

## KdV 方程的左行孤子解及其相互作用\*

楼 森 岳

宁波师范学院物理系, 宁波, 315211

1990 年 3 月 12 日收到

本文指出, KdV 方程允许存在左行孤子、静态孤子和左、右行孤子的相互作用解。左行孤子的振幅越大, 运动得越慢。

PACC: 0340K; 0290

KdV 方程作为一个典型的非线性方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

已被广泛研究<sup>[1]</sup>。对这个方程有两个著名的结论:

- (1) 不存在左行孤子和静态孤子, 只有右行孤子<sup>[2]</sup>。
- (2) 孤子的振幅越大, 运动得越快, 宽度也越窄<sup>[3]</sup>。

然而在将一个新的自由参数引入 KdV 方程的孤子解后, 我们发现 KdV 方程的孤子既可以是右行的, 也可以是左行的或静态的。而且结论(2)也仅当相互作用的两孤子都是右行孤子时才正确。得到 KdV 方程的多孤子解的方法有很多, 例如: 反散射方法、Bäcklund 变换法、Hirota 方法和 Bargmann 势方法等等<sup>[3,4]</sup>。此处为了重新得到 KdV 方程的孤子解, 并在解中引入一个新的自由参数, 我们对 Bargmann 势方法稍加修改。Bargmann 首先使用这个方法于径向 Schrödinger 方程, 这个方法已被用于求解 KdV 方程的多孤子解<sup>[5]</sup>。

Bargmann 的方法是对于 Schrödinger 方程

$$y' + (k^2 - u)y = 0, \quad (2)$$

假设存在这样的势  $F(x, k)$ , 使方程的解  $y$  可写成

$$y = e^{ikx}F(k, x), \quad (3)$$

其中  $F(k, x)$  是  $k$  的多项式。若  $F(k, x)$  是  $k$  的线性式, 则可得 KdV 方程的单右行孤子解; 若  $F(k, x)$  是  $k$  的二次式, 则可求得双右行孤子解。现在, 为了得到左行孤子解, 重写方程(2)为

$$y'' + (k_1^2 - u_1)y = 0, \quad (4)$$

其中

$$k_1^2 \equiv k^2 - C_0, \quad (5)$$

$$u_1 \equiv u - C_0. \quad (6)$$

\* 国家自然科学基金资助的课题。

我们假设对于方程(4)存在这样的势,使(4)式的解可以写成

$$y_1 = e^{ik_1 x} [2k_1 + ia(x)], \quad (7)$$

其中数字因子 2 的引入是为了以后的方便,将(7)式代入(4)式,比较  $k_1$  的幂次,有

$$a' = -u_1, \quad a'' = u_1 a. \quad (8)$$

消去  $u_1$ , 并对  $x$  积分一次得

$$a' + \frac{1}{2} a^2 = 2\mu^2, \quad (9)$$

其中  $2\mu^2$  是积分常数。作变换

$$a = 2w'/w. \quad (10)$$

得线性方程:

$$w'' - \mu^2 w = 0, \quad (11)$$

其一般解为

$$w = \alpha e^{\mu x} + \beta e^{-\mu x}. \quad (12)$$

根据(8)式中的第一式和(10)式,得

$$u_1 = -2(\ln w)''. \quad (13)$$

将(12)式代入(13)式,得

$$u_1 = -2\mu^2 \operatorname{sech}^2(\mu x - \phi), \quad (14)$$

其中  $\phi = \frac{1}{2} \ln(\beta/\alpha)$ , 由此

$$u = C_0 + u_1 = C_0 - 2\mu^2 \operatorname{sech}^2(\mu x - \phi). \quad (15)$$

更进一步,简单地设积分常数  $\alpha, \beta$ , 从而  $\phi$  是  $t$  的函数, 即使(15)式同时满足 KdV 方程(1)。将(15)式代入(1)式, 即得

$$u = C_0 - \frac{v + 6C_0}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v + 6C_0}{4}} (x - vt), \quad (16)$$

其中  $\mu$  已由  $\mu = \frac{1}{2} \sqrt{v + 6C_0}$  代替。

当  $C_0 = 0$  时, 解(16)式回到我们熟悉的形式:

$$u = -\frac{v}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt). \quad (17)$$

由(17)式即可得到本文开头提到的结论(1)和(2)。然而, 必须强调指出的是  $C_0 \neq 0$  时解(16)式仍应看作是孤子解。特别是若物理量正比于  $u$  的某个导数(如  $u_x, u_t$ )时, 更应如此。

从一般的孤子解(16)式出发, 结论(1)和(2)应该被修改为

(I) 对于相同的  $C_0$  值, 孤子的速度有个下限

$$v_{\min} = -6C_0. \quad (18)$$

若  $C_0 = 0$ , 不存在左行孤子 ( $v < 0$ ) 和静态孤子 ( $v = 0$ )。然而当  $C_0 > 0$  时, 运动较慢的左行孤子 ( $|v| < 6C_0$ )、静态孤子和右行孤子都是允许的; 更进一步, 若  $C_0 < 0$ , 孤子只能以较快的速度向右运动 ( $v > |6C_0|$ ), 左行孤子、静态孤子和慢右行孤子都是不允许的。

许的。

(II) 对于相同的  $C_0$  值, 右行孤子的振幅越大, 运动得越快, 它的宽度也越窄。然而左行孤子的振幅越大, 宽度越窄, 但运动得越慢。右行孤子的振幅比左行孤子的振幅大得多, 宽度窄得多。

是否存在精确的双左行孤子或一个左行、一个右行孤子的相互作用解? 为了回答这个问题, 我们假设(4)式有如下解:

$$y_2 = e^{ikx} [4k_1^2 + 2ik_1 a(x) + b(x)]. \quad (19)$$

将(19)式代入(4)式, 有

$$a' + u_1 = 0, \quad (20)$$

$$L_0 \equiv b' + a'' - au_1 = 0, \quad (21)$$

$$L_1 \equiv b'' - bu_1 = 0. \quad (22)$$

从(20)和(21)式, 可得

$$b + a' + \frac{1}{2} a^2 = 2C_1, \quad (23)$$

其中  $C_1$  是一个积分常数。对  $bL_0 - aL_1$  的积分, 导致

$$\frac{1}{2} b^2 + ba' - ab' = 2C_2. \quad (24)$$

(24)式中  $C_2$  也是一个积分常数。同样引入函数  $w$ ,  $a = 2w'/w$ , 从(23)式即得

$$b = 2(C_1 - w''/w). \quad (25)$$

由此, (24)式成为

$$2w'w''' - (w'')^2 - 2C_1(w')^2 + w^2(C_1^2 - C_2) = 0. \quad (26)$$

将(26)式对  $x$  微分一次, 可以得到更简单的线性方程:

$$w^{(4)} - 2C_1 w'' + (C_1^2 - C_2)w = 0. \quad (27)$$

其一般解为

$$w = \gamma_1 e^{\rho x} + \gamma_2 e^{-\rho x} + \delta_1 e^{\sigma x} + \delta_2 e^{-\sigma x}, \quad (28)$$

$$\rho = \sqrt{C_1 + \sqrt{C_2}}, \quad \sigma = \sqrt{C_1 - \sqrt{C_2}} \quad (29)$$

及

$$\gamma_1 \gamma_2 \rho^2 = \delta_1 \delta_2 \sigma^2. \quad (30)$$

条件(30)式来自要求(27)式的解, (28)式也必须满足(26)式。设  $\gamma_1 = \sigma/\alpha$ ,  $\gamma_2 = \sigma\alpha$ ,  $\delta_1 = \rho\beta$  和  $\delta_2 = \rho/\beta$ , 则(30)式自动满足和(28)式成为

$$w = 2\sigma \operatorname{ch}(\rho x - \phi) + 2\rho \operatorname{ch}(\sigma x - \psi), \quad (31)$$

其中

$$\alpha = e^{-\phi}, \quad \beta = e^{-\psi}. \quad (32)$$

设

$$\rho = p + q, \quad \sigma = p - q, \quad \phi = \theta + \chi, \quad \psi = \theta - \chi, \quad (33)$$

有

$$a = 2 \frac{w'}{w} = 2\rho\sigma \frac{\operatorname{sh}(\rho x - \phi) + \operatorname{sh}(\sigma x - \psi)}{\sigma \operatorname{ch}(\rho x - \phi) + \rho \operatorname{ch}(\sigma x - \psi)}$$

$$= 2(p^2 - q^2)(p \operatorname{cth} \zeta - q \operatorname{th} \eta)^{-1}, \quad (34)$$

其中

$$\zeta = px + \theta, \quad \eta = qx + \chi. \quad (35)$$

回到方程(6),得

$$u = C_0 - a' = C_0 - 2(p^2 - q^2) \frac{p^2 \operatorname{csch}^2 \zeta + q^2 \operatorname{sech}^2 \eta}{(p \operatorname{cth} \zeta - q \operatorname{th} \eta)^2}. \quad (36)$$

要求(36)式也满足 KdV 方程,函数  $\theta$  和  $\chi$  必须有合适的时间依赖关系. 由分别考虑极限情况  $|\zeta| \gg 1$ ,  $|\eta| < 1$  和  $|\eta| \gg 1$ ,  $|\zeta| < 1$ , 有

$$u \approx C_0 - 2q^2 \operatorname{sech}^2(qx - \chi \mp \Delta) \quad (\zeta \rightarrow \pm \infty, \eta < 1) \quad (37)$$

和

$$u \approx C_0 - 2p^2 \operatorname{sech}^2(px - \theta \mp \Delta) \quad (\eta \rightarrow \pm \infty, \zeta < 1), \quad (38)$$

其中

$$\Delta = \operatorname{th}^{-1} \left( \frac{q}{p} \right). \quad (39)$$

现在  $\theta$  和  $\chi$  的时间依赖关系很容易将(37)和(38)式代入 KdV 方程(1)得到. 结果与线性情况相同. 最后,一般的两孤子相互作用解为

$$\begin{aligned} u = C_0 + \frac{1}{2} (v_1 - v_2) & \left\{ (v_1 + 6C_0) \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \sqrt{v_1 + 6C_0} (x - v_1 t) \right. \\ & \left. + (v_2 + 6C_0) \operatorname{csch}^2 \frac{1}{2} \sqrt{v_2 + 6C_0} (x - v_2 t) \right\} / \\ & \left\{ \left[ \sqrt{v_1 + 6C_0} \operatorname{th} \frac{1}{2} \sqrt{v_1 + 6C_0} (x - v_1 t) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{v_2 + 6C_0} \operatorname{cth} \frac{1}{2} \sqrt{v_2 + 6C_0} (x - v_2 t) \right]^2 \right\}. \quad (40) \end{aligned}$$

显然,当  $C_0 > 0$  时,解(40)式中的两孤子,既可以都是右行的,也可以都是左行的,或是一个左行 ( $v_1 < 0$ ) 一个右行的. 但由于解(41)式的非奇异条件为

$$v_2 > v_1, \quad (41)$$

$v_1 > 0$ ,  $v_2 < 0$  的右-左行解是不允许的. 虽然一个静态孤子可以与一个左(或右)行孤子相结合,但两个静态孤子解由于解的非平凡性条件  $v_1 \neq v_2$  而被排除. 当  $C_0 < 0$  时,两个孤子只能都较快地向右运动.

图1显示了一个左行孤子与一个右行孤子的相互作用. 其中  $v_1 = -1$ ,  $v_2 = 2$  和  $C_0 = 1/3$ . 图1表明一个左行孤子的宽度要比右行孤子的宽度大得多,振幅比右行孤子的振幅小得多.

图2显示了一个左行孤子与一个静态孤子的相互作用. 其中  $v_1 = -1.75$ ,  $v_2 = 0$  和  $C_0 = 2/3$ . 图2也可说明,左行孤子的宽度越窄,它运动得越慢. 这个性质正与两个右行孤子的情况相反.

图1中  $t = 0$  时,两个孤子合并成一个振幅为  $-1.5$  (注意图中曲线为  $C_0 - u(x, t)$ ) 的单个脉冲. 而在图2中,单个峰不能形成. 由考虑(40)式的  $u_{xx}(0, 0)$  值,可以得到,若  $u_{xx}(0, 0) \geq 0$ , 即

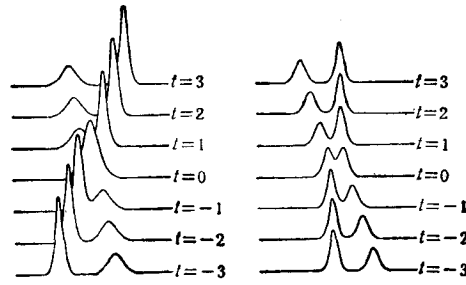


图 1

图 2

$$v_2 \geq 3v_1 + 12C_0 \quad (v_2 > v_1), \quad (42)$$

则在  $t = 0$  时, 两个孤子合并成一个单峰。否则, 即使一个孤子是“静止”的, 两个孤子在任何时候都不能形成一个单峰。从(37)至(39)式易知, 两孤子经过相互作用后, 速度为  $v_2$  的孤子的峰的位置向前移动了  $4\Delta/\sqrt{v_2 + 6C_0} = 4\text{th}^{-1}\left(\frac{v_1 + 6C_0}{v_2 + 6C_0}\right)^{1/2} / \sqrt{v_2 + 6C_0}$

(从  $x_2 = v_2 t + 2\Delta/\sqrt{v_2 + 6C_0}$  到  $x_2 = v_2 t - 2\Delta/\sqrt{v_2 + 6C_0}$ ), 而另一个孤子则后退了  $4\Delta/\sqrt{v_1 + 6C_0}$ 。静态孤子和非静态孤子的相互作用(见图 2)特别清楚地说明了这个性质。孤子的相互作用不改变两孤子的诸如振幅、宽度、速度的大小和方向等其它性质。

作者感谢与复旦大学倪光炯教授的有益的讨论和宁波师范学院竺海松同志的帮助。

- [ 1 ] D. J. Korteweg and G. de Vries, *Phil. Mag.*, 39(1895), 422; C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, 19(1967), 1095; J. Satsuma, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 46(1979), 359; Sen-yue Lou and Guang-jiong Ni, *J. Math. Phys.*, 30(1989), 1614; Sen-yue Lou and Guang-jiong Ni, *Singapore J. Phys.*, Jan., 1990 to be published.
- [ 2 ] W. Eckhaus, A. Van Harten, *The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons*, An Introduction Mathematics Studies 50, North-Holland, (1981).
- [ 3 ] G. L. Lamb, Jr., *Elements of soliton theory* New York (1986).
- [ 4 ] V. Bargmann, *Rev. Mod. Phys.*, 21(1949), 488.

## THE SOLITON SOLUTIONS OF KdV EQUATION RUNNING TO THE LEFT AND THEIR INTERACTIONS

LOU SEN-YUE

*Department of Physics, Ningbo Normal College, Ningbo, 315211*

(Received 12 March 1990)

### ABSTRACT

We point out that there exist the soliton solutions of the KdV equation running to the left, as well as static and the interaction solutions between left running and right running solitons. The larger the amplitude of the left running soliton is, the slower it moves.

**PACC:** 0340K; 0290