

梯度磁场中静电波引起的 粒子随机运动*

沐 建 林 蔡 诗 东¹⁾

中国科学院物理研究所
1989 年 1 月 14 日收到

本文讨论了一般非均匀梯度磁场下任意方向传播的静电波引起粒子随机运动的非线性效应。用正则久期扰动理论给出包含粒子周期运动和波振荡之间非线性共振的哈密顿量。根据 Chirikov 岛重叠条件给出一般梯度磁场下粒子进入随机态的临界波幅值。分析表明,相对均匀磁场,在弱非均匀情形下,该临界值降低,意味着粒子更易进入随机态。

一、引 言

由于集体效应,在等离子体中存在着许多波和不稳定性。这些波和不稳定性会扰动磁场中周期性运动的粒子,产生非线性共振^[1]。当该共振效应足够强时,将导致相空间上粒子轨迹无规行走,这种随机概念可以解释许多反常现象^[2]。Smith 和 Kaufman 的工作^[3]表明,任意方向传播的静电波会导致离子随机运动; Fukuyama 等人^[4]和 Karney 等人^[5]发现垂直磁场方向传播的低混杂波扰动等离子体并使一部分离子进入随机态;文献 [6] 分析过磁场均匀且有小剪切受低混杂波影响的情形;由于非正则理论^[7]的建立,对弱非均匀磁场在共振关系中引入漂移速度的贡献。这些工作为等离子体随机理论的建立奠定了基础。然而对于许多实际问题,例如反向场箍缩和磁尾等离子体片^[8],由于磁场的强非均匀和磁力线的反转特性存在,上述理论不再适用。因而有必要发展一套适用一般梯度磁场位形的理论。

一般梯度磁场下粒子运动的解析解很难得到。但渐近分析和数值方法已给出解的基本性质。梯度磁场下微扰哈密顿量是一个自由度可积系统,由于这里讨论的是长时间行为,引入作用积分 J 为绝热不变量是方便的。在磁场强非均匀区或力线反转区磁矩 μ 不再是守恒量,因此 μ 和 J 不再等价。在本文中给出矢势 $A(x)$ 下绝热不变量 J , 运动频率 Ω , 以及漂移速度等物理量的积分形式。在此基础上用正则变换理论讨论任意方向传播的静电波对粒子运动的影响。由久期扰动理论讨论共振点附近哈密顿函数的性质,并由 Chirikov 岛重叠判据给出使粒子进入随机态的临界电势值 ϕ_c 。该工作适用于梯度磁场情形,包括强非均匀磁场和力线反转磁场。弱非均匀磁场作为一个例子在最后给出。

* 国家自然科学基金资助的课题。

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室)理论物理分中心。

有关静电波引起离子随机运动的文献很多^[3-6,11,18]。这里讨论一般背景梯度磁场情形,并希望该理论能用来讨论强非均匀、特别是反转磁场情形下的粒子随机运动问题。

二、物理模型

采用一维平板磁场模型,磁力线沿 z 方向,磁场非均匀性在 x 方向。这样, $\mathbf{A} = A_y(x)\mathbf{e}_y$, 带电粒子的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2m_0} p_x^2 + \frac{1}{2m_0} (p_y - qA_y(x))^2 + \frac{1}{2m_0} p_z^2 \\ &= \frac{1}{2} m_0 v_{\perp}^2 + \frac{1}{2m_0} p_z^2. \end{aligned} \quad (1)$$

这里 p 为正则动量; H_0 中不含 y 和 z , 故 $p_y = c_1$, $p_z = c_2$ 为常量, 所以 (1) 式是一个自由度的可积系统, 它描写带电粒子在矢势场 $A_y(x)$ 中的周期运动。当存在一静电扰动势

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0 \exp i[k_x x + k_y y - \omega_0 t] \quad (2)$$

时, 粒子运动受影响, 哈密顿量 (1) 式应改为

$$H = H_0 + \varepsilon e \phi_0 \exp i[k_x x + k_y y - \omega_0 t]. \quad (3)$$

这里限于讨论 $\phi_0 = \text{const}$ 情形^[4]。由于在许多实际问题中扰动势能远小于粒子动能, (3) 式等号右端第二项为小量, 用 ε 表示, 最后可令 $\varepsilon = 1$ 。这样 (3) 式可由正则扰动理论分析求解^[9]。因为这里讨论的是长时间行为并且 (1) 式可积, 引入作用循环变量 (J, θ) 后, 可将 (1) 式变换为 $H_0 = H_0(J)$ 的形式, 从而方便地讨论扰动 (2) 式的影响。由于粒子运动和波振荡均有周期性因而会产生共振。共振点处是数学上的奇点。为了能获得更多有关共振点附近哈密顿量性质的信息, 这里采用久期扰动技术。

三、未抗解

(1) 式中含有运动积分 p_y 和 p_z 。在微扰情况下, 设粒子在 x 方向的最大坐标为 x_0 , 显然, 在 x_0 处 $v_y = v_{\perp}$ 。这样 $p_y = m_0 v_{\perp} + qA(x_0) = c_1$; $p_z = m_0 v_z = c_2$ 。代入 (1) 式中可得

$$H'_0 = \frac{1}{2m_0} p_x^2 + \frac{q^2}{2m_0} [A(x_0) - A(x)][A(x_0) - A(x) - A(L_0)], \quad (4)$$

式中 L_0 由 $A(L_0) = -2m_0 v_{\perp}/q$ 给出。因为不考虑扰动, (4) 式中已略去常数项

$$\frac{1}{2} m_0 v_{\perp}^2. \quad H'_0 = H_0 - \frac{1}{2} m_0 v_{\perp}^2 = 0,$$

它描写一个总能为零的粒子在势场

$$u(x) = \frac{q^2}{2m_0} [A(x) - A(x_0)][A(x) - A(x_0) + A(L_0)] \quad (5)$$

中的运动。势场的形状取决于 $A(x)$, x_0 和 v_{\perp} 。由于 $H'_0 = 0$, (4) 式给出

$$p_x = q([A(x) - A(x_0)][A(x_0) - A(x) - A(L_0)])^{1/2}. \quad (6)$$

上式分离变量并积分可得

$$t = \int_0^x \frac{m_0 dx'}{q([A(x') - A(x_0)][A(x_0) - A(x') - A(L_0)])^{1/2}}. \quad (7)$$

又由 $p_y = m_0 v_{\perp} + qA(x_0)$, 给出

$$v_y = v_{\perp} + \frac{q}{m_0} [A(x_0) - A(x)] = v_d + \{v_y\}, \quad (8)$$

式中

$$v_d = v_{\perp} + \frac{q}{m_0} \langle [A(x_0) - A(x)] \rangle \quad (9)$$

为磁场几何引起的漂移速度, 它包括磁场梯度漂移或者磁力线反转引起的漂移^[10]. 这里 $\langle \rangle$ 表示在周期时间内的平均, 周期 T 由 (7) 式取回路积分求得. (8) 式中 $\{ \}$ 代表物理量的振荡部分. 由 (8) 式给出 y 的形式解

$$y = v_d t + \{y\}. \quad (10)$$

为方便, 已设初始 y 值为零. $\{y\}$ 可以展开为傅氏级数, 因为粒子运动周期为 T , 上式改为

$$y = v_d t + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin 2\pi l \frac{t}{T}, \quad (10')$$

式中 b_l 由 (8) 式中 $qA(x)$ 确定. 根据引导中心的意义, 将引导中心 x 坐标 X_g 定义在 $\partial u / \partial x = 0$ 的一个根处, 使粒子在 x_g 附近振荡. 由 (5) 式知 X_g 满足

$$A'(X_g) = B(X_g) = 0 \quad (11)$$

或者

$$A(X_g) = A(x_0) - \frac{1}{2} A(L_0). \quad (11')$$

由 (10') 式, 引导中心 Y 坐标则为

$$Y_g = v_d t, \quad (12)$$

引入作用积分

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx \\ &= \frac{q}{2\pi} \oint ([A(x) - A(x_0)][A(x_0) - A(x) - A(L_0)])^{1/2} dx, \end{aligned} \quad (13)$$

它是绝热不变量. 因为 (1) 式可积, 由哈密顿原理知, 可以将 (1) 式变换到引导中心上. 形式上它为

$$H_0 = H_0(J) + \frac{1}{2m_0} p_z^2. \quad (14)$$

粒子运动频率由 $\Omega_0 = 2\pi/T$ 给出,

$$\Omega_0 = \frac{2\pi q}{m_0} \frac{1}{\oint \frac{dx}{([A(x) - A(x_0)][A(x_0) - A(x) - A(L_0)])^{1/2}}}. \quad (15)$$

这样, 循环角坐标为

$$\theta = \Omega_0 t + \theta_0.$$

并且(13),(14)和(15)式满足

$$\Omega_0 = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J}. \quad (16)$$

$H_0(J)$ 的表达式很难求解,但它的基本性质已由(6)–(10)式给出.一旦 $A(x)$ 给定,运动特性也就确定.所以 $H_0(J)$ 的表达式也就不十分重要.

四、正则变换

由上节结果和微扰理论^[9], (3)式改为

$$H = H_0(J) + \frac{1}{2m_0} p_z^2 + \varepsilon e \phi_0 \exp i [k_x z + k_y v_d(J)t + \sum l k_y b_l \sin l\theta - \omega_0 t]. \quad (17)$$

显然,非线性项含在 $\exp i[\]$ 中的第二项和第三项中.为简化上式,在 $\exp i[\]$ 中变换掉时间变量,取如下母函数:

$$s_1 = -J\bar{\theta} - (\phi - k_y v_d(J)t + \omega_0 t) \frac{p_x}{k_x} - \frac{p_{x0}}{k_x} k_y v_d(J)t, \quad (18)$$

式中 p_{x0} 为初始 p_x 值,给出如下变换关系:

$$\begin{aligned} \theta &= \bar{\theta} - \Delta k_y \frac{\partial v_d}{\partial J} t, \quad \bar{J} = J, \quad \bar{p}_x = \frac{p_x}{k_x}, \\ k_x z &= \phi - k_y v_d(J)t + \omega_0 t. \end{aligned}$$

这里 $\Delta = p_x - p_{x0}$.这样(17)式变换为

$$H' = H_0(\bar{J}) + \frac{k_x^2}{2m_0} \bar{p}_x^2 - \bar{p}_x \omega_0 + \Delta k_y v_d(\bar{J}) + \varepsilon e \phi_0 \exp i \left[\phi + \sum_l k_y b_l \sin l \left(\bar{\theta} - \Delta k_y \frac{\partial v_d}{\partial J} t \right) \right]. \quad (19)$$

它的未扰部分给出未扰频率

$$\begin{aligned} \omega_\theta &= \frac{\partial H_0(\bar{J})}{\partial \bar{J}} + \Delta k_y \frac{\partial v_d(\bar{J})}{\partial \bar{J}} = \Omega_0 + \Delta k_y \frac{\partial v_d}{\partial J}, \\ \omega_{\bar{x}} &= \frac{k_x^2}{m_0} \bar{p}_x + k_y v_d(\bar{J}) - \omega_0. \end{aligned}$$

以上两式给出零级时波粒相互作用的共振条件 $\omega_{\bar{x}} + n\omega_\theta = 0$,即

$$k_x v_x + n\Omega_0 - \omega_0 + k_y v_d + n\Delta k_y \frac{\partial v_d}{\partial J} = 0. \quad (20)$$

在均匀磁场情形,正则理论给出上式等号左端前三项,但 Ω_0 为常数^[3].对弱非均匀磁场,非正则理论引入第四项^[11],主要针对磁场梯度,而这里包括了磁场反向引起的漂移^[10].上式等号左端最后一项的意义是由于扰动沿 y 方向传播且粒子在 y 方向有漂移,扰动对粒子运动频率有一修正.另外,值得一提的是对于 $k_x = 0$,即垂直磁场方向传播的波,(20)式的共振条件化为

$$k_y v_d(J) - \omega_0 + n\Omega_0(J) = 0.$$

它依赖于特定的 J 而为随机共振^[12]情形,这里完全不同于均匀磁场时的内在简并情形^[13].

在由(20)式确定的共振点附近经典微扰理论失效,需用久期扰动理论^[14]. 取

$$\hat{\phi} = \phi + n\bar{\theta}.$$

显然,在共振点附近 $\hat{\phi} \rightarrow 0$, $e^{i\hat{\phi}}$ 为慢变函数. 采用如下母函数:

$$s_2 = -\bar{p}_\phi(\hat{\phi} - n\hat{\theta}) - \hat{\theta}\bar{J}. \quad (21)$$

有如下久期变换关系:

$$\bar{\theta} = \hat{\theta}, \quad \bar{J} = \hat{J} - n\bar{p}_\phi, \quad \phi = \hat{\phi} - n\theta, \quad \hat{p}_\phi = \bar{p}_\phi.$$

利用

$$\exp i \left[\sum_l x_l \sin l\varphi \right] = \prod_l \left[\sum_m J_m(x_l) \exp i l m \varphi \right],$$

可将(19)式化为

$$\begin{aligned} H'' = & H_0(\hat{J} + n\hat{p}_\phi) + \frac{k_x^2}{2m_0} \hat{p}_\phi^2 - \hat{p}_\phi \omega_0 + \Delta k_y v_d(\hat{J} + n\hat{p}_\phi) \\ & + \varepsilon e \phi_0 \exp i \hat{\phi} \prod_l \left[\sum_m J_m(k_y b_l) \exp i (-n\theta \right. \\ & \left. + \sum_{m'=m_l} m' \left(\hat{\theta} - \Delta k_y \frac{\partial v_d}{\partial J} \right) \right)]. \end{aligned} \quad (22)$$

因为 $e^{i\hat{\phi}}$ 为慢变函数,对上式快时振荡平均后可得共振点附近的平均哈密顿量

$$\begin{aligned} \bar{H} = & H_0(\hat{J} + n\hat{p}_\phi) + \frac{k_x^2}{2m_0} \hat{p}_\phi^2 - \hat{p}_\phi \omega_0 + \Delta k_y v_d(\hat{J} + n\hat{p}_\phi) \\ & + \varepsilon e \phi_0 \prod_l [\sum_m J_m(k_y b_l)] \cos \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (23)$$

式中 m , n 和 l 的取值由

$$n \left(\Omega_0 + \Delta k_y \frac{\partial v_d}{\partial J} \right) - \sum_{m'=m_l} m' \Omega_0 = 0 \quad (23')$$

给出. 这样 \bar{H} 中不含 $\hat{\theta}$, $\hat{J} = \text{const}$, (23) 式为一个自由度可积系统. 固定点位置由 $\partial \bar{H} / \partial \hat{p}_\phi = 0$ 和 $\partial \bar{H} / \partial \hat{\phi}_t = 0$ 求得. 由 $\partial \bar{H} / \partial \hat{\phi}_t = 0$, 有 $\sin \hat{\phi}_t = 0$, 即

$$\phi_t = 0; \pi.$$

又由 $\frac{\partial \bar{H}}{\partial \hat{p}_\phi} = 0$, 有

$$\begin{aligned} & \left[\frac{k_x^2}{m_0} \hat{p}_\phi + k_y v_d - \omega_0 + n \left(\Omega_0 + \Delta k_y \frac{\partial v_d}{\partial J} \right) \right] \Big|_{\hat{p}_\phi = \hat{p}_\phi_t} \\ & = \pm \frac{\partial}{\partial \hat{p}_\phi} \left[\varepsilon e \phi_0 \prod_l \left(\sum_m J_m(k_y b_l) \right) \right] \Big|_{\hat{p}_\phi = \hat{p}_\phi_t}, \end{aligned}$$

式中“+”对应于 $\phi_t = 0$; “-”对应于 $\phi_t = \pi$. 这样在由上面两式确定的固定点 \hat{p}_ϕ 和 $\hat{\phi}_t$ 处展开(23)式,略去常数项后,可得

$$\Delta \bar{H} = \frac{1}{2} G(\Delta \hat{p}_\phi)^2 - F \cos \hat{\phi}. \quad (24)$$

这里 $\Delta \hat{p}_\phi = \hat{p}_\phi - \hat{p}_\phi_t$, 式中

$$G = n^2 \frac{\partial \Omega_0}{\partial J} + 2nk_y \frac{\partial v_d}{\partial J} + \frac{k_z^2}{m_0}, \quad F = \epsilon e \phi_0 \prod_l \left(\sum_m J_m(k_y b_l) \right).$$

形式上(24)式是摆的哈密顿量^[15]. 写成这种形式是共振点附近的基本特性, 因此常称(24)式为标准哈密顿量^[16]. 标准哈密顿量的特性由固定点上的 G 和 F 给出, 而 G 和 F 由特定问题给定. 例如, 对均匀磁场情形, Ω_0 和 v_d 均与 J 无关, 由上式可推出 Smith 等人的结果^[3]. 引入磁场非均匀性, G 发生变化, 从而改变“摆”的频率、振幅和岛宽等性质.

五、随机的重叠判据

(3)式是否在随机态取决于(24)式的 G 和 F . 确定进入随机态的标准很多^[9], 其中最直观简便的估计是 Chirikov^[16]的岛重叠判据. (24)式是标准哈密顿量, 这时可用该判据^[9]. 虽然它给出的值偏高, 但作为一级近似是足够的. 如图1所示的是(24)式的相空间图. 由图1可见, 围绕 $\Delta \hat{p}_\psi = 0, \hat{\psi} = 0$ 固定点存在着椭圆形闭合曲线. 这些椭圆形岛中具有最大宽度的对应于 $\Delta \hat{p}_\psi = 0$ 和 $\hat{\psi} = \pi$ 固定点. 这样, 由(24)式可求出最大岛宽为

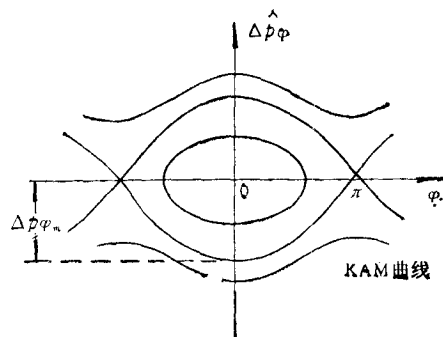


图1 (24)式的相空间图

$$\Delta \hat{p}_{\psi_{\max}} = 2 \left(\frac{F}{G} \right)^{1/2}$$

$$= 2 \left[\frac{\epsilon \phi_0 \prod_l (J_m(k_y b_l))}{n^2 \frac{\partial \Omega_0}{\partial J} + 2nk_y \frac{\partial v_d}{\partial J} + \frac{k_z^2}{m_0}} \right]^{1/2}. \quad (25)$$

当所加扰动较小时, ϕ_0 很小, $\Delta \hat{p}_{\psi_{\max}}$ 较小, 与 \hat{p}_{ψ_i} 相邻共振点处的岛尺度也较小, 这些岛被 KAM^[9]曲线相隔开, Chirikov 认为系统未达随机态. 当 ϕ_0 足够大时, 相邻共振点处岛尺度较大, 当它们能相接触时, Chirikov 认为粒子轨迹可以在两岛中无规行走, 从而到达随机态. 由(17)式可估计出两共振点之间的距离为

$$\delta \hat{p}_\psi \approx \frac{\Omega_0}{\frac{k_z^2}{m_0} - nk_y \frac{\partial v_d}{\partial J}}, \quad (26)$$

式中分母上已略去 $\theta(\epsilon)$ 项. 这样, 令 $\delta \hat{p}_\psi = 2\Delta \hat{p}_{\psi_{\max}}$, 给出进入随机态的临界值

$$\epsilon \phi_0 \gtrsim \frac{\Omega_0 \left(n^2 \frac{\partial \Omega_0}{\partial J} + 2nk_y \frac{\partial v_d}{\partial J} + \frac{k_z^2}{m_0} \right)^{1/2}}{4 \left(\frac{k_z^2}{m_0} - nk_y \frac{\partial v_d}{\partial J} \right) \left[\prod_l \left(\sum_m J_m(k_y b_l) \right) \right]^{1/2}}. \quad (27)$$

这里 n, l 和 m 之间的关系由(23')式给定.

六、讨 论

(27)式是一般梯度磁场下静电波对粒子扰动使其进入随机态的临界电势值。这里有两点限制：一是适用于直线非均匀磁力线情形；另一是适用于静电波扰动。前者使零级哈密顿量 H_0 为可积系统；后者是非相对论力学处理的保证。当磁力线分布特性给定后， $Q = Q_0(J)$ 和 $v_d = v_d(J)$ 给定，由(27)式可估出 ϕ_c 。由于一般情况下解析解很难获取，需用数值方法，这已超出本文范围。这里以弱非均匀磁场情形分析一下(27)式。假设磁场为

$$\mathbf{B} = -B_0 \left(1 + \frac{x'}{a} \right) \mathbf{e}_z.$$

并设 $\rho \ll a$ ， ρ 为拉莫半径。作坐标变换， $x = x' + a$ ，上式的矢势为

$$\mathbf{A} = -B_0 \frac{x^2}{2a} \mathbf{e}_y,$$

代入(6)–(10)式，可得 $x = x_0 \operatorname{dn}(\omega_b t, \alpha)$ ， $y = v_d t + \sum b_l \sin l \Omega_0 t$ ，

$$\text{式中 } v_d = \frac{2v_\perp}{\alpha^2} \left(\frac{E(\alpha)}{K(\alpha)} - \left(1 - \frac{1}{2} \alpha'^2 \right) \right), \quad b_l = \frac{2\pi v_\perp}{\alpha' \omega_b K(\alpha) \sinh \left(l\pi \frac{K'(\alpha)}{K(\alpha)} \right)}.$$

这里 dn 为雅可比椭圆函数记号^[21]， $\alpha = \frac{L_0}{x_0}$ ， $L_0 = \frac{4v_\perp}{A_0}$ ， $A_0 = \frac{qB_0}{m_0 a}$ ， $\omega_b = \frac{1}{2} A_0 x_0$ ， E 和

K 为完全椭圆积分记号^[21]，并且 $K'(\alpha) = K(\sqrt{1-\alpha^2})$ 。又由(13)和(15)式求得

$$J = \frac{4m_0}{3\pi\alpha'} \sqrt{\frac{v_\perp^3}{A_0}} [(2-\alpha')E(\alpha) + 2(\alpha'-1)K(\alpha)],$$

$$Q_0 = \frac{\pi\omega_b}{K(\alpha)}.$$

以上结果是弱非均匀磁场下粒子运动的精确解。在 $\rho \ll a$ 近似下，它们化为

$$J \approx \frac{1}{32} m_0 A_0 \alpha^4 x_0^3, \quad Q_0 \approx A_0 x_0 \left(1 - \frac{1}{4} \alpha'^2 \right), \quad v_d \approx \frac{\pi}{8} A_0 x_0^2 \left(-\frac{1}{8} \alpha'^2 \right).$$

由上面三式可求得 $\frac{\partial Q_0}{\partial J} \approx -\frac{4}{m_0 L_0^2}$ ， $\frac{\partial v_d}{\partial J} \approx -\frac{1}{m_0 x_0}$ 。

由于 b_l 中含有 $\sinh^{-1}(l\pi K'/K)$ ，除 $b_1 \approx \rho$ ，其余为小量。又因为此时 Δ 为小量，(23')式为 $n = m$ 。取 $n = 1$ ， $k, b_1 \approx 1.5$ ，使 $J_1(k, b_1)$ 有极大值，并由 $x_0 \approx a$ ， $\rho \ll a$ ，由(27)式估出

$$\phi_c = \phi'_{0c} \left(1 - \frac{5}{2k^2 \rho x_0} \right).$$

这里 $\phi'_{0c} = \frac{Q_0 \sqrt{m_0}}{4k_x J^{1/2}(k_y \rho)}$ 是 Smith 等人在均匀磁场下的结果^[2]。显然，对以上特设情形，磁场非均匀性降低使粒子进入随机态的临界电场，此时粒子更易进入随机态。对强非均匀梯度场，由于 $Q_0(J)$ 和 $v_d(J)$ 较复杂，需数值计算。特别是在磁力线反转区处，粒子

运动特性和常规的不同^[10], 这需要本文的理论来讨论. 限于篇幅和范围, 这将在以后的数值工作中给出.

感谢中国等离子体研究会的帮助.

- [1] I. B. Bernstein and D. C. Baxter, *Phys. Fluids*, **24**(1981), 108.
- [2] R. H. Cohen and G. Rowlands, *Phys. Fluids*, **24**(1981), 2295.
- [3] G. R. Smith and A. N. Kaufman, *Phys. Fluids*, **21**(1978), 2230.
- [4] A. Fukuyama *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **38**(1977), 701.
- [5] C. C. F. Karney and A. Bers, *Phys. Rev. Lett.*, **39**(1977), 550.
- [6] Y. Gell *et al.*, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 1671.
- [7] R. Litterjohn, *Phys. Fluids*, **24**(1981), 9.
- [8] L. A. Frank, *Space Sci. Rev.*, **42**(1985), 211.
- [9] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [10] 沐建林等, *科学通报*, **34**(1989), 762.
- [11] C. Grebogi and A. N. Kaufman, in *Long-time Prediction in Dynamics*, ed. by C. W. Horton, Jr. *et al.*, John Wiley and Sons, New York, (1983).
- [12] F. Jaeger and A. J. Lichtenbers, *Ann. Phys.*, **71**(1972), 319.
- [13] F. M. Izrailev, *Physica*, **1D**(1980), 243.
- [14] L. J. Laslett, in *Focusing of Charged particles*, Vol. 2, ed. by A. Septier, Academic Press, (1967).
- [15] A. B. Rechester and T. H. Stix, *Phys. Rev.*, **A19**(1979), 1656.
- [16] B. V. Chirikov, *Phys. Reports*, **52**(1979), 265.
- [17] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag, New York, (1972).
- [18] R. H. Cohen, in *Intrinsic Stochasticity in Plasma*, ed. by G. Laval and D. Gresillon, Les Editions De Physics, France, (1979).

THRESHOLD OF STOCHASTIC MOTION OF CHARGED PARTICLES IN GRADIENT MAGNETIC FIELD BY ELECTROSTATIC WAVE

MU JIAN-LIN CAI SHI-DONG (S. T. TSAI)

Institute of Physics, Academia Sinica

(Received 14 January 1989)

ABSTRACT

Nonlinear effects of the gradient inhomogeneity of the magnetic field on the stochastic motion of charged particles due to an electrostatic wave propagated arbitrarily relative to the magnetic field are considered in this paper. A sequence of canonical transformations is performed to obtain a Hamiltonian explicitly exhibiting the possibility of the resonance between the periodic motion of particles and oscillation in the wave. The theoretical analysis shows that, due to the inhomogeneity of the magnetic field, the threshold for the onset of the stochasticity is changed and, in the case of weak inhomogeneity of the magnetic field, it is lowered, which means that the stochasticity appears more easily than in the case of uniform magnetic field.