

sine-Gordon 模型与高斯波泛函方法*

许伯威¹⁾ 章豫梅²⁾ 卢文发¹⁾

1) 上海交通大学物理系, 上海 200030

2) 同济大学物理系, 上海 200092

1992 年 2 月 15 日收到

应用高斯波泛函方法, 研究了 sine-Gordon 模型的基态、单粒子态和两粒子态. 在 Coleman 临界点附近, sine-Gordon 系统趋于零质量玻色子系统, 从而具有共形对称性. 本文同时证明, 当重整化质量有限时, 在两粒子态中存在束缚态.

PACC: 1110; 0370

一、引 言

1+1 维 sine-Gordon (SG) 模型

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{\alpha}{\beta^2}(\cos\beta\phi - 1) \quad (1)$$

在量子场论和凝聚态物理中有广泛的研究和应用, 它等价于有质量项的 Thirring 模型^[1], 二维库仑气体模型^[2], 自旋 1/2 的 XYZ 格点模型^[3], 以及有质量项的 $O(2)$ 非线性 σ 模型等^[11]. Coleman 首先指出, 当 $\beta^2 > 8\pi$ 时, 该模型真空态是不稳定的, 即真空态能量不具有有限的下限值^[1]. 此结果称为 Coleman 相变条件. 由于 SG 模型和凝聚态物理中各种具体模型的广泛联系, Coleman 相变及其有关性质必将在各具体模型中有所反映, 特别值得注意的是这一相变与低维系统中的 Kosterlitz-Thouless 相变之间的密切联系^[5]. 因此研究清楚 SG 模型各种性质, 不仅有理论上的意义, 也有实用上的价值. 应用高斯波泛函方法研究 SG 模型是一种有效的手段^[6], 它给出与文献[1]中一致的全部基态性质. 本文将在在此基础上较为全面地研究 SG 模型的基态、单粒子态、两粒子态等的各种性质.

二、高斯有效势和基态

SG 模型的哈密顿量为

$$H = \int dx \mathbf{H}(x) = \int dx \left\{ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} \right]^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} (\cos\beta\phi - 1) \right\}. \quad (2)$$

场量 $\phi(x)$ 和正则动量 $\pi(x)$ 满足基本对易关系

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x - y). \quad (3)$$

* 国家教育委员会科学研究基金资助的课题.

哈密顿量(2)式的泛函本征方程为

$$H\Psi(\phi) = E\Psi(\phi). \quad (4)$$

在求解(4)式的基态解时,可采用高期泛函波函数^[6]

$$|\Psi_0\rangle = N_f \exp\left\{i \int dx P(x)\phi(x) - \frac{1}{2} \int dx dy [\phi(x) - \Phi(x)]f(x,y)[\phi(y) - \Phi(y)]\right\}, \quad (5)$$

其中 N_f 为归一化常数, $\Phi(x)$, $P(x)$ 和 $f(x,y)$ 为变分参量。由(2)和(5)式,有

$$\begin{aligned} E_0(\Phi, P, f) &= \langle \Psi_0 | H | \Psi_0 \rangle \\ &= \int dx \left\{ \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} (Z \cos \beta \Phi - 1) + \frac{1}{4} f(x,x) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \iint dx dy \delta(x-y) \frac{\mathcal{F}}{\partial x \partial y} f^{-1}(x,y), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $Z = \exp\left\{-\frac{\beta^2}{4} f^{-1}(x,x)\right\}, \quad (7)$

$f^{-1}(x,y)$ 与 $f(x,y)$ 互逆, 即有 $\int dx' f(x,x') f^{-1}(x',y) = \delta(x-y). \quad (8)$

考虑基态能量极小, 显然应有 $P(x)=0$, 以及 $\partial \Phi / \partial x = 0$, 即对应静态常数解。

现将(6)式对 $f(x,y)$ 变分, 得

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int dp f(p) e^{ip(x-y)}, \quad (9)$$

$$f(p) = \sqrt{p^2 + m^2(\Phi)}, \quad (10)$$

而 $f^{-1}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int dp \frac{e^{ip(x-y)}}{f(p)}, \quad (11)$

其中 $m^2(\Phi) = \alpha Z(m^2) \cos \beta \Phi. \quad (12)$

所以(7)式可写成 $Z(m^2) = \exp\left\{-\frac{\beta^2}{4} I_1(m^2)\right\}, \quad (13)$

引入符号 $I_0(m^2) = f(x,x) = \frac{1}{2\pi} \int dp \sqrt{p^2 + m^2}, \quad (14)$

$$I_1(m^2) = f^{-1}(x,x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m^2}}. \quad (15)$$

将(12)–(15)式代入(6)式, 得基态能量密度为

$$\epsilon(\Phi) = \frac{1}{2} I_0(m^2) - \frac{m^2}{4} I_1(m^2) - \frac{m^2 - \alpha}{\beta^2}, \quad (16)$$

(12), (13)式规定了 m^2 作为 Φ 的函数。

将 $\epsilon(\Phi)$ 对 Φ 变分

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \Phi} = \frac{\alpha}{\beta} Z(m^2) \sin \beta \Phi = 0, \quad (17)$$

极小值条件为 $\Phi = \frac{2\pi}{\beta} N \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$

所以基态解(5)式为无限重简并. 但不难证明, 在这些简并态的表示中, 哈密顿量(2)式的非对角矩阵元为零, 所以我们可取满足(18)式任一 Φ 为真空基态, 不失一般性, 取 $\Phi=0$,

这时有
$$\mu^2 = \alpha Z(\mu^2) = \alpha e^{-\frac{\beta^2}{4} I_1(\mu^2)}, \tag{19}$$

其中
$$\mu^2 = m^2(\Phi = 0), \tag{20}$$

且有关系式
$$\left. \frac{\mathcal{F} \epsilon}{\partial \Phi^2} \right|_{\Phi=0} = \mu^2, \tag{21}$$

$\mu^2 \geq 0$ 即为重整化质量.

现在积分(15)式中引入截断因子 Λ , 则(13)式的显式为

$$Z(\mu^2) = \exp\left\{-\frac{\beta^2}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{\alpha^{-1}\Lambda^2} + \sqrt{\alpha^{-1}\Lambda^2 + Z(\mu^2)}}{\sqrt{Z(\mu^2)}}\right\}, \tag{22}$$

或写成
$$Z(\mu^2) = (\sqrt{\alpha^{-1}\Lambda^2} + \sqrt{\alpha^{-1}\Lambda^2 + Z(\mu^2)})^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \tag{23}$$

其中 $\gamma = \frac{\beta^2}{8\pi}$. (23)式可用图解表示, 取变量为 $\gamma, \alpha\Lambda^{-2}$, 对于 $Z(\mu^2) = \text{常数}$ 的一组参量, 即得到一组对应的曲线族, 见图 1^[7].

从图 1 可看到, 当 $\alpha\Lambda^{-2} < 4$ 时, 所有的曲线都限制在 $\gamma < 1$ 的区域, 当 $Z(\mu^2)$ 趋于零时, 则对应 $\gamma=1$ 的直线, 此即对应 Coleman 相变. 当 $\alpha\Lambda^{-2} > 4$ 时, 曲线族可在 $\gamma > 1$ 的非斜线部分区域, 其边界即为曲线族的包络线

$$\alpha\Lambda^{-2} = \frac{(\gamma + 1)^{\gamma+1}}{(\gamma - 1)^{\gamma-1}}, \tag{24}$$

在边界线上 $Z(\mu^2)$ 的值单调增加, 从零(在 $\alpha\Lambda^{-2}=4$ 处)增至渐近值 $Z(\mu^2) = e^{-2} = 0.1353$.

我们知道, 当 β 趋于零时, (2)式即为裸质量 $\mu_0 = \sqrt{\alpha}$ 的自由玻色场的哈密顿量. 对于有限值的 β , 高斯波泛函给出的重整化质量即为(19)式. 顺便指出, 这一结果和用正规乘积处理重整化所得到的结果一致. 现在讨论 $\beta^2 \sim 8\pi$, $Z(\mu^2)$ 很小时的近似, 此时可略去(23)式等号右边的 $Z(\mu^2)$ 项, 即有

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{\mu_0}{2\Lambda}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}. \tag{25}$$

这一结果与自旋-玻色子系统中重整化后的隧道效应的形式一致^[8].

为了更好地了解重整化质量 μ 的物理含义, 现在讨论场量的关联函数

$$\begin{aligned} C(x, y) &= \langle \Psi_0 | \phi(x)\phi(y) | \Psi_0 \rangle_{\Phi(x)=0} \\ &= \frac{1}{2} f^{-1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0[\mu(x-y)], \end{aligned} \tag{26}$$

$K_0[\mu(x-y)]$ 为变型 Bessel 函数. 取关联长度 $\xi = \mu^{-1}$, 在 $|x-y| > \xi$ 时有^[9]

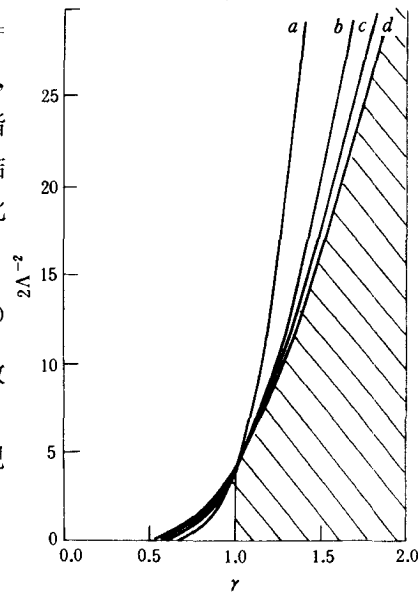


图 1 sine-Gordon 模型相图 $Z(\mu^2)$ 为有限值的解在非阴影区, 其中曲线 a, b, c 分别对应 $Z(\mu^2) = 0.001, 0.01, 0.04$; 边界 d 即为 $Z(\mu^2)$ 为常数的包络线

$$C(x-y) \sim \left[\frac{8\pi|x-y|}{\xi} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x-y|}{\xi}}. \quad (27)$$

当 γ 由左趋于 1 时, μ 趋于零, ξ 趋于无限大, 这时 SG 模型对应零质量的玻色子系统, 并具有共形对称性, 其中心荷 $C=1$ ^[10], 所以 Coleman 相变与系统的共形对称性相联系, 这是在各种相变现象中所普遍具有的一种对称性, 这一概念目前已普遍为同行所接受^[11].

三、单粒子态

现在引入单粒子湮没、产生算符^[12]

$$A_f(p) = \frac{1}{2\sqrt{\pi f(p)}} \int dx e^{-ipx} \left[f(p)\phi(x) + \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \right], \quad (28)$$

$$A_f^\dagger(p) = \frac{1}{2\sqrt{\pi f(p)}} \int dx e^{ipx} \left[f(p)\phi(x) - \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \right]. \quad (29)$$

很容易证明 $[A_f(p'), A_f^\dagger(p)] = \delta(p' - p),$ (30)

$$A_f(p)|\Psi_0\rangle = 0, \quad (31)$$

其中 $|\Psi_0\rangle$ 已取以上静态解, 即 $\rho(x)=0, \Phi(x)=0.$

单粒子态定义为 $|\Psi_1(p)\rangle = A_f^\dagger(p)|\Psi_0\rangle,$ (32)

其能量为 $E_1(p) = \lim_{p' \rightarrow p} \frac{\langle \Psi_1(p') | H | \Psi_1(p) \rangle}{\langle \Psi_1(p') | \Psi_1(p) \rangle}.$ (33)

(33)式分母为单粒子态归一化条件, 由(30)和(31)式可证

$$\langle \Psi_1(p') | \Psi_1(p) \rangle = \langle \Psi_0 | A_f(p') A_f^\dagger(p) | \Psi_0 \rangle = \delta(p' - p). \quad (34)$$

(33)式分子为

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1(p') | H | \Psi_1(p) \rangle &= \langle \Psi_0 | A_f(p') H A_f^\dagger(p) | \Psi_0 \rangle \\ &= E_0 \delta(p' - p) + \langle \Psi_0 | [[A_f(p'), H], A_f^\dagger(p)] | \Psi_0 \rangle, \end{aligned} \quad (35)$$

其中 $E_0 = \langle \Psi_0 | H | \Psi_0 \rangle$ 即为基态能量. 由(2), (30)和(31)等式, 可得

$$\begin{aligned} [[A_f(p'), H], A_f^\dagger(p)] &= \frac{1}{4\pi \sqrt{f(p')f(p)}} \int dx e^{-i(p'-p)x} \\ &\quad [f(p')f(p) + p^2 + \alpha \cos \beta \Phi(x)]. \end{aligned} \quad (36)$$

在以上计算中, 我们将场量 $\phi(x)$ 按(28), (29)式表示成 $A_f(p)$ 和 $A_f^\dagger(p)$ 的线性组合形式, 并将 $\cos \beta \phi(x)$ 写成正规乘积表达式, 即有

$$\begin{aligned} e^{\pm i\beta\phi(x)} &= \exp\left\{ \pm \frac{i\beta}{2\sqrt{\pi}} \int dp \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{f(p)}} [A_f(p) + A_f^\dagger(-p)] \right\} \\ &= \exp\left\{ -\frac{\beta^2}{8\pi} \int \frac{dp}{f(p)} \right\} \exp\left\{ \pm \frac{i\beta}{2\sqrt{\pi}} \int dp \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{f(p)}} A_f^\dagger(-p) \right\} \\ &\quad \exp\left\{ \pm \frac{i\beta}{2\sqrt{\pi}} \int dp \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{f(p)}} A_f(p) \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

由(32)–(37)式, 最后有

$$m_1(p) = E_1(p) - E_0 = \frac{1}{2f(p)} [f^2(p) + p^2 + \alpha Z(\mu^2)] = \sqrt{p^2 + \mu^2}. \quad (38)$$

$m_1(p)$ 为单粒子能量. (38) 式正是相对论质量-能量关系式, 单粒子静止质量正是重整化质量. 这一结论说明对该模型计算方案的合理和内在自洽性.

四、两粒子态

$$\text{两粒子态定义为 } |\Psi_2\rangle = \int dp \sum(p) A_f^\dagger(p) A_f^\dagger(-p) |\Psi_0\rangle, \quad (39)$$

其中 $\sum(p) = \sum(-p)$ 为两粒子在质心坐标中的波函数.

(39) 式对应的能量为

$$E_2 = \frac{\langle \Psi_2 | H | \Psi_2 \rangle}{\langle \Psi_2 | \Psi_2 \rangle} = \frac{\iint dp dp' \sum(p) \sum(p') \langle \Psi_0 | A_f(p) A_f(-p) H A_f^\dagger(p') A_f^\dagger(-p') | \Psi_0 \rangle}{\iint dp dp' \sum(p) \sum(p') \langle \Psi_0 | A_f(p) A_f(-p) A_f^\dagger(p') A_f^\dagger(-p') | \Psi_0 \rangle}. \quad (40)$$

由(30)和(31)式可得(40)式中分母为

$$\begin{aligned} & \iint dp dp' \sum(p) \sum(p') \langle \Psi_0 | A_f(p) A_f(-p) A_f^\dagger(p') A_f^\dagger(-p') | \Psi_0 \rangle \\ &= \iint dp dp' \sum(p) \sum(p') [\delta(p-p')\delta(p-p') + \delta(p+p')\delta(p+p')] \\ &= 2 \int dp (\sum(p))^2 \delta(0). \end{aligned} \quad (41)$$

(40) 式的分子为

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_0 | A_f(p) A_f(-p) H A_f^\dagger(p') A_f^\dagger(-p') | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0 | A_f(p) H A_f(-p) A_f^\dagger(p') A_f^\dagger(-p') | \Psi_0 \rangle \\ &+ \langle \Psi_0 | A_f(-p) H A_f(p) A_f^\dagger(p') A_f^\dagger(-p') | \Psi_0 \rangle \\ &- \langle \Psi_0 | H A_f(p) A_f(-p) A_f^\dagger(p') A_f^\dagger(-p') | \Psi_0 \rangle \\ &+ \langle \Psi_0 | [[A_f(p), [A_f(-p), H]], A_f^\dagger(p')], A_f^\dagger(-p') | \Psi_0 \rangle \\ &= \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}. \end{aligned} \quad (42)$$

应用(35)式, (42) 式中的

$$\text{I} = \text{II} = [E_0 + f(p)] [\delta(p-p')\delta(p-p') + \delta(p+p')\delta(p+p')], \quad (43)$$

$$\text{III} = -E_0 [\delta(p-p')\delta(p-p') + \delta(p+p')\delta(p+p')]. \quad (44)$$

很明显对(42)式中 IV 项有贡献的只是哈密顿量中的 $\cos\beta\phi(x)$ 项. 应用(37)式经计算有

$$\begin{aligned} \text{IV} &= \langle \Psi_0 | [[A_f(p), [A_f(-p), H]], A_f^\dagger(p')], A_f^\dagger(-p') | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0 | -\frac{\alpha\beta^2}{16\pi^2 f(p)f(p')} \int dx \cos\beta\phi(x) | \Psi_0 \rangle \\ &= -\frac{\alpha\beta^2}{16\pi^2 f(p)f(p')} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2} f^{-1}(x, x)\right\} 2\pi\delta(0). \end{aligned} \quad (45)$$

由(40)–(45)式,最后得到

$$m_2 = E_2 - E_0 = \frac{2 \int dp (\sum(p))^2 f(p) - \frac{\beta^2 \mu^2}{16\pi} \left[\int dp \frac{\sum(p)}{f(p)} \right]^2}{\int dp (\sum(p))^2}. \quad (46)$$

现求两粒子态能量,即对(46)式中 $\sum(p)$ 变分 $\frac{\partial m_2}{\partial \sum(p)} = 0$, 得

$$\sum(p) = \frac{\frac{\beta^2 \mu^2}{16\pi} \int dp' \frac{\sum(p')}{f(p')}}{f(p)(2f(p) - m_2)}. \quad (47)$$

(47) 式乘 $\frac{1}{f(p)}$, 并积分得 $\frac{\beta^2 \mu^2}{16\pi} \int \frac{dp}{f^2(p)(2f(p) - m_2)} = 1$. (48)

当 $m_2 > 2\mu$, (48) 式可给出两粒子散射态的相移的有关信息, 这里不专门讨论. 我们感兴趣的是当 $m_2 < 2\mu$ 的情况, (48) 式是可积的, 在物理上即对应两粒子束缚态. 令 $y = \frac{m_2}{2\mu} \leq 1$,

(48) 式的积分结果为

$$\gamma = \frac{y \sqrt{1-y^2}}{\arctan \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} - \frac{\pi}{4} \sqrt{1-y^2}}. \quad (49)$$

(49) 式 y 作为 γ 的函数由图 2 给出. y 随 γ 增加而减小. 在以上基态的讨论中我们知道, 重整化质量 μ 本身为 γ 和 α 的函数, 在 $0 \leq \alpha \Lambda^{-2} \leq 4$ 区域, 当 γ 趋于 1 时, 重整化质量 μ 趋于零, 而在图 2 中此时 $y = \frac{m_2}{2\mu}$ 趋于有限值, 即意味着 m_2 亦趋于零. 这一

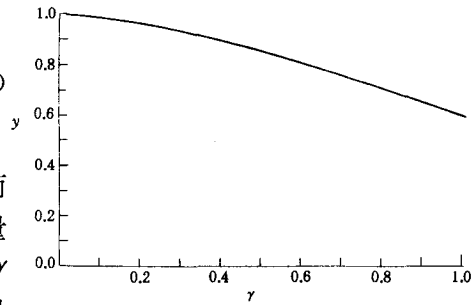


图 2 两粒子能量 $y = \frac{m_2}{2\mu}$ 和参量 $\gamma = \frac{\beta^2}{8\pi}$ 的关系图

结论和以上得到在 Coleman 临界值附近, SG 模型等价于自由零质量玻色场的结果是协调一致的.

五、讨 论

本文用高斯波泛函方法讨论了 SG 模型的基态、单粒子态和两粒子态等的有关性质. 高斯波泛函方法为非微扰计算方法, 如果将(1)式的相互作用项级数展开, 在计算重整化质量时考虑所有互不交叉的圈图, 即收集所有最红外发散的项, 不难证明所得到的结果即为(12)式^[14]. 可见高斯波泛函方法能正确地描述 SG 模型中相互作用引起的质量, 这也是这种计算方法的物理基础. 高斯波泛函方法和 Coleman 处理 SG 模型的重整化方法所得的结果一致. 所以对 SG 或 sine-Gordon 等类似的模型, 高斯波泛函是一种有效的计算方案. 另外想指出的是在 SG 模型中存在两粒子束缚态, 即粒子间存在某种有效引力. 显然并非在所有的模型中都存在类似的束缚态^[15]. 我们知道, SG 模型和低维凝聚态物理中各种模型有着广泛的联系, 在某种意义上说是它们的场论形式的理论基础. 因此这种束缚态的存在, 也像 Coleman 相变一样, 将会在各种具体模型中得到反映和应用.

- [1] S. Coleman, *Phys. Rev.*, **D11**(1975),2088.
- [2] S. Mandelstam, *Phys. Rev.*, **D11**(1975),3026.
- [3] S. Samuel, *Phys. Rev.*, **D18**(1978),1916.
- [4] A. Luther, *Phys. Rev.*, **B14**(1976),2153.
- [5] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems*, (Addison-Wesley Publishing Company, 1991) p. 84.
- [6] R. Ingermanson, *Nucl. Phys.*, **B266**(1986),620.
- [7] B. W. Xu, Y. M. Zhang, *J. Phys. A*, **25**(1992),L1039.
- [8] S. Chahravasty, A. J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984),5.
- [9] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 1980) p.963.
- [10] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B241**(1984),333.
- [11] J. L. Cardy, *Phase Transition and Critical Phenomena*, Vol. 11, L. Domb and J. L. Lebowitz, eds. (Academic Press 1987).
- [12] T. Barnes, G. I. Ghandour, *Phys. Rev.*, **D22**(1980),924.
- [13] L. I. Shiff, *Phys. Rev.*, **130**(1963),458.
- [14] Y. M. Zhang, M. L. Zhou, B. W. Xu, *Phys. Rev.*, **B47**(1993),898.
- [15] W. F. Lu, B. W. Xu, *Chinese Phys. Lett.*, **10**(1993),8.

SINE-GORDON MODEL AND GAUSSIAN WAVE FUNCTIONAL

XU BO-WEI¹⁾ ZHANG YU-MEI²⁾ LU WEN-FA¹⁾

1)Department of Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030

2)Department of Physics, Tongji University, Shanghai 200092

(Received 15 February 1993)

ABSTRACT

With a general Gaussian wave functional, we study the ground states, one particle states, and two particle states of the sine-Gordon model. At the Coleman's critical point, the sine-Gordon system tends to a system of massless free bosons which possesses conformal symmetry. We also show that there exist bound states in two particle states as long as the renormalized mass remains finite.

PACC: 1110; 0370