

# 等离子体中相对论性电子 回旋波色散关系

吴俊伶

中国科学院合肥等离子体物理研究所, 合肥 230031

1992年7月31日收到; 1992年9月21日收到修改稿

推导了一般条件下的相对论性电子回旋波色散关系. 其中采用了相对论性修正的分布函数. 对奇点作了较好的处理. 所得到的公式可直接用于计算一般条件下的相对论性电子回旋波的传播和吸收问题. 为高温等离子体波的研究提供了一个很方便的理论公式.

PACC: 5240D; 5250

## 一、引 言

随着 Tokamak 研究的发展, 等离子体参数不断提高. 一般等离子体温度可达几十个 keV. 其电子的速度可与光速相比. 因此相对论效应相当重要. 目前, 等离子体中的相对论效应研究非常活跃, 已延伸到很多方面. 如等离子体中驱动电流的相对论效应<sup>[1]</sup>; 相对论性分布函数及等离子体输运过程研究<sup>[2]</sup>; 电子回旋共振加热 (ECRH) 加热等离子体的磁流体动力学 (MHD) 稳定性问题<sup>[3]</sup> 等等, 相对论效应已成为当今等离子体物理研究的一个重要方面.

相对论效应对电子回旋波加热过程的影响也是很明显的. 在共振层附近, 由于函数的奇异性, 相对论效应带来的微小修正也将导致函数较大的变化. 这一点也表现在空间等离子体中的 Maser 不稳定问题中. 那里相对论效应导致的结果与非相对论性结果完全相反. 实验也证实了相对论结果. 在 Tokamak 等离子体中, 粒子的分布函数与 Maser 中的损失锥 (lose-cone) 不同, 但其温度相对而言是很高的, 相对论效应仍然很明显. 研究相对论效应的关键在于对色散关系中奇点的数学处理. 一般而言, 当  $k_{\parallel} = 0$  时奇点的处理可用朗道路径方法解决, 这与非相对论的情况类似. 如 Fidone 等人<sup>[4]</sup> 和 Chu<sup>[5]</sup> 都研究了这类情况. 他们的结果也都反映了相对论效应的重要性.

对于  $k_{\parallel} \neq 0$  的情况, 对奇点的处理会很复杂. 本文利用复变函数的性质对奇点作了很好的处理. 给出  $k_{\parallel}$  任意值情况下的理论公式. 它不仅可以直接计算吸收过程的相对论效应, 而且也可以计算传播过程的相对论性结果, 尽管传播过程的相对论效应很弱.

## 二、相对论性色散关系推导

考虑均匀磁场, 并且假定电子为麦氏分布. 在电子回旋波频段  $\omega \sim \omega_{ce}$ , 离子质量远大

于电子质量,  $\omega_{ci} \ll \omega_{ce}$ , 因而离子的响应可以不考虑. 这时系统主要表现为电子回旋波与电子的相互作用. 在色散关系中, 离子的贡献与电子相比是很小的, 因此关于离子的项都被忽略不计.

在经典力学中, 粒子分布函数是由刘维方程来描述的. 刘维方程出发点是动力学系统的连续性. 只要系统是由正则方程描述, 并且所有的正则变量是连续的物理量, 则刘维方程成立. 相对论力学中, 粒子的动力学方程具有正则方程形式, 而且也具有连续性. 因此在相对论力学中, 刘维方程仍成立,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = C(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad (1)$$

式中  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  为正则变量;  $C(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  表示由于不连续过程(如碰撞、粒子产生和湮没等过程)的贡献. 在我们所考虑的具体情况下, 没有粒子的产生和湮没. 另外, 在电子回旋波时间尺度上, 可作无碰撞近似, 即  $C(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = 0$ . 在相对论力学中, 带电粒子的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

或 
$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} + e\mathbf{E}.$$

在磁场  $\mathbf{B} = \text{const}$ ,  $\mathbf{E} = 0$  时, 方程(2)的解的精确式为

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} \cos[\Omega_c(\tau - t) + \varphi], \\ v_y &= -v_{\perp} \sin[\Omega_c(\tau - t) + \varphi], \\ v_z &= v_{\parallel}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $\Omega_c = \Omega_{ce}/\gamma \equiv eB/m_e\gamma$ . (3)式在形式上与经典结果相同. 用未扰动轨道积分可求出受扰动后的分布函数变化量  $f_1$ . 从  $f_1$  可求出电流

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{1\alpha} d^3v.$$

仅保留电子项, 将  $f_1$  的结果代入后得

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \int \frac{\mathbf{J}_v d^3v}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_c}, \\ \mathbf{J}_v &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ie^2}{m_e} \begin{pmatrix} \frac{\eta}{\lambda} v_{\perp} J_n \\ -iv_{\perp} J'_n \\ v_{\parallel} J_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\eta}{\lambda} A_1 J_n & iA_1 J'_n (\frac{\eta}{\lambda} A_2 + A_3) J_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega}) \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}}, \\ A_2 &= \frac{k_{\perp} v_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} - \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}}, \\ A_3 &= \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}}, \lambda = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_c}. \end{aligned} \quad (5)$$

在相对论情况下, 麦氏分布的形式如下:

$$f(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{n_0}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} R \exp\left[-\frac{m_0 c^2}{T}(\gamma - 1)\right], \quad (6)$$

$$\text{式中} \quad R \approx \left[ 1 + \frac{15}{8} \frac{T}{m_0 c^2} + \frac{125}{128} \left( \frac{T}{m_0 c^2} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (7)$$

$R < 1$ , 在低能时  $R \approx 1$ . 将(6)式代入(5)式得

$$\begin{aligned} A_1 &= - \frac{n_0}{(2\pi)^{1/2}} \left( \frac{m_e}{T} \right)^{3/2} \frac{m_e v_{\perp}}{T} \gamma^3 e^{-\frac{m_e c^2}{T}(\gamma-1)} R, \\ A_2 &= 0, \\ A_3 &= - \frac{n_0}{(2\pi)^{1/2}} \left( \frac{m_e}{T} \right)^{3/2} \frac{m_e v_{\parallel}}{T} \gamma^3 e^{-\frac{m_e c^2}{T}(\gamma-1)} R. \end{aligned} \quad (5')$$

从(4)和(5')式就能得到等离子体的电导率  $\sigma$ . 将(4)式与  $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$  比较, 即得. 对于给定的单色波, 其介电张量  $\epsilon$  与  $\sigma$  的关系如下:

$$\begin{aligned} \epsilon &= I + \frac{i\sigma}{\omega \epsilon_0} \\ &= I + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{e^2/m_e \omega \epsilon_0 d^3v}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_e} \sigma R \gamma^3 \\ &= I - C_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int T e^{-\frac{m_e c^2}{T}(\gamma-1)} \frac{v_{\perp} dv_{\parallel} dv_{\perp}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_e} R \gamma^3, \end{aligned} \quad (6')$$

$$\text{式中} \quad C_e = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{m_e^3}{(2\pi)^{1/2} (m_e T)^{3/2}} \frac{m_e}{T} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{m_e}{T} \right)^{5/2}, \quad (7')$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{n}{\lambda} v_{\perp} J_n \\ -i v_{\perp} J'_n \\ v_{\parallel} J_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n}{\lambda} v_{\perp} J_n & i v_{\perp} J'_n & v_{\parallel} J_n \end{pmatrix}.$$

为求出上面的积分式, 将上式过渡到动量空间中. 动量与速度的关系为

$$\begin{aligned} p_{\perp} &= m_e \gamma v_{\perp}, \\ p_{\parallel} &= m_e \gamma v_{\parallel}. \end{aligned}$$

$$\text{其雅可比行列式 } |J|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial v_{\perp}} & \frac{\partial p_{\perp}}{\partial v_{\parallel}} \\ \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial v_{\perp}} & \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial v_{\parallel}} \end{vmatrix} = m_e^2 \gamma^4,$$

$$\text{即 } |J| = \left| \frac{dv_{\perp} dv_{\parallel}}{dp_{\perp} dp_{\parallel}} \right| = m_e^{-2} \gamma^{-4}.$$

知道了速度与动量空间之间的雅可比变换, 下一步就是先将积分式中的 Bessel 函数展开成级数

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \left( \frac{x}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \frac{x^2}{4} + \frac{1}{32(n+1)(n+2)} x^4 + \dots \right), \\ J_{-n}(x) &= J_n(-x), \\ J'_n(x) &= \frac{n J_n(x)}{x} - J_{n+1}(x). \end{aligned}$$

对  $\epsilon$  的第一个元素  $\epsilon_{xx}$

$$\varepsilon_{xx} = 1 - C_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{v_{\perp} dv_{\parallel} dv_{\perp}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_e} \frac{\gamma^3}{\lambda} R \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 v_{\perp}^2 J_n^2 e^{-\frac{m_e c^2}{T}(\gamma-1)}.$$

用  $J_n(x)$  的递推公式和展开式, 当  $n=1$  时,

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 v_{\perp}^2 J_n^2 &= \left(\frac{1}{\lambda}\right) v_{\perp}^2 J_1^2 \\ &\approx \frac{1}{4} v_{\perp}^2 \left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{5}{32 \times 6} \lambda^4\right) \quad (\text{保留到 } \lambda^4). \end{aligned}$$

将  $\lambda = k_{\perp} v_{\perp} / \Omega_e$  代入上式得  $n=1$  的积分项

$$\begin{aligned} C_e \int \frac{v_{\perp} dv_{\parallel} dv_{\perp}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \Omega_e} \frac{\gamma^3 R}{\Omega_e} \left[ \frac{1}{4} v_{\perp}^2 \left(1 - \frac{1}{4} \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{\Omega_e^2} + \frac{5}{32 \times 6} \frac{k_{\perp}^4 v_{\perp}^4}{\Omega_e^4}\right) \right] e^{-\frac{m_e c^2}{T}(\gamma-1)} \\ = C_e \int \frac{v_{\perp} dv_{\parallel} r^3 v_{\perp}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \Omega_e} \frac{R}{\Omega_e} \left[ \frac{1}{4} v_{\perp}^2 - \frac{1}{16} \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp}^4}{\Omega_e^2} + \frac{5}{32 \times 6} \frac{k_{\perp}^4 v_{\perp}^6}{\Omega_e^4} \right] e^{-\frac{m_e c^2}{T}(\gamma-1)}. \quad (8) \end{aligned}$$

从上式看出, 展开后的积分式都可写成关于  $v_{\parallel} v_{\perp}^{2t}$  的多项式,  $s=0, 1, 2, \dots, t=0, 1, 2, 3, \dots$ . 上式中, 除了  $v_{\parallel}^s v_{\perp}^{2t}$  项外, 回旋频率  $\Omega_e$  与相对论因子  $\gamma$  有关, 因此  $\Omega_e$  也是  $v_{\parallel}$  和  $v_{\perp}$  的函数, 为方便设  $\Omega_e = \Omega_{ce} / \gamma$ ,  $\Omega_{ce}$  是静质量回旋频率, 因而与  $v_{\parallel}, v_{\perp}$  无关.

除了系数外, 上式每一项都能写成  $s, t$  的一般形式, 即

$$RC_e \int \frac{\gamma^3 v_{\parallel}^s v_{\perp}^{2t+1} dv_{\parallel} dv_{\perp}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_{ce}/\gamma} \left(\frac{k_{\perp} \gamma}{\Omega_{ce}}\right)^{s+2t-2} e^{-\frac{m_e c^2}{T}(\gamma-1)}.$$

令上式为  $G(s, t, n)$ ,  $s, t=0, 1, 2, \dots, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  变换成  $p_{\parallel}, p_{\perp}$  空间的积分, 则  $G(s, t, n)$  写成

$$G(s, t, n) \equiv RC_e m_e^{-5} (m_e c)^{-s-2t+2} \left(\frac{k_{\perp} c}{\Omega_{ce}}\right)^{s+2t-2} \int \frac{\gamma^{-3} p_{\parallel}^s p_{\perp}^{2t+1} dp_{\parallel} dp_{\perp}}{\gamma \omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} - n\Omega_{ce}} e^{-\frac{m_e c^2}{T}(\gamma-1)}. \quad (9)$$

将  $(p_{\parallel}, p_{\perp})$  变换成  $(p_{\parallel}, \gamma)$  空间的积分. 其步骤是利用公式

$$\begin{aligned} p_{\perp}^2 &= m_0^2 c^2 (\gamma^2 - 1) - p_{\parallel}^2, \\ p_{\parallel} &= p_{\parallel}, \\ p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} &= m_e^2 c^2 \gamma dr dp_{\parallel}, \end{aligned} \quad (10)$$

其雅可比式  $|J| = \left| \frac{p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel}}{\gamma d\gamma dp_{\parallel}} \right| = m_e^2 c^2$ ,  $p_{\parallel}$  的积分限为  $(-a, a)$ , 而  $r$  的积分限为  $(1, \infty)$ . 这里

$$a = m_e c \sqrt{r^2 - 1}.$$

将(10)式代入(9)式中, 最后整理成如下形式:

$$\begin{aligned} G(s, t, n) &= \frac{R}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 \left(\frac{k_{\perp} c}{\Omega_{ce}}\right)^{s+2t-2} (m_e c)^{-s-2t} \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^{5/2} \frac{\omega}{k_{\parallel} c} \\ &\times \int_1^{\infty} d\gamma \int_{-m_e c \sqrt{\gamma^2-1}}^{m_e c \sqrt{\gamma^2-1}} dp_{\parallel} \frac{\gamma^{-2} [m_e^2 c^2 (\gamma^2 - 1) - p_{\parallel}^2]^t p_{\parallel}^s}{\frac{m_e \omega}{k_{\parallel}} (\gamma - \frac{n\Omega_{ce}}{\omega}) - p_{\parallel}} e^{-\frac{m_e c^2}{T}(\gamma-1)}. \quad (11) \end{aligned}$$

为方便引入符号  $\mathcal{J}_n$ , 其定义如下:

$$\mathcal{J}_n v_{\perp}^{2t} v_{\parallel}^s = (2\eta)^{-s-2t+2} G(s, n, t), \quad (12)$$

式中  $\eta = \frac{k_{\perp} c}{2\Omega_{ce}}$ . 注意, 对 ECRH 而言,  $\eta \ll 1$  (小拉莫尔半径近似条件). 利用  $\mathcal{J}_n$ , 介电张量元写成下列简单形式:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= 1 - \left[ \frac{\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_{-1}}{4} v_{\perp}^2 + \eta^2 \left( -\frac{\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_{-1}}{4} + \frac{\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_{-2}}{4} \right) v_{\perp}^4 \right] + O(\eta^4), \\ \epsilon_{xy} &= -i \left[ \frac{\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_{-1}}{4} v_{\perp}^2 + \eta^2 \left( -\frac{\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_{-1}}{2} + \frac{\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_{-2}}{4} \right) v_{\perp}^4 \right] + O(\eta^4), \\ \epsilon_{xz} &= - \left[ \eta \frac{\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_{-1}}{2} v_{\perp}^2 v_{\parallel} + \eta^3 \left( -\frac{\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_{-1}}{2} + \frac{\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_{-2}}{4} \right) v_{\perp}^4 v_{\parallel} \right] + O(\eta^5), \\ \epsilon_{yy} &= 1 - \left[ \frac{\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_{-1}}{4} v_{\perp}^2 + \eta^2 \left( \mathcal{J}_0 - \frac{3\mathcal{J}_1 + 3\mathcal{J}_{-1}}{4} + \frac{\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_{-2}}{4} \right) v_{\perp}^4 \right] + O(\eta^4), \\ \epsilon_{yz} &= -i \left[ \eta \left( \mathcal{J}_0 - \frac{\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_{-1}}{2} \right) v_{\perp}^2 v_{\parallel} + \eta^3 \left( -\frac{3}{2} \mathcal{J}_0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_{-1}}{1} - \frac{\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_{-2}}{4} \right) v_{\perp}^4 v_{\parallel} \right] + O(\eta^4), \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \left[ \mathcal{J}_0 v_{\parallel}^2 + \eta^2 \left( \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_{-1} - 2\mathcal{J}_0 \right) v_{\perp}^2 v_{\parallel}^2 \right] + O(\eta^4), \\ \epsilon_{yx} &= -\epsilon_{xy}, \epsilon_{zx} = \epsilon_{xz}, \epsilon_{zy} = -\epsilon_{yz}.\end{aligned}\tag{13}$$

$\epsilon$  仍然是一个反对称张量.

### 三、对 $G(s, n, t)$ 的奇点计算

上节得到了相对论性情况下电子回旋波介电张量的一般表达式. 它们归结为对  $\mathcal{J}_n v_{\perp}^2 v_{\parallel}^s$  的计算, 即对  $G(s, n, t)$  的计算 (见 (12) 式).  $G(s, n, t)$  为一个二重积分, 且内重积分为一个含参量  $\gamma$ , 而且奇点又与  $\gamma$  有关的积分, 所以 (11) 式不便于计算. 由于 (11) 式的形式很难用朗道路径的方法, 因此本节将讨论这一问题.

引入变换

$$x = \frac{p_{\parallel}}{m_e c},$$

$G(s, n, t)$  写成如下形式:

$$G(s, n, t) = \text{const} \int_1^{\infty} d\gamma \int_{-a}^a dx \frac{\gamma^{-2} (\alpha^2 - x^2)^t x^s}{x_0 - x} e^{-A(\gamma-1)},$$

其中  $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - 1}$ ,  $x_0 = \frac{1}{n_{\parallel}} (\gamma - \xi_n)$ ,  $\xi_n = n\Omega_{ce}/\omega$ ,  $n_{\parallel} = k_{\parallel} c/\omega$ ,

$$\text{const} = \frac{R}{\sqrt{2\pi}} (\omega_{pe}/\omega)^2 (k_{\perp} c/\Omega_{ce})^{s+2t-2} (m_e c^2/T)^{5/2} 1/n_{\parallel}, A = mc^2/T.$$

如果令

$$\begin{aligned}H &= \int_{-a}^a \frac{[\alpha^2 - x^2]^t x^s}{x_0 - x} dx \\ &= - \int_{-a-x_0}^{a-x_0} \frac{[(\alpha^2 - (z+x_0)^2)]^t (z+x_0)^s}{z} dz.\end{aligned}\tag{14}$$

上面被积式中, 分子为一个多项式, 展开后具有以下形式:  $-(\alpha^2 - x_0^2)^t x_0^s + z(a_0 + b_0 z +$

... + cz<sup>2i+s-1</sup>). 因此, (14)式可以写成两项, 一项是包含奇点的项, 另一项是无奇点的普通项. 即

$$H = H_0 + H_1,$$

式中  $H_1$  为含奇点的积分,

$$H_1 = - \int_{-a-x_0}^{a-x_0} \frac{(\alpha^2 + x_0^2)^i x_0^i}{z} dz, \quad (15)$$

而另一项形式较复杂, 但是只要作简单而枯燥的运算即得 (利用公式:  $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n c_i^i a^i b^{n-i}$ )

$$H_0 = \sum_{i=0}^t \sum_{k=0}^{[\frac{s-1}{2}] + i} \sum_{j=2k+1}^{s+2i} \frac{(-1)^{i+j} (-2)^j}{j} c_i^i c_{s+2i}^j c_j^{2k+1} \times \alpha^{2i+2k-2i+1} x_0^{s+2i-2k-1},$$

式中  $[\frac{s-1}{2}]$  表示取  $\frac{s-1}{2}$  的整数位. 再利用恒等式  $\sum_{j=m}^n (-1)^j c_n^j c_{j-1}^{m-1} \equiv (-1)^m$  和  $\frac{m}{j} c_j^m \equiv c_{j-1}^{m-1}$ , 上式还可以写成更简洁的形式

$$H_0 = - \sum_{i=0}^t \sum_{k=0}^{[\frac{s-1}{2}] + i} \frac{(-1)^i (-2)^i c_i^i}{2k+1} \alpha^{2i+2k-2i+1} x_0^{s+2i-2k-1}. \quad (15')$$

利用复变函数理论

$$\operatorname{In} g(x) = P \ln |g(x)| - i\pi\theta[-g(x)], \quad (16)$$

式中“P”为主值符号,  $\theta(x)$  定义如下:

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 0 & x \leq 0; \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

利用(16)式, (15)式  $H_1$  可以积出

$$H_1 = - (\alpha^2 - x_0^2)^i x_0^i [\operatorname{In} \left| \frac{\alpha - x_0}{\alpha + x_0} \right| - i\pi\theta\left(\frac{\alpha - x_0}{\alpha + x_0}\right)]. \quad (17)$$

由已定义的量  $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - 1}$  和  $x_0 = \frac{1}{n_{//}}(\gamma - \xi_n)$  代入后知

$$\frac{\alpha - x_0}{\alpha + x_0} = [\text{正数}] \times (n_{//}^2 - 1)(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2).$$

这里 [正数] 表示一个大于零的数;  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  分别为二次式  $n_{//}^2(\gamma^2 - 1) - (\gamma - \xi_n)^2$  的两个数. 根据二次式实根的存在定理和二次式正负特性, 得到下列两种情况:

1. 当  $n_{//} < 1$  时,

$$\theta\left(\frac{\alpha - x_0}{\alpha + x_0}\right) = \begin{cases} \theta[\xi_n - \sqrt{1 - n_{//}^2}] & \text{当 } \gamma_1 < \gamma < \gamma_2; \\ 0 & \text{当 } \gamma < \gamma_1 \text{ 或 } \gamma > \gamma_2. \end{cases} \quad (18a)$$

2. 当  $n_{//} > 1$  时,

$$\theta\left(\frac{\alpha - x_0}{\alpha + x_0}\right) = \begin{cases} 1 & \text{当 } \gamma > \gamma_2 \text{ 时;} \\ 0 & \text{当 } \gamma < \gamma_2 \text{ 时.} \end{cases} \quad (18b)$$

上面两式中, 已认定  $\gamma_1 < \gamma_2$ , 且  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  由下式给出:

$$\gamma_{1,2} = \frac{\xi_n \pm n_{\parallel} \sqrt{\xi_n^2 + n_{\parallel}^2 - 1}}{1 - n_{\parallel}^2}, \text{ 认定 } \gamma_1 < \gamma_2. \quad (19)$$

将  $H_0, H_1$  代入式  $G(s, n, t) = \text{const} \int_1^{\infty} r^{-2} (H_0 + H_1) e^{-\frac{m_e c^2}{T} (r-1)} d\gamma$  中. 由 (14), (15), (17), (18a) 和 (18b) 式得到

$$G_0(s, n, t) = - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 \frac{R}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^{5/2} \frac{1}{n_{\parallel}} \int_1^{\infty} d\gamma \gamma^{-2} e^{-\frac{m_e c^2}{T} (r-1)} f(\gamma),$$

$$f(\gamma) \equiv \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{[\frac{i-1}{2}] + i} \frac{2(-1)^i c_i^i}{2j+1} (\gamma^2 - 1)^{n+j-i+\frac{1}{2}}$$

$$+ [\gamma^2 - 1 - \frac{1}{n_{\parallel}^2} (\gamma - \xi_n)^2]^i \left[ \frac{1}{n_{\parallel}} (\gamma - \xi_n) \right]^i \ln \left| \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1} - \frac{1}{n_{\parallel}} (\gamma - \xi_n)}{\sqrt{\gamma^2 - 1} + \frac{1}{n_{\parallel}} (\gamma - \xi_n)} \right|, \quad (20a)$$

$$G_1(s, n, t) = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^{5/2} n_{\parallel}^{-2s-t-1} R \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 g(\gamma),$$

当  $n_{\parallel} < 1$  时,

$$g \equiv \left[ \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \gamma^{-2} [n_{\parallel}^2 (\gamma^2 - 1) - (\gamma - \xi_n)^2]^i (\gamma - \xi_n)^i e^{-\frac{m_e c^2}{T} (r-1)} d\gamma \right] \theta(\xi_n - \sqrt{1 - n_{\parallel}^2});$$

当  $n_{\parallel} > 1$  时,

$$g \equiv \int_{\gamma_2}^{\infty} \gamma^{-2} [n_{\parallel}^2 (\gamma^2 - 1) - (\gamma - \xi_n)^2]^i (\gamma - \xi_n)^i e^{-\frac{m_e c^2}{T} (r-1)} d\gamma, \quad (20b)$$

$$G(s, n, t) = G_0(s, n, t) + iG_1(s, n, t). \quad (20c)$$

至此, 已得到了  $G(s, n, t)$  的计算公式, 它们纯粹是一些积分和求和的基本运算, 在计算机上容易实现. 由于积分中都带有  $e^{-\frac{m_e c^2}{T} (r-1)}$ , 而  $m_e c^2/T$  一般都在几十或几百的数量级, 因而可作近似.

对  $n_{\parallel} = 0$  的情况, 可以写出较好的近似公式

$$G_0(s, n, t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } s = \text{奇数}; \\ - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 R \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^{1-t-\frac{s}{2}} \frac{(2t+s+1)!}{(t+\frac{s}{2})!} \frac{2^{-t-\frac{s}{2}}}{\xi_n - 1} \sum_{i=0}^t \frac{(-1)^i c_i^i}{2i+s+1} & \text{当 } s = \text{偶数}, \end{cases} \quad (21a)$$

$$G_1(s, n, t) = \begin{cases} 0 & (s = \text{奇数或 } \xi < 1); \\ - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{n+1} n!}{\prod_{i=0}^n (s+2i+1)} \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^{5/2} \xi_n (\xi_n^2 - 1)^{\frac{2n+t+1}{2}} e^{-\frac{m_e c^2}{T} (t_{n-1})} & \text{当 } s = \text{偶数}, \xi \geq 1, \end{cases} \quad (21b)$$

$$G(s, n, t) \equiv G_0(s, n, t) + iG_1(s, n, t), \xi_n = \frac{n\Omega_e}{\omega}, R \text{ 即 (7) 式.}$$

(21a)式由(20a)式直接作近似而求得,其条件为 $T \ll m_e c^2$ .对(20b)式作一些积分变换,然后再利用 $T \ll m_e c^2$ 条件而求得 $n_{\parallel} \rightarrow 0$ 极限下的值即(21b)式.利(21)式可以很方便地讨论 $n_{\parallel} = 0$ 时的问题.

值得注意的是(21b)式与其它作者所得公式一致.如Chu<sup>[5]</sup>在 $k_{\parallel} = 0$ 的假设下求得4个函数: $G(0,1,1), G(0,2,2), G(2,1,1)$ 和 $G(2,2,2)$ .这4个函数与本文(21b)式一致.

#### 四、电子回旋波色散关系计算

等离子体色散关系的一般形式为

$$\det D = 0,$$

$$D = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} - n_{\parallel}^2 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} + n_{\perp} n_{\parallel} \\ \epsilon_{yz} & \epsilon_{xy} - n_{\parallel}^2 - n_{\perp}^2 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} + n_{\perp} n_{\parallel} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{zz} - n_{\perp}^2 \end{bmatrix}.$$

此处已设定未扰磁场方向为 $z$ 方向,等离子体不均匀方向为 $x$ 方向 $n_{\parallel}$ 平行 $z$ 轴, $n_{\perp}$ 平行 $x$ 轴,如图1所示.

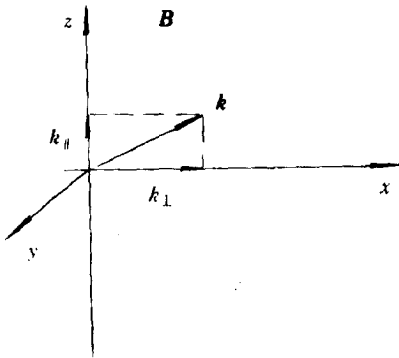


图 1

利用(13),(20)和(12)式可以得到一个关于 $n_{\perp}^2$ 的多项式

$$P(n_{\perp}^2) = 0.$$

求解此式,即可得到回旋波的传播特性和吸收曲线.

图2为不同温度下得到的一组曲线.图2中纵坐标轴是波矢的虚部,反映吸收的强弱.虚线是相应的非相对论性结果.图2中从低到高依次为 $T = 0.5, 2, 10 \text{keV}$ .在图2中,温度升高时,吸收都是增强的.“O”模和“X”模都是如此.这也说明温度上升时,共振粒子是增多的.但是相比之

下相对论效应使得吸收对温度的响应要慢.特别是在高温下差别更大.另外,图2中也显示在温度较高时,相对论性吸收区域是向高频(或高场)方向移动.

实际上,上述差异都是相对论物理基本规律的体现.狭义相对论最基本的假设是物质不能以超光速运动.因此共振粒子必定都是小于光速的,由共振条件 $\omega - n\Omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0$ ,共振粒子的速度 $v_{\parallel} = (\omega - n\Omega)/k_{\parallel} < c$ ,即 $\xi_n > 1 - n_{\parallel}$ .只有满足此条件时才会有共振粒子.这里 $\xi_n = n\Omega_{ce}/\omega$ 为回旋频率与波动频率之比. $n$ 为整数.这说明在低场边,回旋频率小时没有共振粒子,因而当温度升高时,吸收区域不会向低场区扩展.从本文公式中得到的更精确的相对论性条件为(见(20b)式)

$$\xi_n > \sqrt{1 - n_{\parallel}^2}.$$



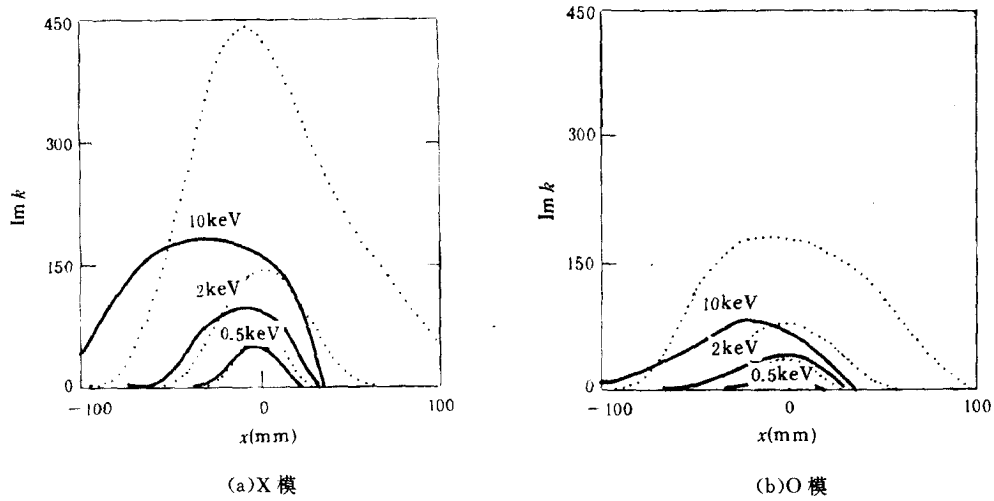


图 2

--- 为非相对论性；— 为相对论性； $n = n_0(1 - x^2/a^2)^{1.8}$ ； $T(x) = T_0(1 - x^2/a^2)^{2.5}$ ， $a = 0.2 \text{ m}$ ； $n_{\parallel} = \cos 75^\circ$ ； $\omega_{pe}/\Omega_{ce} \approx 0.6$ ； $R = 0.98 \text{ m}$ ； $n_0 = 9.0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ； $B_0 = 5T$ ； $T_0 = 0.5, 2, 10 \text{ keV}$

另外，在相对论情况下，运动粒子的质量为速度的函数，因而回旋频率也与粒子的速度有关。在一给定的空间点，粒子的速度有一个分布，质量修正使部分粒子偏离共振，因而相对论性吸收比非相对论性弱。相反，在共振粒子少的弱吸收区，相对论性吸收比非相对论性强。这是因为考虑质量修正后，满足共振条件的粒子数目增多。

### 五、结 语

从本文可以看出，在 keV 数量级以上，相对论性效应就非常重要。

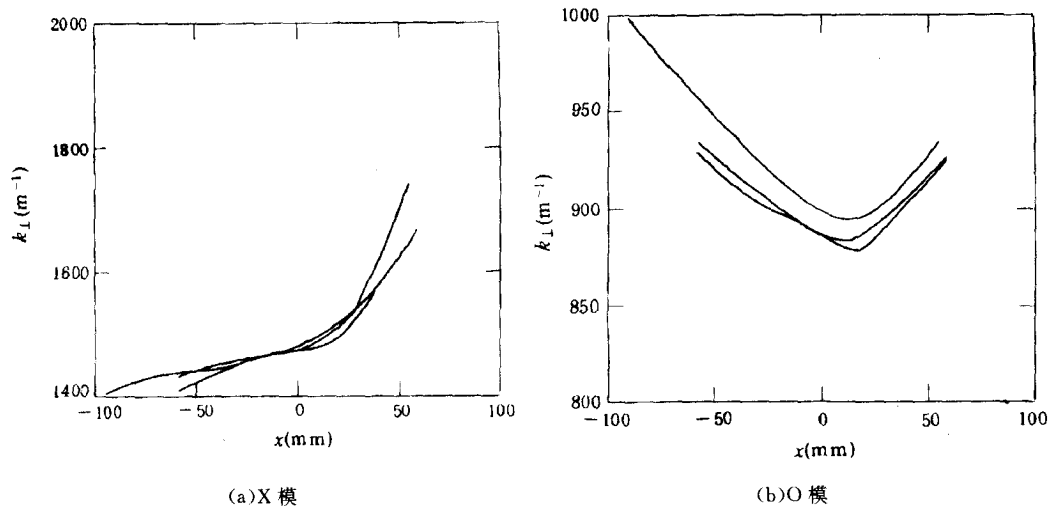


图3 对应图2中的波矢实部  $k_{\perp}$

本文中的处理用到了 Bessel 函数的展开式,在高温参数下,小拉莫尔半径是否成立,即能否有  $(k_{\perp} \rho_{ce})^2 \ll 1$  呢?图3是在图2同样参数下对应每个解的实部  $k_{\perp}$ .

从图3中可知,在所计算的参数范围内,无论是 O 模还是 X 模,其值  $k_{\perp} < 2000 \text{ m}^{-1}$ . 由此可以估算  $(k_{\perp} \rho_{ce})^2$  值

$$\begin{aligned} \Delta &= k_{\perp} \rho_{ce} \equiv k_{\perp} \frac{m_e v_{\perp}}{eB} \\ &= 7.54 \times 10^{-5} \frac{k_{\perp} \sqrt{T_e}}{B} \quad [T_e] = \text{keV}. \end{aligned}$$

在本文计算中,  $T_e < 10 \text{ keV}$ ,  $k_{\perp} < 2000 \text{ m}^{-1}$ ,  $B_0 = 5 T$ . 代入得

$$\Delta \lesssim 0.1$$

或

$$(k_{\perp} \rho_{ce})^2 \lesssim 0.01.$$

因此在最坏的估算下,仍满足小拉莫尔半径近似的要求.

$$\text{对于} \quad T_e = 0.5 \text{ keV}, \quad (k_{\perp} \rho_{ce})^2 \leq 4.5 \times 10^{-4};$$

$$\text{对于} \quad T_e = 2 \text{ keV}, \quad (k_{\perp} \rho_{ce})^2 \leq 1.8 \times 10^{-3}.$$

以上都是取  $k_{\perp} = 2000$ ,  $B = 5 T$ .

- [1] Relativistic Effects in Plasma. Proceedings of the workshop on Plasma Basic Research, p. 1-1.
- [2] Relativistic Effects in Plasma. Proceedings of the workshop on Plasma Basic Research, p. 1-1.
- [3] Relativistic Effects in Plasma. Proceedings of the workshop on Plasma Basic Research, p. B-1.
- [4] I. Fidone, G. Granata, G. Ramoni, R. L. Meyer, *Physics Fluids*, **21**(1978), 645.
- [5] K. R. Chu, *Nuclear Fusion*, **25**(1985), 64.

## THE RELATIVISTIC ELECTRON CYCLOTRON WAVE DISPERSION RELATION IN PLASMA

WU JUN-LING

*Institute of Plasma physics, Academia Sinica, Hefei 230031*

(Received 31 July 1992; revised manuscript received 21 September 1992)

### ABSTRACT

The relativistic electron cyclotron wave dispersion relation has been derived analytically with the electron distribution function also a relativistic one. The singularity which is inevitable in these problem has been calculated analytically without imposing any condition. So the formula obtained here can be directly applied to the general situation of wave propagation and absorption. It provided a convenient formula for the study of high temperature plasma electron cyclotron wave.

**PACC:** 5240D; 5250