1$  的分布区域,  $\sigma$  为其面积. 当  $G$  为么正变换时,  $B = 1, C = 0$ . 对于这里所考虑的变换系统,  $B$  与  $C$  的值随  $a$  的变化如表 1 所示. 可以看到,当  $a < 8$  时,算符  $G$  明显地偏离了么正变换.

表 1 算符  $G$  的性质与光阑孔径  $a$  的关系

$a$	$B$	$C$	$C/B(\%)$
16	0.99751	$0.18541 \times 10^{-3}$	0.0185
8	1.00180	$0.12090 \times 10^{-2}$	0.1258
4	0.24871	$0.58819 \times 10^{-2}$	2.3650
2	0.06199	$0.54565 \times 10^{-2}$	8.8028

在每一个迭代周期中,通过计算下面的相对平方误差,

$$\text{SSE} = \|(\rho_2 - |GU_1|)\|^2 / \|\rho_2\|^2 \equiv D^2 / \|\rho_2\|^2, \quad (15)$$

来监视迭代的进程,当 SSE 小于一个预先设置的小量时,终止迭代计算. 最后得到的相位恢复解  $\varphi_1$  与真实分布  $\varphi_1$  的偏差用平均误差  $\Delta\varphi_1$  度量:

$$\Delta\varphi_1 = \int_S d\mathbf{x}_1 |\varphi_1 - \varphi_1| / \sigma. \quad (16)$$

本文给出如下 5 个象差函数的相位恢复结果:

$$1) F_1(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) e^{i2\pi x^2},$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & F_2(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})e^{i4\pi x^4}, \\
 3) \quad & F_3(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})e^{i4\pi(x^3-3xy^2)}, \\
 4) \quad & F_4(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})e^{i8\pi x^2(x^3-3xy^2)}, \\
 5) \quad & F_5(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})e^{i8\pi x^6},
 \end{aligned} \tag{17}$$

其中, 振幅分布为

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{x}|, |y| \leq 0.5, \\ 0, & |\mathbf{x}|, |y| > 0.5. \end{cases} \tag{18}$$

把它们作为平面  $P_1$  上的波函数  $U_1(\mathbf{x}_1)$ , 其振幅分布  $\rho_1(\mathbf{x}_1) = U_1(\mathbf{x}_1)$  由 (18) 式给出, 各自在平面  $P_2$  上相应的振幅分布  $\rho_2(\mathbf{x}_2) = U_2(\mathbf{x}_2)$  通过 (1) 式直接计算得到. 对于每一组这样的振幅数据  $\rho_1, \rho_2$ , 代入方程 (4a), (4b), 从一个任意的相位估计  $\varphi_1^{(0)}$  出发进行迭代计算, 最后求出的相位恢复解  $\varphi_1$  可以与 (17) 式中所对应函数的相位进行比较, 检查符合的程度.

在我们的全部数值计算中, 对每个函数及算符  $G$  均进行了离散化处理, 平面  $P_1$  上输入函数的取样范围为  $|\mathbf{x}_1|, |y_1| \leq 0.5$ , 等间隔的取样点数为  $N_1 \times N_2 = 16 \times 16$  个; 平面  $P_2$  上输出函数的取样范围为  $|\mathbf{x}_2|, |y_2| \leq 8$ , 取  $N_2 \times N_2 = 64 \times 64$  个等间隔取样点. 前面各式中需要计算的积分由相应的求和代替. 迭代计算的初始相位估计  $\varphi_1^{(0)}$  由随机数序列程序产生.

图 3 至图 7 为  $a = 4$  时(由表 1 可见, 这时  $G$  已表现出明显的非么正性质)五个波函数的相位恢复解, 与真实的相位分布符合得很好. 表 2 列出每个函数相应的收敛特征, 从中可见, 迭代的收敛速度与函数类型有关, 相位为(类)抛物面分布的函数  $F_1, F_2$  和  $F_5$  只用了 100 次迭代, 而类似马鞍形相位分布的函数  $F_3$  和  $F_4$  则需要进行 200 次迭代才能得到与前者相近精度的解. 这一现象可以这样理解, 函数  $F_1, F_2$  和  $F_5$  具有旋转对称性, 等价于一个一维函数, 所需确定的信息量可少于  $F_3$  和  $F_4$ . 尽管我们没有构造具有旋转对称的初始估计  $\varphi_1^{(0)}$ , 但  $\rho_2(\mathbf{x}_2)$  的对称性质在数值过程中起了一定的作用, 加快了收敛速度. 这也提示我们, 在实际问题的处理中, 如果事先对待求相位作一定程度的了解(如周期性、对称性等), 则可以构造一个满足某些约束条件的初始估计代替随机分布, 以节省计算时间、提高解的精度.

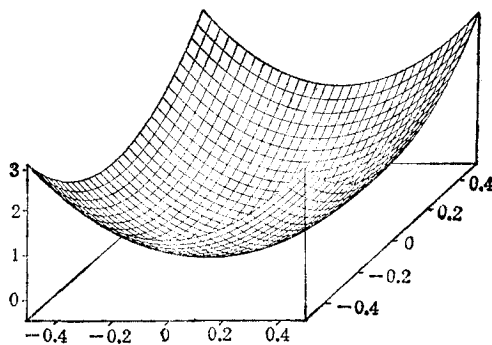


图 3(a) 函数  $F_1$  的真实相位分布:  $\varphi_1(\mathbf{x}_1) = 2\pi x_1^4$

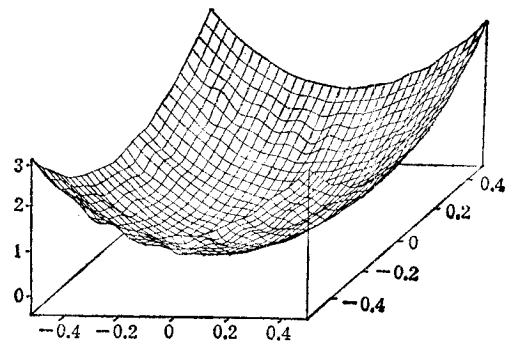
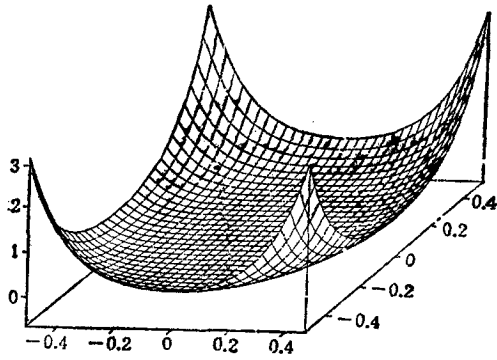
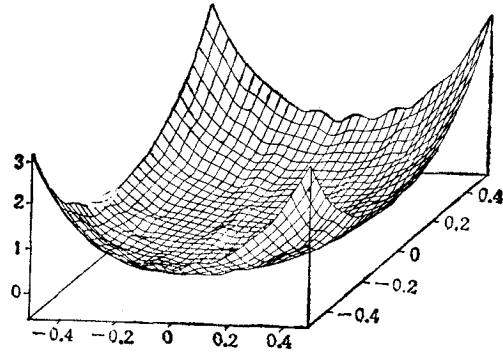
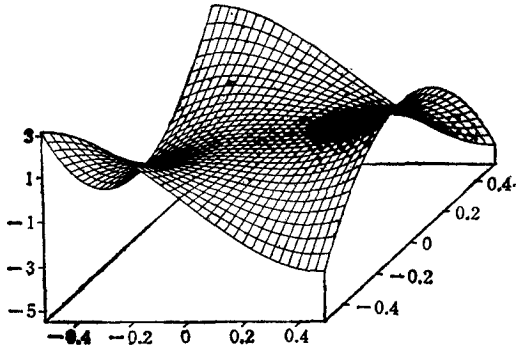
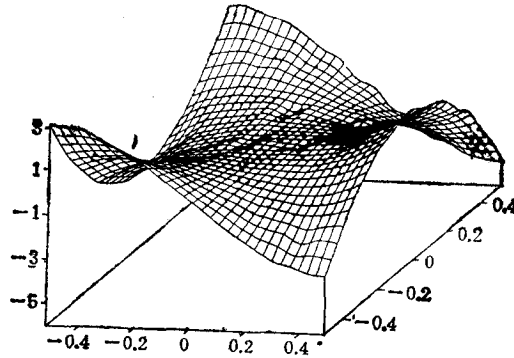
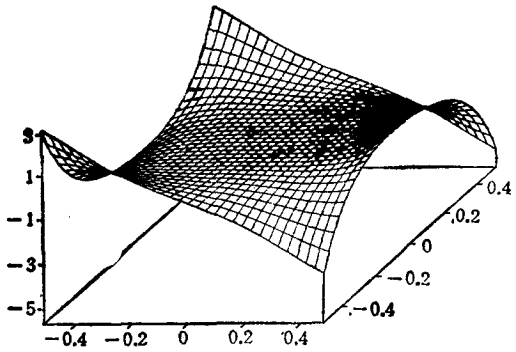
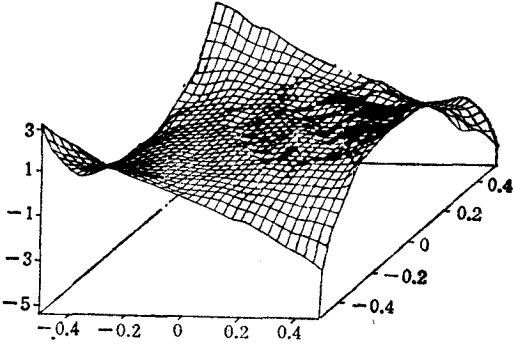
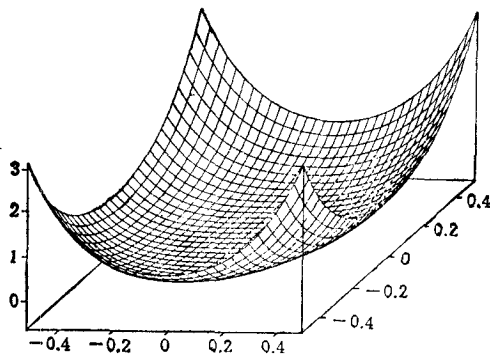
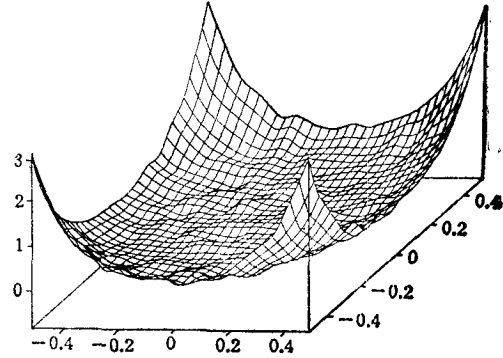


图 3(b)  $a = 4$  时, 函数  $F_1$  的相位恢复解

图 4(a) 函数  $F_2$  的真实相位分布:  $\varphi_1(x_1) = 4\pi x_1^2$ 图 4(b)  $a = 4$  时, 函数  $F_2$  的相位恢复解图 5(a) 函数  $F_3$  的真实相位分布:  $\varphi_1(x_1) = 4\pi(x_1^2 - 3x_1y_1^2)$ 图 5(b)  $a = 4$  时, 函数  $F_3$  的相位恢复解图 6(a) 函数  $F_4$  的真实相位分布:  $\varphi_1(x_1) = 8\pi x_1^2(x_1^2 - 3x_1y_1^2)$ 图 6(b)  $a = 4$  时, 函数  $F_4$  的相位恢复解表 2  $a = 4$  时, 五个象差函数的收敛特征

波函数 $U_1$	SSE	迭代次数 $N$	平均相位偏差 $\Delta\varphi_1$
$F_1$	$4.09 \times 10^{-7}$	100	$3.80 \times 10^{-2}$
$F_2$	$2.09 \times 10^{-7}$	100	$2.32 \times 10^{-2}$
$F_3$	$5.30 \times 10^{-6}$	200	$5.23 \times 10^{-2}$
$F_4$	$1.99 \times 10^{-3}$	200	$4.72 \times 10^{-2}$
$F_5$	$5.40 \times 10^{-7}$	100	$3.40 \times 10^{-2}$

图 7(a) 函数  $F_3$  的真实相位分布:  $\varphi_1(x_1) = 8\pi x_1^2$ 图 7(b)  $a=4$  时, 函数  $F_3$  的相位恢复解

为了考察  $G$  的非么正性质对计算结果的影响, 图 8 给出对于不同的变换系统(光阑孔径  $a$  分别取为 16, 8, 4 和 2,  $a=4$  的结果见图 5), 同一个函数  $F_3$  的相位恢复解, 相应的收敛特征见表 3. 这里, 可以看到, 当  $a \geq 8$  时, 所得到的解完全符合真实相位分布, 与邵志锋和西门纪业在傅里叶变换系统中用 GS 算法得到的结果相同<sup>[6]</sup>. 这对应着变换  $G$  非常接近于么正变换的情况(见表 1). 而当  $a < 8$  时,  $G$  明显地偏离了么正变换, 所得解

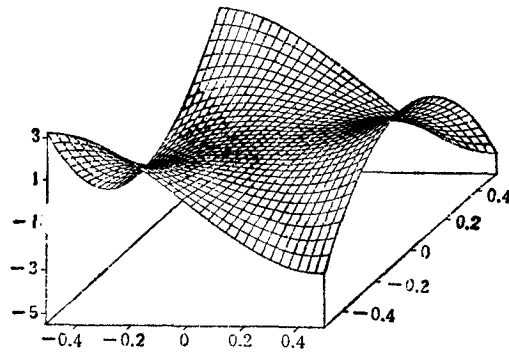
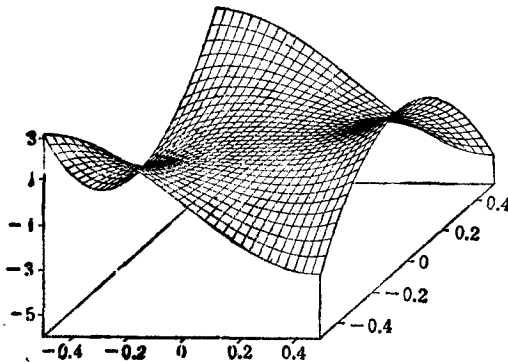
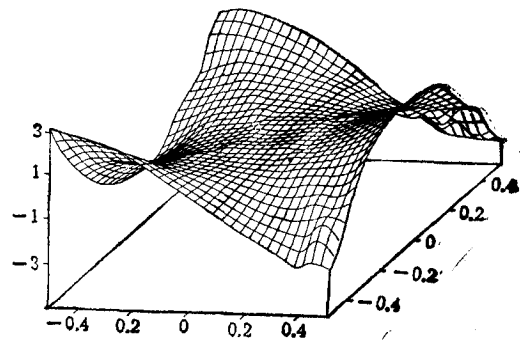
(a)  $a=16$  时(b)  $a=8$  时(c)  $a=2$  时图 8 函数  $F_3$  的相位恢复解

表3 在不同的衍射损耗下,函数  $F_3$  的收敛特征

光阑尺寸 $a$	SSE	迭代次数 $N$	平均相位偏差 $\Delta\varphi_1$
16	$1.77 \times 10^{-5}$	100	$3.82 \times 10^{-2}$
8	$1.28 \times 10^{-5}$	100	$4.70 \times 10^{-2}$
4	$5.30 \times 10^{-6}$	200	$5.23 \times 10^{-2}$
2	$4.98 \times 10^{-6}$	190	$6.56 \times 10^{-2}$

的精度下降,并需要更多的迭代次数. 其原因是,当光阑孔径  $a$  减小, (4a) 式中  $G^+G \equiv A$  远离恒等算符时,利用该式求解不动点  $\varphi_1$  的收敛速度变慢,在有限的计算时间内,不能精确到达  $D$  的极小点,使 (8) 式中的部分不等式不能成立. 因此,如何精确、快速地求解方程 (4a) 是一个值得进一步研究的问题. 图 9 表明上述情况下相对平方误差 SSE 与迭代次数的关系.

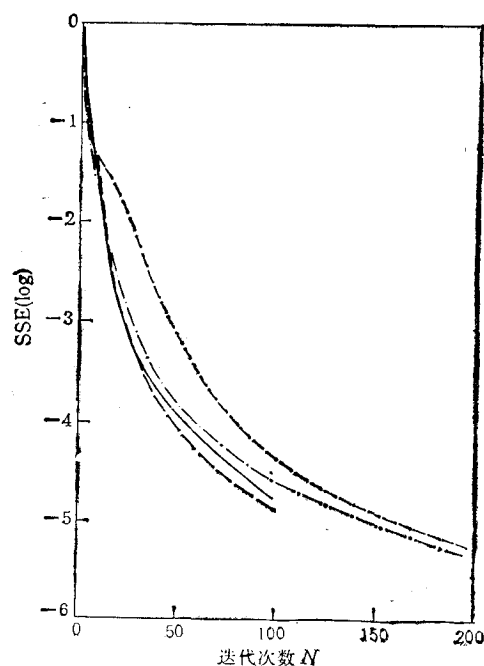


图9 对于不同的光阑尺寸, SSE 与迭代次数  $N$  的关系  
 ---为  $a=16$ ; ——为  $a=8$ ; -·-·为  $a=4$ ; ---为  $a=2$

#### 四、结 论

本文讨论了非么正变换系统中二维波场分布的相位恢复问题,以一个具有非么正变换性质的光学系统作为模型,验证我们提出的迭代算法解决二维问题的能力. 在计算中,利用光场在两个相关平面上的振幅分布数据,用任意的随机分布  $\varphi_1^{(0)}$  作为初始相位估计,重构了五个二维象差函数的相位分布,当变换系统偏离么正性质不是特别大时 ( $a \geq 2$ ), 所得的解与初始估计  $\varphi_1^{(0)}$  无关. 作为一种实用的相位恢复算法,与通常对于傅里叶



变换系统而建立的算法相比,一方面,它拓宽了相位恢复的应用范围,可适用于各种实际问题;另一方面,它可以更灵活地利用测量数据,例如,通过改变变换系统或者对样品的出射波场加上一个已知的调制,从一个测量平面就可以获得两组不同波场的振幅数据,确定了这两个波场分布之间的变换关系后,就能利用这里给出的算法恢复相位分布。

- [ 1 ] H. A. Ferwerda, *Inverse Source Problem in Optics*, Springer, Berlin, (1978), p. 13.
- [ 2 ] Yu. M. Bruck and L. G. Sodin, *Opt. Commun.*, **30**(1979), 304; J. L. C. Sang, T. S. Huang and F. Cukierman, *J. Opt. Soc. Am.*, **A73**(1983), 1442.
- [ 3 ] J. R. Fienup, *J. Opt. Soc. Am.*, **A4**(1987), 118.
- [ 4 ] R. W. Gerchberg and W. O. Saxton, *Optik*, **34**(1971), 257.
- [ 5 ] J. R. Fienup, *Appl. Opt.*, **21**(1982), 2758;  
顾本源、杨国桢、董碧珍, *物理学进展*, **8**(1988), 365.
- [ 6 ] Z. F. Shao and Ximen Ji-ye, *Optik*, **71**(1985), 15; N. Nakajima and T. Asakura, *Opt. Acta.* **32**(1985), 647; K. Chalasinska-Macukow and H. A. Arsenault, *J. Opt. Soc. Am.*, **A2**(1985), 46.
- [ 7 ] G. Z. Yang, L. Wang, B. Z. Dong and B. Y. Gu *Optik*, **75**(1987), 68.

## THE TWO-DIMENSIONAL PHASE RETRIEVAL PROBLEM IN NON-UNITARY TRANSFORM SYSTEM

WANG LI    DONG BI-ZHEN    YANG GUO-ZHEN

*Institute of Physics, Academia Sinica*

(Received 9 January 1989)

### ABSTRACT

The two-dimensional phase retrieval problem involving a non-unitary transform system with diffraction loss has been discussed. By means of our iterative algorithm, the phase distributions of five aberration functions have been recovered with the random distributions as initial input. The phase solutions agree with the true phases perfectly even though a heavy diffraction loss exists.