

# 一维非线性点阵中的孤子\*

陈伟中

宁波师范学院物理系, 宁波 315020

1992 年 12 月 29 日收到

报道在带阻尼参数激励下的一维非线性点阵中所观察到的非传播孤子现象, 并在理论上采用多重尺度展开法把同相和错相的孤子与扭结实验结果归入立方非线性 Schrödinger 方程的理论框架. 根据非线性 Schrödinger 方程, 我们预言在这种实验点阵中, 自局域结构的波型只取决于点阵的固有参量, 而与激励参数无关.

PACC: 0690; 0320; 0230; 0340K

## 一、引 言

孤波具有许多独特的性质, 已引起人们的普遍关注. 它之所以能在相互作用过程中保持波形不变, 是由于各种形式的非线性性质抵消了各自的色散行为<sup>[1]</sup>. 因此, 非线性性质与孤波现象密不可分. 对非线性方程, 诸如著名的 KdV<sup>[2]</sup> 方程、非线性 Schrödinger (NLS)<sup>[3]</sup> 方程的解析或数值求解也已成为物理学和数学工作者的热门课题. 另一方面, 如何在实验室中重现和发现孤波现象则是另一个令人感兴趣的课题. 近几年来已有许多关于流体中观察到各种传播和非传播孤波现象的报道<sup>[4,5]</sup>. 与此同时, 在光学、等离子体物理学中也有许多孤波现象的报道<sup>[6]</sup>. 相比之下, 有关在宏观离散的力学模型中发现孤波现象的报道较少. 直至最近, Denardo 等人<sup>[7]</sup> 用近二倍频垂直激励一维非线性耦合摆群, 并从中观察到了两种稳定的非传播的自局域结构, 即扭结和畴壁, 其共同的空间特性是相邻格点的摆动总是不同相的, 它们不能同时摆动到同一侧的最大摆幅处. 他们没有报道孤子现象和任何空间同相的, 即相邻格点同步摆动的自局域结构现象. 在理论方面, 他们定性地讨论了该系统的非线性成份, 从而解释了他们的空间错相的扭结现象. 由于未能给出具体的非线性系数的构造, 也就不能较为系统地解释包括错相的、同相的、扭结和孤子在内的一系列自局域结构.

本文报道我们的最近实验结果. 我们也是用近二倍频垂直激励一维非线性耦合摆群, 观察到了两种新的非传播自局域结构, 即同相的和错相的孤波. 在理论方面, 我们引入了四次非线性相互作用能, 很好地解释了同相的和错相的扭结与孤子实验结果.

## 二、实验结果

我们的实验装置十分简单, 与文献[7]的装置很相似, 点阵由 100 个质点组成, 见图

\* 浙江省自然科学基金资助的课题.

1. 每个质点采用质量为 3.6g 的小球, 这样的小球在空气中的阻尼系数  $\beta$  较少. 每个小球

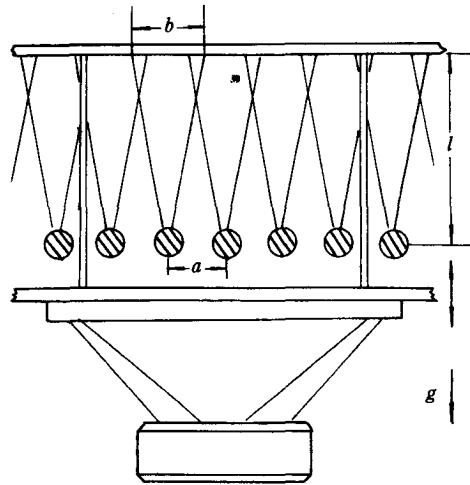


图 1 一维非线性耦合点阵实验装置示意图

几何参数  $a=25\text{mm}$ ;  $l=83\text{mm}$ ;  $b=32\text{mm}$ ,

$m=3.6\text{g}$ ; 共有 100 个质点

用两根长度  $L=85\text{mm}$  的摆线上端分开固定, 这样做的目的是限制摆质点的运动是一维的. 耦合情况是首先把这种一维的单摆沿一直线以间距  $a=25\text{mm}$  固定起来, 然后在摆线的交叉处用线固定. 这样的固定耦合绝不是简谐的, 存在着丰富的非线性成份. 于是即做成一个一维的非线性耦合点阵. 其中每一个未耦合单摆的固有角频率  $\omega_0 \approx 10.7\text{rad/s}$ , 自由频率  $f_0=1.7\text{Hz}$ .

在实验中为使这种摆动能长期地维持下去, 整个点阵被固定在一个垂直方向振动的平台上, 台子的角频率  $2\omega_c$  和振幅  $A_c$  是可调节的, 驱动平台振动的电波形也可在方波、锯齿波和正弦波之间选择. 实验结果的记录是采用电视摄像加视觉修正的方法. 当然, 这种记录方法存在着一定的误差, 有待于进一步完善. 但这对我们所关心的波形、空间相差、传播与否以及稳定程度等问题来说, 仍不失为一种既直观又简单的行之有效的记录手段.

本文所介绍的两种实验现象都是十分稳定的, 对实验开始时的初始点阵分布和初始速度不敏感, 对激励参数也不很敏感, 有较大的宽容度, 尤其是在形成稳定的自局域结构之后. 以下给出两种典型的实验激励参数和观察结果:

1) 选用正弦波形, 振幅  $A_c=1.53\text{mm}$ , 频率  $\alpha f_0 \approx 3.5\text{Hz}$ , 约两倍于  $f_0$ . 实验结果为同相非传播孤子. 图 2 给出同相孤子附近点阵最大角位移分布, 最佳双曲正割啮合曲线和该同相孤子的空间相位示意图. 图中未画出的格点几乎都静止在各自的平衡位置上. 此波形能够永久地维持下去, 除非受到强力的外界扰动.

2) 选用正弦波形, 振幅  $A_c=2.55\text{mm}$ , 频率  $2f_0=4.0\text{Hz}$ , 仍在  $2f_0$  附近. 实验结果则是反相非传播孤子. 图 3 给出该空间反向孤子附近点阵的最大角位移分布情况及它的空间相位示意图. 而图 4 则为不考虑空间反相因素的绝对摆幅分布图. 图 4 中实线为最佳双曲正割啮合曲线. 同样该自局域结构远处格点的摆幅几乎全为零, 已在图 4 中省去. 该波形也能永久地维持下去, 除非受到强力的外界扰动.

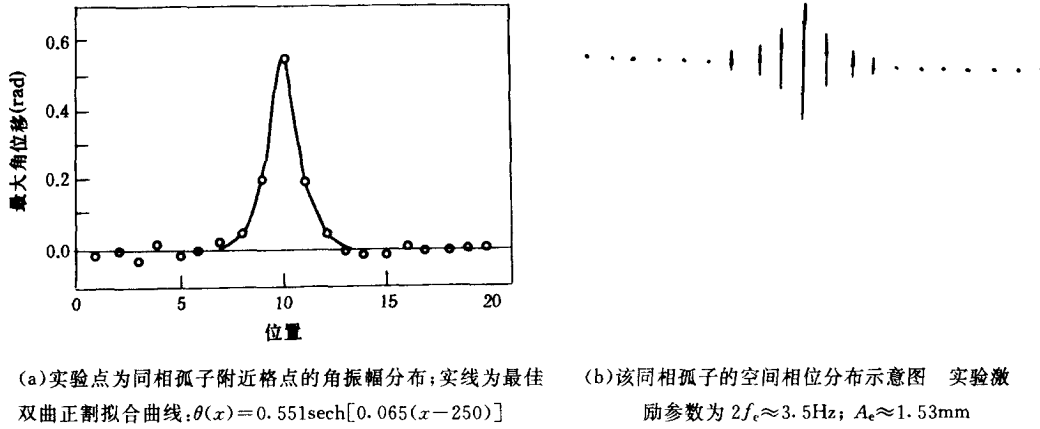


图 2

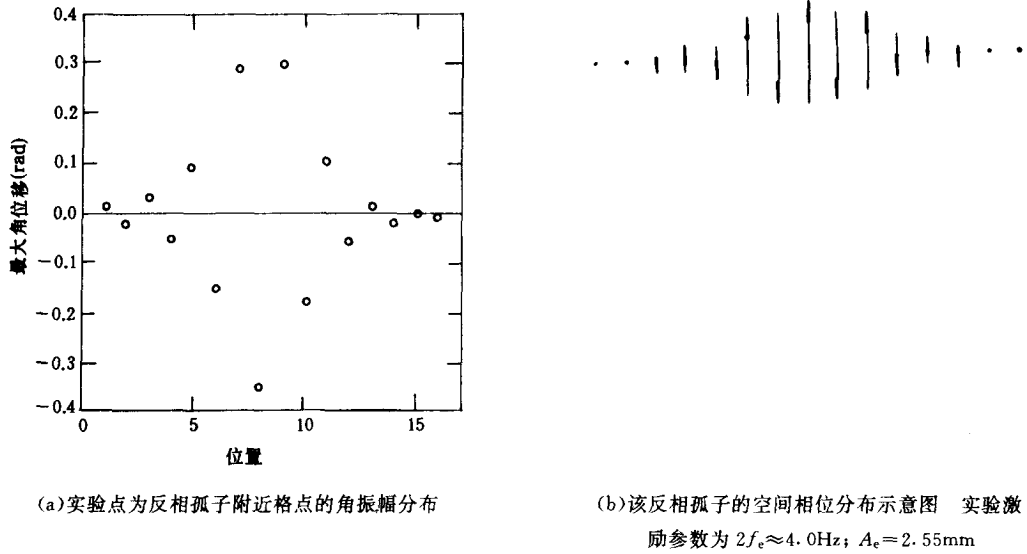


图 3

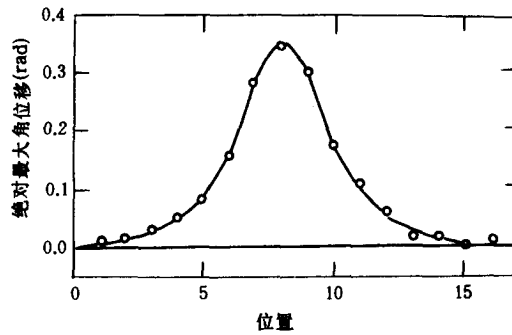


图 4 当不计空间相差时的反相孤子的绝对角振幅分布 实线为最佳双曲正割拟合曲线:  $\theta(x) = 0.355 \operatorname{sech}[0.027(x-201)]$

图 2(a)和图 4 中的实验点除了个别由于格点构造上的不均匀,如摆长不等、耦合位置不完全相同等而引起的偏离曲线之外,与双曲正割曲线啮合得十分完美,足以说明它们都是孤波.

实际上,在我们的实验过程中,进行各种激励参数、初始分布的调节,但终究未能观察到同相扭结现象以及重复文献[7]中的反相扭结现象.

### 三、理论分析

对由  $N$  个单摆组成的一维非线性耦合摆群,在只计相邻相互作用,并且假定这种相互作用只有简谐项和四次非线性项时,其体系的哈密顿量为

$$H = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{2m} p_j^2 + \frac{k_2}{2} l^2 (\theta_{j+1} - \theta_j)^2 + \frac{k_4}{4} l^4 (\theta_{j+1} - \theta_j)^4 + m(g + \ddot{z}_0) \cdot (1 - \cos\theta_j) \right], \quad (1)$$

$$\text{而} \quad z_0 = -A_e \cos(2\omega_e t), \quad (2)$$

其中  $l$  和  $m$  分别为每个点阵的共同摆长和质量,  $g$  为重力常数,  $A_e$  和  $2\omega_e$  分别为振动合的振幅和角频率,  $k_2$  和  $k_4$  分别为线性和非线性相互作用的耦合系数,  $p_j$  为摆角  $\theta_j$  所对应的广义动量,  $N$  为总质点数. (1)式所对应的动力学方程为

$$\ddot{\theta}_j + \beta \dot{\theta}_j - c_2^2 (\theta_{j+1} + \theta_{j-1} - 2\theta_j) - c_4^2 [(\theta_{j+1} - \theta_j)^3 - (\theta_j - \theta_{j-1})^3] + (\omega_0^2 + \eta \cos 2\omega_e t) \cdot \sin\theta_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (3)$$

$$\text{其中} \quad c_2^2 = k_2/m > 0, \quad (4)$$

$$c_4^2 = k_4 \cdot l^2/m > 0, \quad (5)$$

$$\eta = 4\omega_e^2 A_e/l > 0, \quad (6)$$

$$\omega_0^2 = g/l > 0. \quad (7)$$

在(3)式中我们已经加入了阻尼项  $-\beta \dot{\theta}_j$ , 其中  $\beta$  为小量.

在我们的实验条件和文献[7]的条件下,作如下数量级估计:

$$\theta_j = O(\epsilon), \quad (8)$$

$$\eta = O(\epsilon^2), \quad (9)$$

$$\beta = O(\epsilon^2), \quad (10)$$

$$\omega_e^2 - \omega_0^2 = O(\epsilon^2), \quad (11)$$

其中  $\epsilon$  为小量. 下面分别就空间同相和反相两种特殊情况,利用多重尺度展开方法<sup>[8]</sup>对(3)式进行近似求解.

$$1) \text{空间同相模式} \quad \text{取} \quad \theta_j = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_j^{(i)} \epsilon^i \quad (12)$$

进行冗长的演算之后,  $\theta_j^{(1)}$  具有下列形式<sup>①</sup>:

$$\theta_j^{(1)}(x, t) = A(x^{(1)}, t^{(2)}) e^{i\omega_0 t} + \text{c. c.} \quad (13)$$

其中振幅  $A$  是慢变量  $x^{(1)}$  和  $t^{(2)}$  的函数,它们由下式定义:

$$x \equiv \epsilon x^{(1)}, \quad (14)$$

① 在计算中,已将坐标连续化,但为了看清空间相位分布,  $\theta_j$  仍保留离散指标  $j$ .

$$t \equiv \epsilon^2 t^{(2)}, \quad (15)$$

并且, 
$$\psi \equiv \epsilon A. \quad (16)$$

满足非线性 Schrödinger 方程:

$$-2i\omega_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + c_2^2 a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - i\omega_0 \beta \psi - \frac{1}{2} \eta \psi^* + \frac{1}{2} \omega_0^2 |\psi|^2 \psi = 0. \quad (17)$$

由于在本模式中相邻格点振动同相位,非线性相互作用项是  $O(\epsilon^4)$  数量级及其以上,故它对  $\theta_j^{(1)}(x,t)$  没有贡献.因此,(14)式中的立方非线性完全来自(3)式中  $\omega_0^2 \sin \theta_j$ . 由于它与色散项  $c_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$  同号,因此,(14)式只有孤子解,而不存在扭结解<sup>[5]</sup>. 可见,在我们的数量级处理下,  $\theta_j$  的第一级近似解即为

$$\theta_j(x,t) \simeq \psi(x,t) e^{-i\omega_0 t} + \text{c. c.} \quad (18)$$

而  $\psi(x,t)$  具有孤子解形式.

2) 空间反相模式 取 
$$\theta_j = (-)^j \sum_{i=1}^{\infty} \theta_j^{(i)} \epsilon^i, \quad (19)$$

则得 
$$\theta_j^{(1)} = \mathcal{A} e^{i\omega_0 t} + \text{c. c.} \quad (20)$$

而  $\mathcal{A}$  满足下列两式,即非线性 Schrödinger 方程:

$$-2i\omega_{\max} \frac{\partial \psi}{\partial t} - c_2^2 a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - i\omega_{\max} \beta \psi - \frac{1}{2} \eta \psi^* + \left(\frac{1}{2} \omega_0^2 - 48c_4^2\right) |\psi|^2 \psi = 0 \quad (21)$$

和 
$$\psi \equiv \epsilon \mathcal{A} \quad (22)$$

其中 
$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 + 4c_2^2}. \quad (23)$$

在本模式中,相邻格点在空间反相,因此非线性耦合项只是  $O(\epsilon^3)$  数量级及其以上,对  $\theta_j^{(1)}(x,t)$  有贡献.当(21)式中的非线性项系数  $(\frac{1}{2} \omega_0^2 - 48c_4^2)$  与色散项系数同号时,  $\psi(x,t)$  具有孤子解,而没有扭结解;反之,当两者异号时,则只能有扭结解,而不能有孤子解.可见,当空间反相时

$$\theta_j(x,t) = (-)^j \mathcal{A} e^{i\omega_0 t} + \text{c. c.} \quad (24)$$

的摆幅包络为孤子形还是扭结形取决于  $(\frac{1}{2} \omega_0^2 - 48c_4^2)$  值的负还是正.而  $(\frac{1}{2} \omega_0^2 - 48c_4^2)$  的值只与点阵结构有关.

#### 四、小结与讨论

我们用参数激励的方法研究了一维非线性耦合点阵的运动情况,在相当宽的频率和振幅范围内观察到两种新的稳定的自局域结构,同相与反相非传播孤子.根据我们及文献[6]的实验条件,取  $\theta_j$  为一级小量,而  $\eta$  和  $\beta$  以及  $\omega_c^2 - \omega_0^2$  为二级小量,采用多重尺度展开法,得到第一级角位移  $\theta_j^{(1)}(x,t)$ ,发现在同相模式下只有孤子解而不能有扭结解,这与我们在实验中始终没有发现同相扭结,以及文献[7]中未有报道同相扭结的事实相一致.而在空间异相时,当

$$\frac{1}{2} \omega_0^2 - 48c_4^2 < 0 \quad (25)$$

时,只存在孤子解,不存在扭结解;当 
$$\frac{1}{2} \omega_0^2 - 48c_4^2 > 0 \quad (26)$$

时,则只存在扭结解,而不存在孤子解.总之,对一个给定的实验点阵只可能存在一种形式,或是孤子,或是扭结,而不能同时存在两种形式的波形.这一点也与在我们的实验中只

发现自局域的异相孤子现象,而始终未看到异相扭结现象,及与之相反,文献[7]中只报道有异相扭结而未报道有异相孤子这一事实相符合.因为自局域结构的具体波型只与点阵的几何参数及耦合情况有关,而与激励参数  $A_e, 2\omega_e$  以及初条件无关.为了进一步检验我们的近似方法是否有效,改变点阵的几何参数及耦合情况的实验目前正在制作中.事实上,在我们多次的实验过程中,也以观察到反相的双孤子现象,由于两孤子总体是同相的,因此未看到相互作用的现象.总之,这方面的理论与实验都有待于进一步的完善.

作者深深地感谢华东师范大学黄国翔副教授、宁波师范学院楼森岳教授的有益讨论.

- [1] G. L. Lamb, *Elements of Soliton Theory*, (Wiley, 1980).
- [2] 楼森岳、阮航宇, *物理学报*, **41**(1992), 182.
- [3] V. G. Makhankov and V. K. Fedyanin, *Phys. Reports*, **104**(1984), 39.
- [4] 王本仁, R. E. Anfel, *中国科学(A辑)*, (1)(1992), 51;  
倪皖荪、魏荣爵, *中国科学(A辑)*, (11)(1991), 1207;  
J. R. Wu, R. Keolian and I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1421.
- [5] B. Denardo, W. Wright and S. Putterman, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1518.
- [6] A. M. Weiner *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 2445.
- [7] B. Denardo *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **68**(1992), 1730.
- [8] Jeffery, *Asymptotic Method in Nonlinear Wave Theory*, (Pitman, 1982).

## SOLITONS IN ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR LATTICE

CHEN WEI-ZHONG

*Department of Physics, Ningbo Normal College, Ningbo 315020*

(Received 29 December 1992)

### ABSTRACT

We report here the experimental observations for non-propagational solitons in the one-dimensional nonlinear lattice that are damped and parametrically driven. Theoretically, Using the method of multiple-scaling expansion. We have well brought the experimental results of both soliton and kink in both models in match and mismatch into the frame of the cubic nonlinear Schrodinger (NLS) equation. According to NLS, we predict that the form of the self-localized structure is only determined by the intrinsic parameters of the lattice, rather than the exciting ones.

**PACC:** 0690; 0320; 0230; 0340K