第 39 卷 第 3 期　　物 理 学 报　　Vol. 39, No. 3
1990 年 3 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Mar., 1990

由微观随机动力学导出非平衡稳定态的长程相关性（I）

用随机点阵气模型构造出宏观涨落流体力学理论

李 富 斌
淮北煤炭师范学院物理系，安徽，淮北，235000
1989 年 5 月 19 日收到

研究了在一个平板上具有单独局域守恒场(即随机点阵气模型)的系统. 在该平板的两个表面上保持着不同的密度，依据涨落流体力学理论，本文证明了其静态密度-密度相关是长程的. 且当其维数 $d \geqslant 3$ 时，该静态密度-密度相关是按 $-1/|x-y|^{d-2}$ 衰减. 研究了随机点阵气模型在非平衡稳定态中的长程相关性，并构造出纯粹宏观的涨落流体力学理论。

PACC: 4770; 0540; 0550; 3120J

一、引　　言

热平衡流体的相关范围是按指数规律衰减的，其衰减的程度可与分子间势的相关范围的衰减程度相比较，仅当其接近边界状态时，其相关长度才有可能发散. 人们所期望的究竟是何种类的相关，通过恰当的边界条件才能对非平衡稳态的流体产生影响呢?

自 20 世纪 80 年代以来，这个问题引起了国际上大量学者的关注[1-16]，其主要原因是由于理论上所期望的效应现在已被实验所接受[17]. 当从微观角度即从互作用粒子系统的水平上来研究这个问题时，其主要困难是其稳定态的定义仅是用在有恰当边界条件时某些线性方程的平稳解来定义的，因此，稳定态的性质就不大容易加以提取. 所以大多数学者对此问题的理论处理都是绕开微观理论而直接采用涨落流体力学理论与广义局域平衡假定来处理. 当然对于稀薄气体，也可采用分子运动论来处理，在此特殊情形下，是以质点牛顿力学为其理论基础. 可以证明，在时间限制为很短的条件下，受单粒子空间含时涨落所支配的方程就变为精确的 Boltzman-Grad 极限[18-19].

本文旨在研究随机点阵气模型的非平衡稳定态问题，在此模型中，研究在随机时间内，位于点阵上的粒子向其邻近位置的随机跳动. 假定点阵气模型中存在有一个相斥的硬心，故使每个点阵位置至多只有一个粒子，且假定其跳动速率依赖于其邻近的位形. 这样就可在时间进程中去研究大数粒子. 细微平衡的条件固定了整个系统的温度，而在没有边界条件的情形下，Gibbs 正则分布就是一个时间不变式.

与流体相比较，作为具有众多经典粒子的模型的随机点阵气模型可按如下两种主要

方法加以简化：1）逼近平衡，并将随机性直接嵌入到模型中；2）随机点仅具有一个局域守恒场，即密度场．所以流体力学描述可简化为一个非线性扩散方程．另一方面，在互作用的多粒子系统的两种形式（流体与气体）上，随机点阵气虽然具有与真实流体共同的性质．也正是由多粒子间这种互作用，所以从定性上看，随机点阵气的非平衡稳定态所具有的长程相关性与流体的非平衡稳定态所具有的长程相关性在本质上是相同的．

由于在随机点阵气模型中，只有密度是局域守恒的，故由贝纳德-瑞利实验所描述的贝纳德流就是最简单的非平稳稳定态．假定有一种理想的几何学平板，在其板的左、右边界上，诸粒子可确定的速率进入和离开所要研究的系统，其边界密度 ρ_+ 与 ρ_- 均是固定不变的．在经过某些瞬变周期以后，系统便建立起稳定态．如果 $\rho_+=\rho_-=\rho$，则此稳定态就是极好的正则 Gibbs 态，该态所具有的易逸度 $z(\rho)$ 依赖于其板的边界密度和由动力学所确定的温度．在此种情形下，人们就能很好的了解此态的定性结构．然而，本文的注意力却是 $\rho_+\neq\rho_-$ 的情形．

为了提出对 $\rho_+\neq\rho_-$ 情形的定量描述，Murch 于 1980 年曾研究过 $16\times16\times16$ 点阵在各种密度和温度下与邻域的互作用[20]．事实说明只有小密度梯度的稳态流才能用整体扩散系数来确定．尽管用随机点阵气模型已能对许多物质（如二元混合物，金属与超导体中的氢等）作出成功的描述，但我们并未意识到这种有关真实系统的实验．

本文将首先用随机点阵气模型（即用单个的局域守恒场）构造出一个纯宏观的涨落流体力学理论．发现当其距离上的维数 $d\geqslant 3$ 而小于几何平板的宽度 L 时，态的密度-密度相关是按 $(-((\rho_+-\rho_-)/2L)^2/|x-y|^{d-2})$ 规律衰减．虽然在其它的文献中对边界条件所产生的影响的实质几乎未作叙述，但本文对此却作了深入的探讨，指出在上述情形密度梯度中的效应是二阶效应．对于流体，因对流项存在而产生温度梯度的情形下，对于某些相关的这种慢衰减只是一阶效应． 为了解用单个局域守恒场所建立的涨落流体力学理论，Tremblay 等人于 1981 年曾分别作过研究[13,21]，Tremblay 等人仅研究了来自均匀密度的一阶导数[13]；相反，Medina-Noyola 等人却假定依赖于输运系数的密度是一个十分特殊的密度[21]．

二、随机点阵气模型

假定诸粒子在 d 维点阵 $\mathbf{Z}^d$ 上跳变，每个点阵位置上最多仅有一个粒子，在此需注意的是把嵌入到随机点阵气模型中的硬心排除在外，这样当采用下文中的其它一些假定时，便可减少约束．将占有点阵位置的变量用 η_x 表示，且 $x\in\mathbf{Z}^d$；当 $\eta_x=1$ 时，相应于位置 x 已被占有；当 $\eta_x=0$ 时，则相应于位置 x 是空的；而 $\eta=\{\eta_x|x\in\mathbf{Z}^d\}$ 表示粒子位形．

为简便起见，假定通常最邻近的粒子间的互作用能为

$$H(\eta)=-\frac{1}{2}\sum_{|x-y|=1}\eta_x\eta_y, \tag{1}$$

并令

$$c(x,y,\eta)\geqslant 0, \tag{2}$$

表示位形 η 中占有位置 x 与 y 的粒子间的交换速率．因此，$c(x,y,\eta)=c(y,x,\eta)$．如果

$\eta_x=1$ 且 $\eta_y=0$,则 $c(x,y,\eta)$ 就是位形 η 中粒子由 x 点跳变到 y 点的交换速率；如果 $\eta_x=\eta_y$,则可令 $c(x,y,\eta)=0$;对于交换速率 $c(x,y,\eta)$,将作如下五条假定：

1）$c(x,y,\eta)$ 对所有的 $a\in\mathbf{Z}^d$, $c(x+a,\ y+a,\ \tau_a\eta)=c(x,y,\eta)$ 变换下为不变量，其中 τ_a 是通过 a 来漂移，且 τ_a 是转动情形下的不变量.

2）每当 $|x-y|>1$ 时，总有 $c(x,y,\eta)=0$，这意味着只允许最邻近点之间的跳变. 为避免简并发生，还假定每当 $|x-y|=1$ 时，总有 $c(x,y,\eta)>0$.

3）$c(x,y,\eta)$ 是有限区域的交换速率，即 c 仅依赖于 x 与 y 的有限邻域.

4）相对于互作用能(1)式，$c(x,y,\eta)$ 满足细致平衡的条件，即有

$$c(x,y,\eta)=c(x,y,\eta^{xy})\exp[-\beta(H(\eta^{xy})-H(\eta))]. \tag{3}$$

此处 η^{xy} 表示已占有可交换点 x 与 y 的位形 η

$$(\eta^{xy})_z=\begin{cases}\eta_x, & \text{当 } z=y;\\ \eta_y, & \text{当 } z=x;\\ \eta_z, & \text{当 } z\neq x,\ y.\end{cases} \tag{4}$$

5）假定 β 是充分小，小到以致在 $0\leqslant\rho\leqslant1$ 间的任何密度下，只有一个相.

如果 β 允许两相共存，则对于 $d\geqslant3$ 的热平衡系统，就早已形成了一个稳定的界面. 因而，在合适的范围中，稳定态将会具有一个能给出 ρ_+ 与 ρ_- 的界面. 而该界面的平均位置应由通过该界面的质量流的平衡来确定.

依据上述有关 c 的假定，则动力学的生成元由下式给出：

$$(Lf)(\eta)=\frac{1}{2}\sum_{x,y}c(x,y,\eta)(f(\eta^{xy})-f(\eta)). \tag{5}$$

将上述生成元作用在仅依赖于有限数目占有变量的函数 f 上，由 L 可求出有界空间上唯一的 Markov 半群

$$T_t=e^{Lt},\ t\geqslant0 \tag{6}$$

和 $\{0,1\}^{Z^d}$ 上的连续函数[22]. 令 χ_A 为 Borel 集合 $A\subset\{0,1\}^{Z^d}$ 的特性函数，则

$$(e^{Lt}\chi_A)(\eta)=\int e^{Lt}(\eta\,|\,d\eta'), \tag{7}$$

就给出 $t=0$ 时系统处于位形 η 中的几率，该系统是时间 t 时位形的一组集合 A. 因此核 e^{Lt} 就是转移几率，由于运动力学遵从 Markov 过程，故其它量均由此转移几率来确定.

若令 $\langle\rangle_\rho$ 表示在密度 ρ, $0\leqslant\rho\leqslant1$ 与适用于能量(1)式的反转温度 β 时的热平衡态，则因细致平衡，T_t 和 L 均为如下的自伴随：

$$\langle f(T_tg)\rangle_\rho=\langle g(T_tf)\rangle_\rho,$$
$$\langle f(Lg)\rangle_\rho=\langle g(Lf)\rangle_\rho. \tag{8}$$

特别值得指出的是 $\langle\rangle_\rho$ 是时间不变式，即

$$\langle T_tf\rangle_\rho=\langle f\rangle_\rho. \tag{9}$$

在宏观水平上，包含其涨落的密度的时间演化仅由如下的两个微观量来确定：

(1) 由下式所定义的压缩系数 $\chi(\rho)$:

$$\chi(\rho)=\sum_x(\langle\eta_x\eta_0\rangle_\rho-\rho^2), \tag{10}$$

$\chi(\rho)$ 是一个不依赖于其具体跳变速率的纯静态量.

(2) 整体扩散系数 $D(\rho)$，$D(\rho)$ 依赖于动力学. 一般来说，$D(\rho)$ 是一个 $d\times d$ 矩阵. 由于假定它是各向同性的，故 $D(\rho)$ 是一个标量. 在此，$D(\rho)$ 在微观上是借助于作为对流动-流动相关函数的空时积分的 Green-Kubo 公式来定义的. 而其流动-流动相关函数具有一个正比于 $\delta(t)$ 和一个正则部分的分布. 虽然有

$$D(\rho)=\frac{1}{2\chi(\rho)}\Big(\langle c(0,e,\eta)(\eta_0-\eta_e)^2\rangle_\rho - \int_{-\infty}^{\infty}dt\sum_{x\in Z^d}\langle j(x,x+e)e^{L|t|}j(0,e)\rangle_\rho\Big), \tag{11}$$

上式中的 e 是一个单位矢量，$e\in Z^d$ 且 $|e|=1$. 上式等号右端第一项是通过接头 $(0,e)$ 的平均跳变速率. $j(x,x+e)$ 是接头 $(x,x+e)$ 处的流动函数,定义如下:

$$j(x,x+e)(\eta)=c(x,x+e,\eta)(\eta_x-\eta_{x+e}). \tag{12}$$

由于 e^{Lt} 是自伴随,故 $\Sigma_x\langle j(x,x+e)e^{L|t|}j(0,e)\rangle_\rho\geqslant 0$. 也可证明这个函数 e^{Lt} 对 t 是可积的[19]. 有一个如下式所示的通常界限:

$$0\leqslant D(\rho)\leqslant\frac{1}{2\chi(\rho)}\langle c(0,e)(\eta_0-\eta_e)^2\rangle_\rho. \tag{13}$$

由于现在对于 $D(\rho)$ 的正分布与负分布相互抵消的情形还不能严格的加以排除，故 $D(\rho)=0$.在物理上,当然期望 $D(\rho)>0$ 而远离临界点[23]. 但相信 (ρ,β) 会像 $\chi(\rho)^{-1}$ 一样而趋近于临界点，$D(\rho)$ 趋近于零.

现在,可使用所引入的随机点阵气模型从物理上对非平衡稳定态进行适当的描述.所考虑的是一个几何学平板 $\Lambda_N\subset Z^d$;在一个方向上是从 $-N$ 延伸到 N，而在其它方向上则是无限延伸的. 我们所希望的是在 Λ_N 的左边界和右边界上允许粒子的产生与湮灭，为此,当其位形为 η 时,引入 η_x 和 $1-\eta_x$ 互相交换的边界速率

$$c_{+(-)}(x,\eta)\geqslant 0, \tag{14}$$

再假定其具有平移不变性,且适用于有限范围并按如下形式达到细致平衡:

$$c_{+(-)}(x,\eta)=c_{+(-)}(x,\eta^x)\exp[-\beta(H(\eta^x)-H(\eta))]\exp[\beta\mu_{+(-)}(1-2\eta_x)]. \tag{15}$$

上式中 η^x 表示用 $(1-\eta_x)$ 可替代含有 η_x 的位形 η. 方程(15)将左、右边界上的化学势 $\mu_+(\mu_-)$ 固定,而按通常的思路,该化学势 $\mu_+(\mu_-)$ 与其相应的边界密度 $\rho_+(\rho_-)$ 相关. 包含边界条件的动力学的生成元由下式给出:

$$\begin{aligned}(Lf)(\eta)=&\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\Lambda_N,|x-y|=1}c(x,y,\eta)(f(\eta^{xy})-f(\eta))\\&+\sum_{x_1=-N,x_2,\cdots,x_d\in Z^{d-1}}c_-(x,\eta)(f(\eta^x)-f(\eta))\\&+\sum_{x_1=N,x_2,\cdots,x_d\in Z^{d-1}}c_+(x,\eta)(f(\eta^x)-f(\eta)).\end{aligned} \tag{16}$$

由此可将稳定态 $\langle\rangle_N$ 定义为

$$\langle Lf\rangle_N=0. \tag{17}$$

该定义适用于所有精确的局域函数 f. 稳定态依赖于 N 及其边界密度 ρ_+ 和 ρ_-. 如果平板的高度是有限的，则就有一个伴有有限态空间的 Markov 链，其标准结果保证了稳定态的唯一性. 对于无限平板，希望在高温下，稳定态也具有唯一性. 但对于特殊情形下的稳定态的唯一性，尚无法加以证明.

在物理上，主要关心其平均密度

$$\langle \eta_x \rangle_N \tag{18}$$

和截尾偶相关函数

$$\langle \eta_{x,t} \eta_{y,0} \rangle_N - \langle \eta_x \rangle_N \langle \eta_y \rangle_N. \tag{19}$$

在上式中使用了时间不变性. 用截尾偶相关函数可描述密度的含时涨落，在散射实验中可直接测定其空时 Fourier 变换.

三、宏观理论——涨落流体力学

由如下的非线性扩散方程:

$$\frac{\partial \rho(q,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} D(\rho(q,t)) \frac{\partial \rho(q,t)}{\partial q} \tag{20}$$

就可给出作为宏观标量的密度. 上式中的 $D(\rho)$ 可由方程(11)给出. 由于在平衡态，其流动消失故不存在漂移.

研究平板 $\Lambda_L, -L \leqslant q_1 \leqslant L, -\infty < q_2, \cdots, q_d < \infty$，其稳定态密度 ρ 是具有如下边界条件:

$$\rho_s(-L, q_2, \cdots, q_d) = \rho_-, \quad \rho_s(L, q_2, \cdots, q_d) = \rho_+ \tag{21}$$

的方程

$$\frac{\partial}{\partial q} D(\rho_s(q)) \frac{\partial \rho_s(q)}{\partial q} = 0 \tag{22}$$

的解. 借助于其对称性，该解仅依赖于 q_1. 如果 $\rho_- < \rho_+$，则稳定态密度就单调增加；如果 $D(\rho)$ 是一个很小的量，则 $\rho_s(q)$ 的变化就很大. (22)和(21)式就构成了其宏观近似式(18).

为研究涨落，先对于整体平衡的情形作一简要回顾，用 $\xi(q,t)$ 表示在其宏观空时点 (q,t) 其密度偏离均匀平均值 ρ 的偏差. $\xi(q,t)$ 是一个随机变量，且其平均值为零，并假定 $\xi(q,t)$ 的分布是 Gauss 分布. 在宏观标量上，静态涨落趋向与指数律相关，δ 与权重 $\chi(\rho)$ 相关. 所以有

$$\langle \xi(q,t)\xi(q',t) \rangle = \langle \xi(q,0)\xi(q',0) \rangle = \chi(\rho)\delta(q-q'), \tag{23}$$

式中 ρ 为平衡态密度. 因将 $\xi(q,t)$ 假定为一个小量，故依据线性宏观方程 $\xi(q,t)$ 随时间 t 的变化就是非随机性的. 另外，$\xi(q,t)$ 又不得不受微观涨落即随机力的支配，该随机力可作为确保其质量守恒的随机流的散度而表示出来. 故又假设演化方程

$$\frac{\partial \xi(q,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial q} D(\rho) \xi(q,t) - \frac{\partial}{\partial q} \cdot j(q,t). \tag{24}$$

为使 $\xi(q,t)$ 具有 Gaussian 分布，$j(q,t)$ 就必须具有平均值为零的 Gauss 分布. 因静

态测量已由(23)式给出，故随机流的协方差便由下式唯一确定：

$$\langle j_m(q,t)j_n(q'-t')\rangle = 2\delta_{mn}\delta(t-t')\delta(q-q')D\chi(\rho). \tag{25}$$

该随机流就是强度为 $D\chi(\rho)$ 的白噪声，在物理学上，$D\chi$ 恰好等于线性响应区域中的电导率.

为将非平衡稳定态广义化，仍需假设形如(24)式的另一个演化方程，其确定性部分是一个围绕稳定态的线性化的宏观方程，这就有

$$\frac{\partial \xi(q,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial q}D(\rho_s(q))\xi(q,t) - \frac{\partial}{\partial q}\cdot \boldsymbol{j}(q,t), \tag{26}$$

其涨落流 $\boldsymbol{j}(q,t)$ 仍具有平均值为零的 Gauss 分布. 但现在还没有其它现成的资料来确定 $\boldsymbol{j}(q,t)$ 的协方差. 为了进行科学的合理的推测，不妨回想一下上述宏观方程的偏差是依据系统在平衡态空时中是局域的假定而确定的. 由此不难推想到，在(25)式中，一旦涨落流的协方差被确定是局域性的，自然就可假定(26)式中涨落流的协方差仍可由下式来确定：

$$\langle j_m(q,t)j_n(q',t')\rangle = 2\delta_{mn}\delta(t-t')\delta(q-q')D\chi(\rho_s(q)). \tag{27}$$

在 (q,t) 处的强度可通过在 (q,t) 处的局域密度来确定. 即依照与热平衡态中的同样方法，用稳定态密度 $\rho_s(q)$ 来确定在 (q,t) 的强度. 最后，再对(26)式加上某些边界条件即可. 由于在边界处的密度是固定的，故其密度偏差为零. 所以有

$$\xi(-L,q_2,\cdots,q_d,t) = 0 = \xi(L,q_2,\cdots,q_d,t). \tag{28}$$

若将(26)式的稳态解和(27)(28)式结合在一起，便可构成宏观近似式(19).

由(26)，(27)和(28)式所定义的 Gauss 过程可获得唯一的平均值为零的稳定测量，其协方差为

$$c_s(q,q') = \langle \xi(q,t)\xi(q',t)\rangle. \tag{29}$$

如要导出局域平衡分布的方程

$$c_s(q,q') = \delta(q-q')\chi(\rho_s(q)) + C_{NE}(q,q'), \tag{30}$$

通过直接计算可求得

$$C_{NE}(q,q') = \int_0^\infty dt\int dq'' e^{At}(q,q'')[(\partial^2/\partial q_1'')^2(D\chi)(\rho_s(q''))]e^{A^*t}(q'',q'), \tag{31}$$

在 Dirichlet 边界条件下即在零边界条件下有

$$(A^*f)(q) = D(\rho_s(q))(\partial/\partial q)(\partial/\partial q)f(q), \tag{32}$$

式中 $e^{A^*t}(q,q')dq'$ 是在平板边界处的吸收过程和含有生成元 A^* 的扩散过程中的转移几率. 值得注意的是，如果依照边界密度 $\rho_+ - \rho_-$ 的差分展开，则 $C_{NE}\sim(\rho_+-\rho_-)^2$ 且将不能观测到一阶. 若按照 Medina-Noyola 和 Keizer 方法[21]，假定 $D\chi = 1$，则 C_{NE} 就消失为零.

当 $t \geqslant 0$ 时，可简化求得含时涨落

$$\langle \xi(q,t)\xi(q',0)\rangle = \int dq'' e^{At}(q,q'')C_s(q'',q'). \tag{33}$$

如果知道 C_{NE} 是如何依赖于 q 和 q'，则 C_{NE} 对于研究 $D=1$，$\chi(\rho)=\rho(1-\rho)$ 的特定情形是非常有用的. 对于 $|x-y|=1$，在文献[24]中讨论变换速率 $c(x,y,\eta)=1$

的简化相斥模型时，这种 $D=1$ 的情形还会再次出现．由于此情形下，D 并不依赖于 ρ，故其稳态解为

$$\rho_s(q)=\frac{1}{2L}[(L+q_1)\rho_+ + (L-q_1)\rho_-],\tag{34}$$

所以有

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}(D\chi)(\rho_s(q_1))=-2[(\rho_+-\rho_-)/2L]^2.\tag{35}$$

由于 A 是对称的，得到

$$C_{NE}(q,q')=[(\rho_+-\rho_-)/2L]^2\Delta^{-1}(q,q')\leqslant 0.\tag{36}$$

式中 $\Delta^{-1}(q,q')$ 是具有零边界条件（Green 函数）的逆拉普拉斯的核；值得注意的是在这种情形下，非平衡部分为负相关．对于 $\Delta^{-1}(q,q')$ 的特性已有很好的了解：在三维中，若因其距离小于 L，则其边界的影响可以忽略，从而有

$$\Delta^{-1}(q,q')\approx -4\pi/|q-q'|.\tag{37}$$

另一方面，若 $|q-q'|\gg L$，则其边界处，吸收将占支配地位，从而有

$$\Delta^{-1}(q,q')\approx \exp(-|q-q'|)/2L).\tag{38}$$

稳态密度-密度的协方差就具有局域平衡态分布的一个 δ_- 相关，且其一部分是负相关并按 $1/|q|$ 缓慢衰减．这一部分的强度为 $[(\rho_+-\rho_-)/2L]^2$．协方差的长程部分将在与平板宽度同一数量级的距离处最后切断．

含时涨落可由(33)式加以计算并由下式给出：

$$\langle\xi(q,t)\xi(q',0)\rangle=e^{\Delta t}(q,q')\chi(\rho_s(q')+[(\rho_+-\rho_-)/2L]^2e^{\Delta t}\Delta^{-1}(q,q').\tag{39}$$

用散射实验手段测定结构因子是物理上的典型测量方法．对于一个平移不变性系统，这种方法就是(39)式的简单的空时傅里叶变换．而对于不具有平移不变性的系统，在平移时，就须建立一种较上述方法更为精确的实验方法．为了详尽的讨论，我们参考了 Kirkpatrick 的工作[6]，如果假定在 $q_1=0$ 时，其散射区域位于平板的中部，则对于具有零边界条件的 Δ 的相当好的近似便是具有质量 $\pi^2/4L^2$ 的自由拉普拉斯．在近似范围内有

$$S(k,\omega)=\frac{k^2+\pi^2/4L^2}{\omega^2+(k^2+\pi^2/4L^2)^2}\cdot\frac{1}{4}\left((\rho_++\rho_-)(2-\rho_+-\rho_-)-(\rho_+-\rho_-)^2\frac{1}{L^2k^2+\pi^2/4}\right).\tag{40}$$

其频率分布仍是 Lorentz 型的，但对小 k 时的振幅却受到了强烈的抑制，其原因是受到了密度梯度的影响．

再回到如(31)式所示的普遍情形，期望求得类似于 $D(\rho)=1,\chi(\rho)=\rho(1-\rho)$ 这种具体情形的定性结果．如果 $-a\leqslant\frac{\partial^2}{\partial q^2}(Dx)(\rho_s(q_1))\leqslant -b$ 并具有精确的正常数 a，b，则一定会求得结果．但如果 $\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}(D\chi)(\rho_s(q_1))$ 采用正，负两种符号，此时似乎并不排除普遍情况，但其结果未必一定求得．

四、流体力学的极限——微观与宏观理论的联系

只研究相同时间泛函的静态。为此先引入一个标量因子 $\varepsilon, \varepsilon > 0$，$\varepsilon \to 0$，这样就便于将 ε 考虑为点阵空间。在 $N(\varepsilon) = [\varepsilon^{-1}L]$ 的情况下，可用一个不连续平板 $\varepsilon\Lambda_{N(\varepsilon)}$ 来近似上述连续平板 Λ_L。$[a]$ 在此表示 a 的整数部分。

对于 $q \in \Lambda_L^0$ 的每一点，期望

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \eta_{[\varepsilon^{-1}q]} \rangle_{N(\varepsilon)} = \rho_s(q), \tag{41}$$

其平均密度就近似为稳态解。

在 Λ_L 的内部，取 q 时要避开边界层。如果空间平均值超过了许多点阵位置，则只期望具有小的密度涨落。令 Λ_ε 表示一个边长为点阵位置 $1/\sqrt{\varepsilon}$ 的超立方体($1/\sqrt{\varepsilon}$ 在此只是一种通常的习惯规定，当 $\varepsilon \to 0$ 和 $\varepsilon\Lambda_\varepsilon$ 时，Λ_ε 中的点阵位置的 $|\Lambda_\varepsilon|$ 的数值便趋向于无穷；即在点阵空间 ε 的情形下，点阵上的 Λ_ε 会减小到零。所以，在 $0<\alpha<1$ 的区间，$\varepsilon^{-\alpha}$ 一定会如此)，这时，对于 $q \in \Lambda_L^0$ 的每个 q，期望有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|\Lambda_\varepsilon|} \sum_{x \in \Lambda_\varepsilon} \eta_{[\varepsilon^{-1}q]+x} = \rho_s(q). \tag{42}$$

上述极限是就稳态测量 $\langle \cdot \rangle_{N(\varepsilon)}$ 的顺序而言的。通常最为便利的方法是将(42)式代入到一个光滑检验函数上的平均空间中，令 f 为定义在 Λ_L 上的一个检验函数，并假定 f 在无穷远处快速消失为零或者在离开边界的某一有限距离上消失为零。从而期望有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^d \sum_{x \in \Lambda_{N(\varepsilon)}} f(\varepsilon x)\eta_x = \int dq \rho_s(q) f(q). \tag{43}$$

该极限是相对于稳态测量 $\langle \cdot \rangle_{N(\varepsilon)}$ 而言的。上述有关密度场中的涨落是依照通常方法定义的。预期它们在稳态 $\langle \cdot \rangle_{N(\varepsilon)}$ 的正态特性为

$$\xi^\varepsilon(f) = \varepsilon^{d/2} \sum_{x \in \Lambda_{N(\varepsilon)}} f(\varepsilon x)(\eta_x - \langle \eta_x \rangle_{N(\varepsilon)}). \tag{44}$$

猜想：当 $N(\varepsilon) = [\varepsilon^{-1}L]$ 时，令 $\langle \rangle_{N(\varepsilon)}$ 表示稳态，则存在

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \xi^\varepsilon(f) = \xi(f). \tag{45}$$

$\xi(f)$ 是一个平均值为零的 Gauss 平均场，其协方差为

$$\langle \xi(f)\xi(g) \rangle = \int dq dq' f(q) g(q') C_s(q, q'), \tag{46}$$

式中 $C_s(q,q')$ 由(30)和(31)式给出。

由于稳态协方差的非平衡部分是光滑的，对于 $q, q' \in \Lambda_L^0, q \neq q'$ 的情形也期望有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-d} (\langle \eta_{[\varepsilon^{-1}q]} \eta_{[\varepsilon^{-1}q']} \rangle_{N(\varepsilon)} - \langle \eta_{[\varepsilon^{-1}q]} \rangle_{N(\varepsilon)} \langle \eta_{[\varepsilon^{-1}q']} \rangle_{N(\varepsilon)}) = c_{NE}(q, q'). \tag{47}$$

将已给出的(43)，(45)和(46)式作为其主要图像从各个方向上加以改进。可以研究宏观点 $q \in \Lambda_L^0$ 的邻域内粒子的分布，并寻求用密度 $\rho_s(q)$ 进行 Gibbs 测量。也可以考虑用形式为 $\Sigma_x f(\varepsilon x)\tau_x h$ 的场取代密度场，其中 h 是一个局域函数。在 $\varepsilon \to 0$ 的极限下，

它们的确定值及其涨落应时该变为密度的泛函。

对以上所提的最简单的猜想，我们将在文献[24]中采用已建立的精确的流体力学极限来证明所建立的简化相斥模型是存在的，而且是正确的．就 $C_{NE}(q,q')\neq 0$ 的意义来说，对于无互作用粒子模型 $C_{NE}(q,q')=0$，由本文所建立的模型总非寻常的模型．

[1] D. Ronis, I. Procaccia, I. Oppenheim, *Phys. Rev.* **A19**(1979), 1324.
[2] D. Ronis, I. Procaccia, J. Machta, *Phys. Rev.*, **A22**(1980), 714.
[3] J. Machta, I. Oppenheim, I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.*, 42(1979), 1368.
[4] T. R. Kirkpatrick, E. D. G. Cohem, J. R. Dorfman, *Phys. Rev. Lett.*, 42(1979), 862.
[5] T. R. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.*, 44(1980), 472.
[6] T. R. Kirkpatrick, *Phys. Rev.*, **A76**(1982), 950.
[7] T. R. Kirkpatrick, E. G. D. Cohem, *Phys. Rev. Lett.*, **78A**(1980), 350.
[8] E. G. D. Cohem, *Kinam*, **3A**(1981), 39.
[9] E. G. D. Cohem, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics, Amsterdam, North-Holland, (1980).
[10] G. Van der Zwan, P. Mazur, *Phys. Rev. Lett.*, **75A**(1980), 370.
[11] G. Van der Zwan, P. Mazur, D. Bedeaux, *Physica*, **107A**(1981), 491.
[12] A. Fremblay, E. Siggia, M. Arai, *Phys. Rev. Lett.*, **76A**(1980), 57.
[13] A. Fremblay, *Phys. Rev.*, **A23**(1981), 1451.
[14] H. Grabert, *J. Stat. Phys.*, 26(1981), 113.
[15] D. Ronis, S. Putterman, *Phys. Rev.*, **A22**(1980), 773.
[16] J. Machta, I. Oppenheim, *Physica*, **112A**(1982), 361.
[17] D. Beysens, Y. Garrabos, G. Zalcer, *Phys. Rev. Lett.*, 45(1980), 403.
[18] H. van Beijeren, O. E. Lanford, J. L. Lebowitz, H. Spohn, *J. Stat. Phys.*, 22(1979), 237.
[19] H. Spohn, *J. Stat. Phys.*, 26(1981), 285.
[20] G. E. Murch, *Phil. Mag.*, **A41**(1980), 159.
[21] M. Medina-Noyola, J. Keizer, *Physica*, **107A**(1981), 437.
[22] T. M. Liggete, The Stochastic Evolution of Infinite Systems of Interacting Particles, Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Springer, (598) (1977), 249.
[23] P. C. Hohenberg, B. Halperin, *Rev. Mod. Phys.*, 49(1977), 435
[24] 李富斌，物理学报，39(1990)，本期

LONG RANGE CORRELATIONS FOR MICROSCOPIC STOCHASTIC DYNAMICS IN A NONEQUILIBRIUM STEADY STATE (I)

CONSTRUCTION OF THE THEORY OF FLUCTUATING HYDRODYNAMICS IN TERMS OF A STOCHASTIC LATTICE GAS MODEL

LI FU-BIN

Department of Physics, Huaibei Coal Teacher's College, Anhui, Huaibei, 235000

(Received 19 May 1989)

ABSTRACT

We consider a system with a single locally conservative field in a slab geometry with different densities maintained at the two surfaces of the slab. On the basis of flutuating hydrodynamics, we show that the static-density correlations are long ranged and decay as $-1/|x-y|^{d-2}$ for dimension $d\geqslant 3$ over distances small compared to the size of the slab.

PACC: 4770; 0540; 0550; 3120J