

电磁波荡器及导引磁场中相对论电子 三维运动的线性与非线性分析

张世昌¹⁾ 王文耀

西南交通大学应用物理系, 成都, 610031

1990 年 7 月 7 日收到

本文详细地分析处于圆波导 TE_{mn} 模(或 TM_{mn} 模)及导引磁场中相对论性电子的三维运动, 给出线性解析表达式及非线性数值计算结果。文中发现, 通常情况下电子轨道在横平面的投影是圆环, 环的厚度取决于电磁波荡器的场幅值; 而当电磁波荡器是对称模式($m = 0$)时, 电子轨道有可能发散。文中还讨论电磁波荡器是与电子运动同向传播的慢波这种特殊情况。

PACC: 4255T; 4252; 4170

一、引 言

近年来, 不少学者已对电磁波荡器自由电子激光进行了有益的研究^[1-15]。这类自由电子激光中, 在圆柱形金属管内行进的相对论性电子束, 与迎面传播来的电磁波产生受激相干散射(当电子束密度大时, 通常还附加纵向导引磁场)。与静磁波荡器自由电子激光相比, 散射波的频率 $\omega_s \approx 4\gamma^2 \omega_w$, 因此, 电磁波荡器自由电子激光器通过使用强功率毫米、亚毫米波源做波荡器, 更容易获得短波长的相干电磁辐射。

一般情况下, 电磁波荡器自由电子激光中散射波的幅值, 比电磁波荡器的幅值小得多。例如, 文献[5]报道的实验中, 电磁泵波的功率高达 500MW, 而频率上移的散射波的功率仅为 0.35MW。因此, 对电子在电磁波荡器及导引磁场中三维运动状态的分析, 直接关系到进一步研究电磁波荡器自由电子激光的小讯号增益和如何选取工作参数。先前这方面的工作, 主要研究了电磁波荡器是平面电磁波的情况。这种数学物理模型只是一种理想近似, 与实际情况有所差别, 因为圆柱形金属管中不可能传播平面波, 只能传播 TE 波或 TM 波。为此, 本文将分析电磁波荡器是圆波导 TE_{mn} 或 TM_{mn} 模式这种更接近实际情况下的相对论性电子的三维运动状态。

二、线性计算

选取漂移管的轴线作为圆柱坐标系的 z 轴, 相对论性电子沿 z 轴的正方向运行, 电磁

¹⁾ 中国高等科学技术中心(世界实验室)理论物理分中心。

泵波向 z 轴的负方向传播, 导引磁场为 $B_0 e_z$. 忽略电子束的自身场, 则电子的运动受电磁泵波和导引场产生的电磁力所支配,

$$\frac{d(\gamma m_0 \mathbf{v})}{dt} = e[\mathbf{E}_w + \mathbf{v} \times (B_0 e_z + \mathbf{B}_w)], \quad (1)$$

式中 γ, m_0, e 和 \mathbf{v} 分别是电子的相对论能量因数、静质量、电量和速度; \mathbf{E}_w 和 \mathbf{B}_w 是电磁泵波的电场和磁场. 不妨把没有电磁泵波时电子的运动状态称为平衡态, 并且假设电子在平衡态时是处于螺旋线轨道, 相应的物理量用下标“0”表示. 从方程(1)可以导出运动分量式

$$\gamma m_0(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) + m_0 \dot{\gamma} \dot{R} = f_R + e B_0 R \dot{\varphi}, \quad (2)$$

$$\gamma m_0(2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi}) + m_0 R \dot{\gamma} \dot{\varphi} = f_\varphi - e B_0 \dot{R}, \quad (3)$$

$$\gamma m_0 \ddot{z} + m_0 \dot{\gamma} \dot{z} = f_z, \quad (4)$$

式中

$$\gamma = c(c^2 - \dot{R}^2 - R^2 \dot{\varphi}^2 - \dot{z}^2)^{-1/2}. \quad (5)$$

此处圆点号表示对时间的导数; c 是真空中光速; f_R, f_φ, f_z 分别代表电磁泵波在 R, φ, z 方向所产生的电磁力, 如果电磁泵波是 TE_{mn} 模式, 则

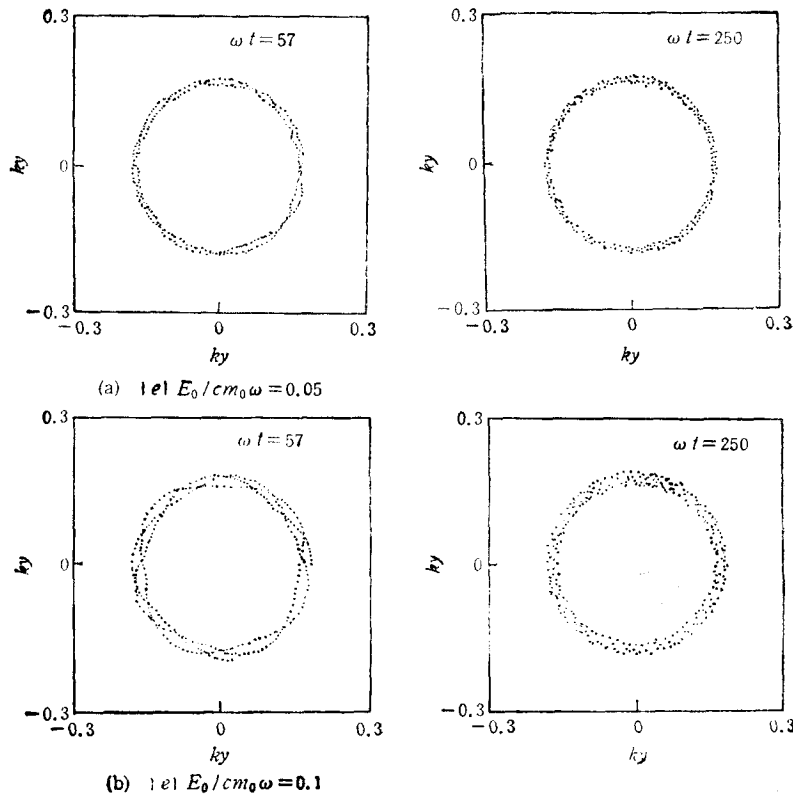


图1 计算机描绘的电子轨道在横平面的投影图 电磁波荡器是 $TM_{1,1}$ 模, 参数为 $\omega = 7.85 \times 10^{10} \text{Hz}$, $k = 261.8 \text{m}^{-1}$, $k_c/k = 0.9034$, $k_z/k = 0.4286$, $\gamma_0 = 3.7$, $v_{\perp 0}/c = 0.05$, $v_{z0}/c = 0.9615$, $R_0 = 0.66 \times 10^{-3} \text{m}$, $\omega_c/\omega = 0.3056$, $|e|E_0/cm_0\omega = 0.05$ (a), 0.1 (b); 左图是 ωt 终值取 57 的结果; 右图是 ωt 终值取 250 的结果

$$f_R = -eE_0 J_m(k_c R) \left[\frac{v_{\perp}}{c} \left(\frac{k_c}{k} \right) + \frac{m k_z v_z}{c k k_c R} - \frac{m}{k_c R} \right] \exp[j(k_z z + \omega t + m\varphi)], \quad (6)$$

$$f_{\varphi} = jeE_0 \left(1 - \frac{k_z v_z}{ck} \right) J'_m(k_c R) \exp[j(k_z z + \omega t + m\varphi)], \quad (7)$$

$$f_z = jeE_0 \frac{k_z v_{\perp}}{ck} J'_m(k_c R) \exp[j(k_z z + \omega t + m\varphi)]. \quad (8)$$

如果电磁泵波是 TM_{m0} 模式, 则

$$f_R = -jeE_0 \left(\frac{\omega v_z}{kc^2} + \frac{k_z}{k} \right) J'_m(k_c R) \exp[j(k_z z + \omega t + m\varphi)] \quad (9)$$

$$f_{\varphi} = eE_0 \frac{m}{k_c R} \left(\frac{\omega v_z}{kc^2} + \frac{k_z}{k} \right) J_m(k_c R) \exp[j(k_z z + \omega t + m\varphi)], \quad (10)$$

$$f_z = -eE_0 \left(\frac{k_c}{k} + \frac{m\omega\omega_c}{kk_c c^2} \right) J_m(k_c R) \exp[j(k_z z + \omega t + m\varphi)], \quad (11)$$

式中 E_0, ω, k, k_c 和 k_z 分别是电磁泵波的场幅值、频率、总波数、截止波数和纵向波数; v_{\perp}, v_z 和 ω_c 分别是电子的垂直速度、纵向速度和回旋频率; J_m 和 J'_m 是 m 阶第一类贝塞耳函数及其对宗量的导数。这里, 忽略了电磁泵波在电子束中产生的色散, 仍然近似认为具有正规模因数 $\exp[j(k_z z + \omega t)]$ 。

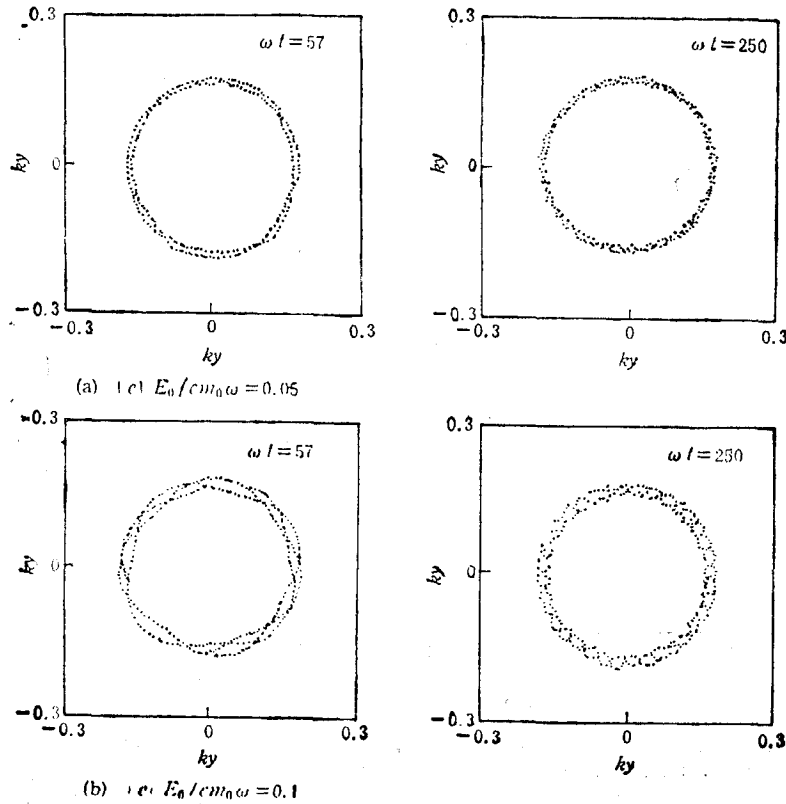


图2 计算机描绘的电子轨道在横平面的投影图 电磁波荡器是 $TE_{1,1}$ 模, 其余参数同图1

采用标准的线性扰动方法, 经过较繁的代数运算后, 可以导出电子的扰动位移量为

$$R_1 = \frac{1}{\gamma_0 m_0 \kappa Q} (Q f_R - j \omega_c f_\varphi), \quad (12)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{\gamma_0 m_0 R_0 \kappa Q^2} [f_\varphi (Q^2 + \beta_{z0}^2 \kappa) + f_z \beta_{z0} \beta_{z0} \kappa + j f_R \omega_c Q], \quad (13)$$

$$z_1 = \frac{1}{\gamma_0 m_0 Q^2} [f_\varphi \beta_{z0} \beta_{z0} - f_z (1 - \beta_{z0}^2)], \quad (14)$$

式中

$$Q = \omega + k_x v_{z0} + m \omega_c \quad (15)$$

$$\kappa = \omega_c^2 - Q^2, \quad (16)$$

$\beta_{z0} = v_{z0}/c$, $\beta_{x0} = v_{x0}/c$, f_R, f_φ, f_z 由(6)–(11)式给出。

根据(12)–(14)式, 选取一组典型的参数^[5], 对电子轨道进行数值计算分析。图 1 示出电磁波荡器是 $TM_{1,1}$ 模情况下, 电子轨道在横平面的投影。其中参数选取为: $\omega = 7.854 \times 10^{10} \text{Hz}$, $k = 261.8 \text{m}^{-1}$, $k_c/k = 0.9034$, $k_x/k = 0.4286$, $\gamma_0 = 3.7$, $v_{z0}/c = 0.05$, $v_{x0}/c = 0.9615$, $R_0 = 0.66 \times 10^{-3} \text{m}$, $\omega_c/\omega = 0.3056$, $|e|E_0/cm_0\omega = 0.05$ 和 0.1 。从图 1 中可以看到, 电子的初始螺旋轨道受到电磁泵波影响后, 迭加了周期性扰动; 但是在相当长时间内, 电子在横平面上的运动仍然被约束在一圆环内, 并不发散。换言之, 可以

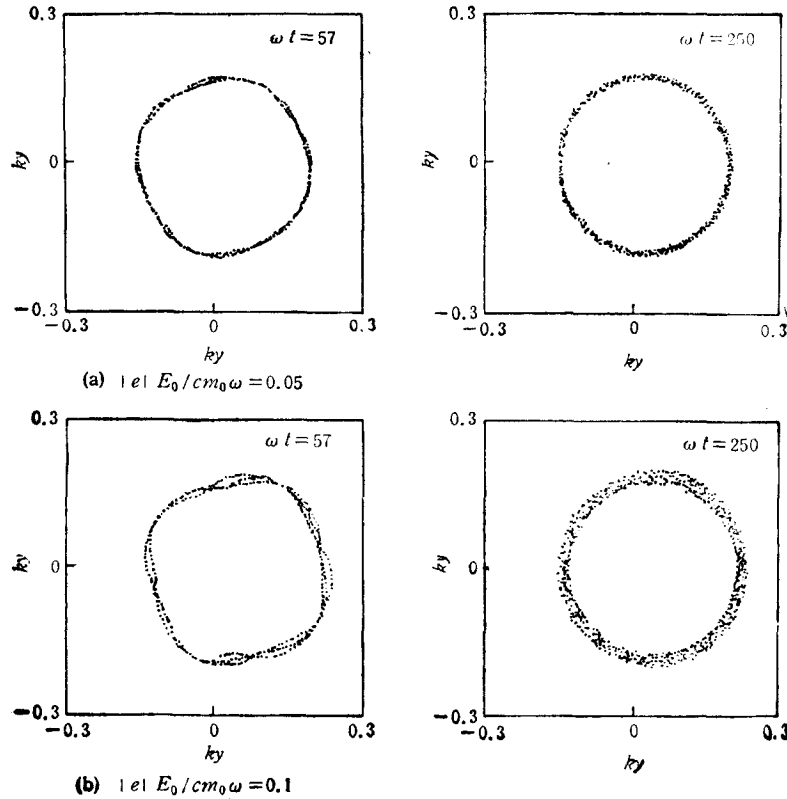


图 3 用计算机描绘的图 1 情况所对应的非线性计算结果

认为电子轨道是稳定的,能在相互作用空间正常输运。图 2 示出电磁波荡器是 $TE_{1,1}$ 模的情况,所用参数与图 1 相同。计算结果与 $TM_{1,1}$ 模的情况类似。

三、非线性分析

相对论性电子在电磁波荡器与导引磁场作用下的三维运动,可以用数值计算方法在计算机上进行非线性分析。在计算时仍然忽略电子的自身场及电磁泵波的色散,但充分考虑了电子与电磁泵波之间可能出现的换能关系。因此,计算时除使用运动方程(1)以外,还用到能量守恒方程

$$\frac{d(\gamma m_0 c^2)}{dt} = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (17)$$

计算中采用四阶龙格-库塔法,并且用 $\gamma(1 - \beta_1^2 - \beta_z^2)^{1/2} = \gamma_0(1 - \beta_{10}^2 - \beta_{z0}^2)^{1/2}$ 作为监测量以保证计算精度。

图 3 示出对应于图 1 情况的非线性计算结果;图 4 则是对应于图 2 情况的非线性计算结果。从图中可以看到,前节的线性计算与本节的非线性分析,两者所得结果很接近。这表明(12)~(14)式给出的解析表达式是可靠的。两者的差别原因主要是由于线性计算中没有考虑拉莫尔进动以及忽略了泵波与电子之间能量交换所产生的影响。因此,从精

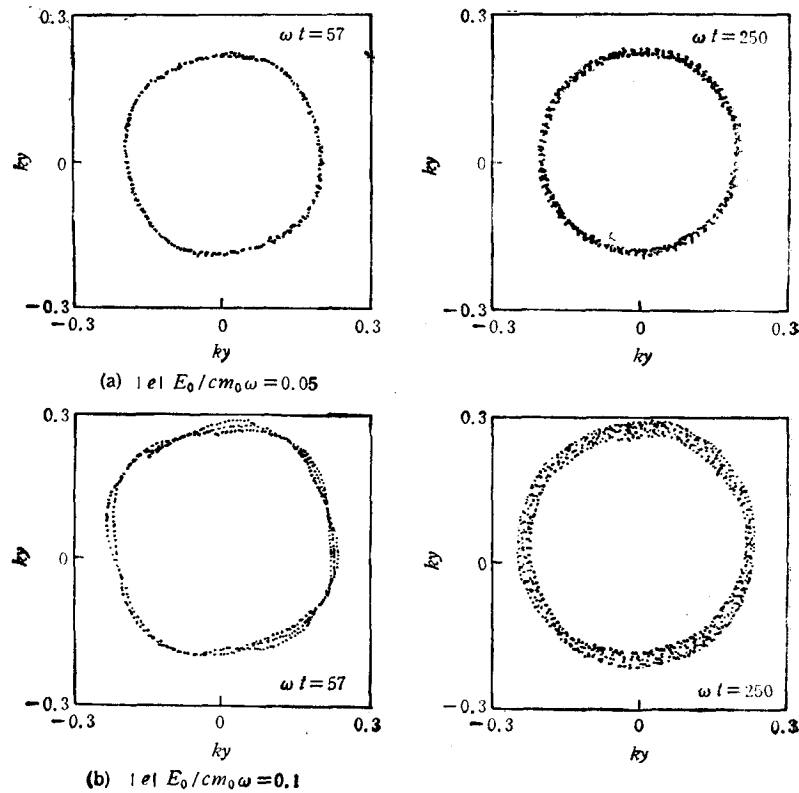


图 4 用计算机描绘的图 2 情况所对应的非线性计算结果

确性讲,无疑非线性结果更接近实际情况。但是,非线性计算由于数学上的困难,不易得到电子运动状态的显式,不利于对一般性的分析讨论。线性扰动计算虽然精确性差一些,但可以弥补非线性计算的前述不足之处。因此,两种计算方法在自由电子激光研究中,都被广泛使用。

在非线性计算中,还探讨了电子与电磁泵波之间的换能情况,用计算机描绘了电子能量因数 γ 的演化曲线。图 5(a) 和 (b) 分别示出 $TE_{1,1}$ 模和 $TM_{1,1}$ 模情况下,电子的相对论能量因数 γ 随时间的演化过程,所取参数分别对应于图 2(b) 和图 1(b)。可以发现,电磁泵波是横电模时,电子的能量因数变化较小;而电磁泵波是横磁模时,电子的能量因数变化较大。这一现象不难从能量守恒式(17)得到解释: TE 模只存在横向电场分量,而电子的横向速度比其纵向速度小得多,因此,电子与横电模泵波的换能只发生在横平面上的运动,且较弱; TM 模不但有横向电场分量,而且有纵向电场分量,加之电子的纵向速度接近光速,因此,对于 TM 模电磁泵波,电子的能量因数的涨落就大得多。这一现象表明,对于 TM 模式的电磁泵波,采用平面波近似的误差,比起 TE 模电磁泵波情况更大,有必要考虑电子与泵场之间的能量交换。

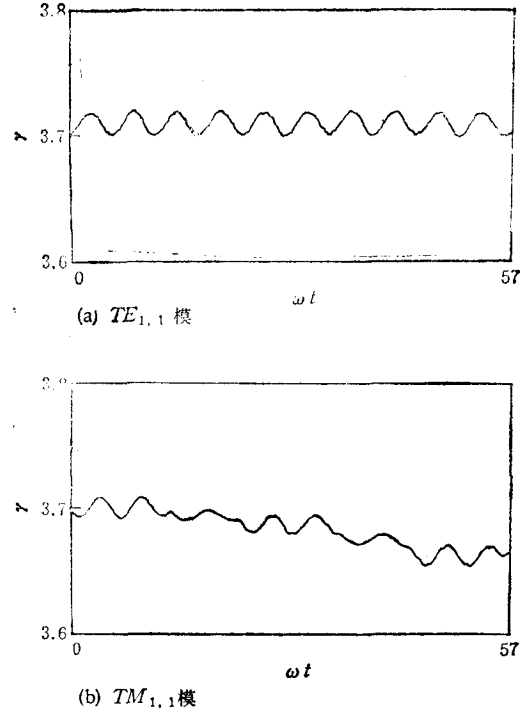


图 5 电子相对论能量因数 γ 的演化曲线 (a) 对应于图 2(b); (b) 对应于图 1(b)

四、讨 论

前面两节关于电磁波荡器及导引磁场中相对论电子三维运动轨道的定量计算结果,与文献[16,17]对静磁波荡器进行计算时所获得的结果很类似。但是,静磁波荡器对电子不做功,两者之间不存在能量交换;而电磁波荡器要对电子做功,所以,两者之间存在能量交换。在文献[16,17]中还发现,在谐振点 $\omega_c = k_z v_{z0}$, 电子的轨道是发散的。用类似的方法不难从(12)–(14)式发现,尽管 $\Omega \approx 0$, 但是有可能 $\kappa \rightarrow 0$, 从而引起电子轨道发散。由(15)和(16)式可知,这一情况对应于 $\omega + k_z v_{z0} + (m \pm 1)\omega_c \approx 0$ 。因此,只要 $m \approx 0$, 电子轨道就不可能发散。如果 $m = 0$, 则当 $\omega_c \approx \omega + k_z v_{z0}$ 时, 电子轨道产生发散。如所周知,轨道发散的电子不能正常运输,而且有可能在相互作用区出口之前就撞击到漂移管壁上,使自由电子激光器不能工作在稳定状态。因此,当采用对称模式的电磁波荡器时,应避免将参数选择在 $\omega_c \approx \omega + k_z v_{z0}$ 状态。

以上所涉及到的电磁波荡器,是与电子运动相反方向传播的快波。近来,文献[13—15]中分析了电磁泵波是与电子运动同向传播的慢波这种有趣的新构想。对于这种情况,本文所得数学表达式中的 k_x 应换写成 $-k_x$ 。显然,此时存在两个谐振点: $\omega - k_x v_{x0} + m\omega_c \approx 0$ 和 $\omega - k_x v_{x0} + (m \pm 1)\omega_c \approx 0$ (注意,慢波恒有 $\omega - k_x v_{x0} < 0$)。因此,更应谨慎选择工作参数,避开这两个谐振点,以保证电子轨道不发散。

- [1] R. H. Pantell *et al.*, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-14**(1968), 905.
- [2] L. R. Elias, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 977.
- [3] V. L. Bratman *et al.*, *Opt. Commun.*, **30**(1979), 409.
- [4] H. R. Hiddleston *et al.*, *Phys. Quantum Electron.*, **9**(1982), 849.
- [5] Y. Carmel *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **51**(1983), 566.
- [6] S. Ruschin *et al.*, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-20**(1984), 1079.
- [7] V. L. Bratman *et al.*, *Int. J. Electron.*, **59**(1985), 247.
- [8] A. Goldring *et al.*, *Phys. Rev.*, **A32**(1985), 2879.
- [9] H. P. Freund *et al.*, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-21**(1985), 1080.
- [10] H. P. Freund *et al.*, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 2007.
- [11] B. G. Danly *et al.*, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-23**(1987), 103.
- [12] T. M. Tran *et al.*, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-23**(1987), 1578.
- [13] V. K. Tripathi *et al.*, *Phys. Lett.*, **A132**(1988), 47.
- [14] S. C. Zhang (张世昌), *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 2829.
- [15] S. C. Zhang (张世昌) *J. Phys. B.* **23**(1990), 1933.
- [16] S. C. Zhang (张世昌) *et al.*, *Int. J. Infrared and Millimeter Waves*, **9**(1988), 1107.
- [17] 张世昌, *物理学报*, **37**(1988), 1684.

LINEAR AND NONLINEAR CALCULATIONS OF THE 3-DIMENSIONAL MOTION OF RELATIVISTIC ELECTRONS IN THE ELECTROMAGNETIC WIGGLER AND AXIAL GUIDE FIELD

Zhang Shi-chang Wang Wen-yao

Department of Applied Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031

(Received 7 July 1990)

ABSTRACT

The 3-D motion of the relativistic electrons is analysed under the combination of a cylindrical waveguide *TE* mode (or *TM* mode) and an axial guide field. Both linear and non-linear calculations are carried out. Generally speaking, the projection of the electron orbits onto the transverse plane is an annulus, the thickness of which is dependent on the amplitude of the electromagnetic wiggler. However, the electron orbits may diverge when $\omega + k_z v_{z0} + (m \pm 1)\omega_c \approx 0$. Discussion is also given to the special case that the electromagnetic wiggler is a slow wave propagating parallel to the electron motion.

PACC: 4255T; 4252; 4170