

# $SU(1,1)$ 相干态光场的统计特性及其对原子动力学行为的影响\*

路 洪<sup>1)</sup> 彭金生<sup>2)</sup>

(激光技术国家重点实验室, 武汉 430074; 华中师范大学物理系, 武汉 430070)

(1993年11月8日收到)

研究了 Bargman 指标为  $k = 1/4$  和  $k = 3/4$  的两种  $SU(1,1)$  相干态光场的特性, 证明了两种相干态具有不同的量子统计特性, 并讨论了光场初始处于  $SU(1,1)$  相干态时, 双光子 Jaynes-Cummings (J-C) 模型中, 原子的动力学行为及粒子数反转随时间的演化, 证明了与初始一般相干态光场不同, 原子展现出特殊的周期振荡和脉冲行为。

PACC: 4250; 3280

## 1 引 言

最近, 与李群  $SU(1,1)$  相联系的广义相干态<sup>[1]</sup>重新引起了人们的兴趣<sup>[2-6]</sup>。这类相干态可以由大量的非线性光学过程产生<sup>[2]</sup>。有关  $SU(1,1)$  相干态的特性及其在量子光学中的应用, 是当前比较热门的课题之一<sup>[6-9]</sup>。我们知道, 对应于 Bargman 指标  $k = 1/4$  的  $SU(1,1)$  相干态即为众所周知的压缩真空态, 它具有偶宇称。Gerry 等人已经较深入地研究了它与原子系统的相互作用<sup>[3,7]</sup>。然而, 具有奇宇称的  $SU(1,1)$  相干态( $k = 3/4$ , 与前者可由同一物理过程产生)的情况怎样? 以往的文献中则未予讨论。

本文对  $SU(1,1)$  相干态 ( $k = 3/4$ ) 进行研究, 着重讨论两种  $SU(1,1)$  相干态( $k = 1/4$  和  $k = 3/4$ )光场的统计特性, 论述双光子 J-C 模型中, 当光场初始处于这两种相干态时, 原子的动力学行为及其粒子数反转随时间的演化规律。我们研究的结果表明, 两种  $SU(1,1)$  相干态光场具有迥然不同的量子统计特性。双光子 J-C 模型中初始处于  $SU(1,1)$  相干态光场情况下, 与初始处于一般相干态光场和压缩相干态光场不同, 原子展现出特殊的周期振荡和脉冲行为。

## 2 $SU(1,1)$ 相干态光场的量子统计特性

我们知道,  $SU(1,1)$  群的李代数由生成元  $K_0, K_{\pm}$  组成, 它们满足对易关系

\* 国家自然科学基金资助的课题。

1) 现在工作单位: 湖南常德师范专科学校物理系。

2) 中国高等科学技术中心(世界实验室), 北京100080。

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, [K_-, K_+] = 2K_0, \quad (1)$$

卡西米尔算子为

$$c = K_0^2 - \frac{1}{2}(K_+K_- + K_-K_+), \quad (2)$$

其本征值  $c = k(k-1)$ ,  $k$  为 Bargman 指标. 使  $K_0$  对角化的基矢为  $|n, k\rangle$ , 有

$$K_0|n, k\rangle = (n+k)|n, k\rangle \quad (k > 0), \quad (3)$$

$SU(1, 1)$  李代数的一种实现是取

$$K_+ = \frac{1}{2}a^{+2}, K_- = \frac{1}{2}a^2, K_0 = \frac{1}{4}(a^+a + aa^+), \quad (4)$$

于是得到卡西米尔算子的本征值  $c = -3/16$ , 相应的 Bargman 指标  $k = 1/4$  或  $3/4$ . 而态  $|n, 1/4\rangle$  和  $|n, 3/4\rangle$  分别为含有  $2n$  个或  $2n+1$  个光子的数态<sup>[3]</sup>.  $SU(1, 1)$  相干态通常定义为

$$|\xi, k\rangle = \exp(\beta K_+ - \beta^* K_-)|0, k\rangle = (1 - |\xi|^2)^k \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\Gamma(n+2k)}{n! \Gamma(2k)} \right]^{1/2} \xi^n |n, k\rangle, \quad (5)$$

式中

$$\xi = -\text{th} \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \beta = -\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, -\infty < \theta < \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

$\theta$  和  $\phi$  为群参数. 对于  $k = 1/4$  或  $k = 3/4$ , 分别有

$$|\xi, 1/4\rangle = (1 - |\xi|^2)^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^{1/2} \xi^n |2n\rangle, \quad (6a)$$

$$|\xi, 3/4\rangle = (1 - |\xi|^2)^{3/4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \right]^{1/2} \xi^n |2n+1\rangle. \quad (6b)$$

显然, 态  $|\xi, 1/4\rangle$  具有偶宇称<sup>[4]</sup>, 称为偶的  $SU(1, 1)$  相干态, 记为  $|\xi\rangle_e$ . 引言中已经提到它即为压缩真空态; 类似地, 称  $|\xi, 3/4\rangle$  为奇的  $SU(1, 1)$  相干态, 记为  $|\xi\rangle_o$ . 它对应于压缩单光子态<sup>[10]</sup>. 由(6)式, 可以求出参数  $\xi$  与光场平均光子数的关系为

$$\bar{n}_e = \langle N \rangle_e = \frac{|\xi|^2}{1 - |\xi|^2}, \quad (7a)$$

$$\bar{n}_o = \langle N \rangle_o = \frac{1 + 2|\xi|^2}{1 - |\xi|^2}. \quad (7b)$$

下面着重研究奇、偶  $SU(1, 1)$  相干态光场的量子统计性质. 首先, 由(6)和(7)式立即可以得到光子数概率分布为

$$P_{2n}^e = (1 - |\xi|^2)^{1/2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} |\xi|^{2n} = \left( \frac{1}{\bar{n} + 1} \right)^{1/2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left( \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n, \quad (8a)$$

$$P_{2n+1}^o = (1 - |\xi|^2)^{3/2} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} |\xi|^{2n} = \left( \frac{3}{\bar{n} + 2} \right)^{3/2} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \left( \frac{\bar{n}-1}{\bar{n} + 2} \right)^n, \quad (8b)$$

$$P_{2n}^o = P_{2n+1}^e = 0. \quad (8c)$$

1) 将态  $|\xi, 1/4\rangle$  从粒子数表象变换到坐标表象立即可看出.

光子数概率分布特征示于图1。图1中分别给出了平均光子数为4,10,20时,由(8)式表征的两种相干态的光子数概率分布。从图1中可以看到,平均光子数 $\bar{n}$ 较小时,两种相干态光场的光子数分布都类似于热光场(见图1(a),(d))。随着 $\bar{n}$ 增大, $P_{2n}^{\circ}$ 的曲线变得较平坦,不过仍然是单调下降的。但是 $P_{2n+1}^{\circ}$ 的曲线却不再单调,对应于某个 $n$ 有一峰值,且当 $\bar{n}$ 增大时,曲线上的峰向右移动。

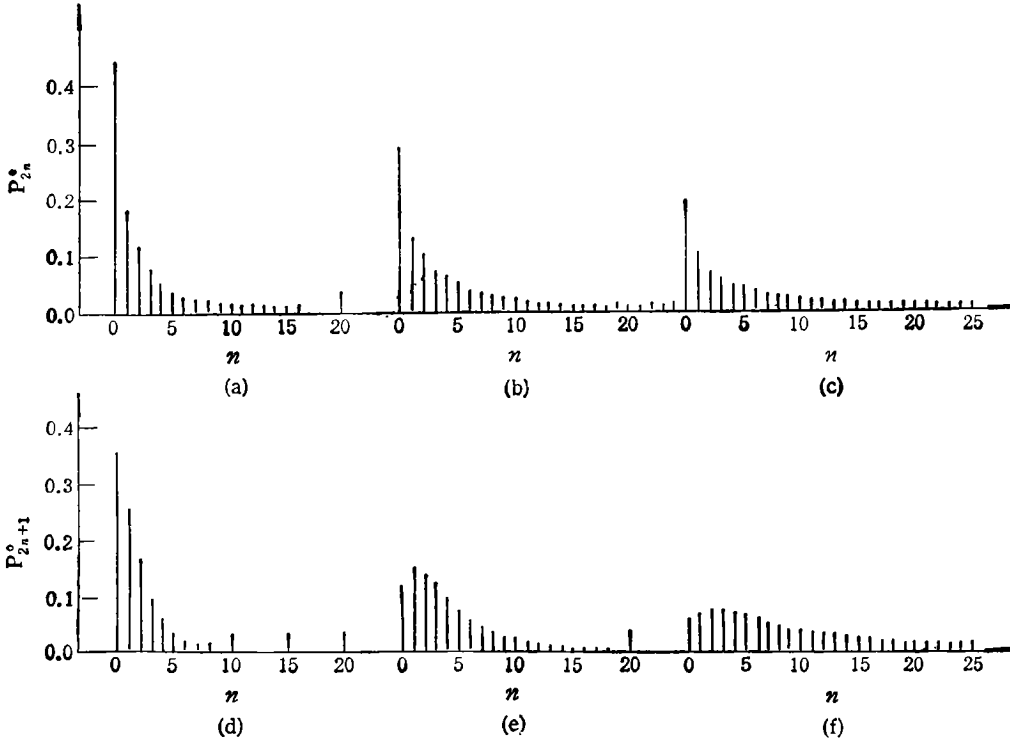


图1 光子数概率分布  $P_{2n}^{\circ}$  和  $P_{2n+1}^{\circ}$  (a)(b)(c)分别为  $\bar{n} = 4, 10, 20$  时  $P_{2n}^{\circ}$  随  $n$  的变化; (d)(e)(f)分别为  $\bar{n} = 4, 10, 20$  时  $P_{2n+1}^{\circ}$  随  $n$  的变化

其次,考察  $SU(1,1)$  相干态的二阶相关函数

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle}{\langle a^{\dagger} a \rangle^2} = \frac{4\langle K_+ K_- \rangle}{\langle 2K_0 - \frac{1}{2} \rangle^2}, \quad (9)$$

由(6a)式可得

$$g^{(2)}(0) = \frac{1}{|\xi|^2} + 2 = \frac{1}{\bar{n}} + 3 > 1. \quad (10)$$

可见偶  $SU(1,1)$  相干态总是光子聚束的,那么奇的  $SU(1,1)$  相干态的情况怎样呢?由(6b)式得它的相关函数为

$$g^{(2)}(0) = \frac{9|\xi|^2 + 2|\xi|^4}{(1 + 2|\xi|^2)^2}. \quad (11)$$

一般说来,它可以大于1也可以小于1。若令上式等于1,可得

$$|\xi|^2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} = |\xi|_c^2. \quad (12)$$

可见当  $|\xi|^2 < |\xi|_c^2$  时,  $g^{(2)}(0) < 1$ , 此时光子反聚束; 而当  $|\xi|^2 > |\xi|_c^2$  时,  $g^{(2)}(0) > 1$ , 光子聚束。此外, 设对应于  $|\xi|_c$  的临界光子数为  $\bar{n}_c$ , 由(7b)式, 有

$$\bar{n}_c = \frac{14 - 2\sqrt{17}}{-1 + \sqrt{17}} \approx 1.84, \quad (13)$$

因此, 奇  $SU(1,1)$  相干态光场的光子是聚束还是反聚束取决于光场的强度。当  $\bar{n} > 1.84$  时, 光子聚束, 否则为反聚束, 可见奇、偶  $SU(1,1)$  相干态光场的二阶相干度有很大的差别。

最后再来研究  $SU(1,1)$  相干态光场的相位特性。按 Barnett-Pegg 相位理论<sup>[11]</sup>, 引入厄密相位算符

$$\Phi_0 = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (14)$$

其本征值为  $\theta_m$ , 相应的本征态为  $|\theta_m\rangle$ . 态  $|\theta_m\rangle$  可以用粒子数态作基矢展开为

$$|\theta_m\rangle = (s+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (15)$$

$$\theta_m = \theta_0 + 2\pi m / (s+1) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, s), \quad (16)$$

$\theta_0$  为参考位相, 所有相位变量的平均值均在  $s+1$  维希尔伯特空间计算, 然后再令  $s \rightarrow \infty$ . 为了简明起见, 这里令

$$|\xi\rangle_c = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\varphi'} |2n\rangle, \quad (17)$$

式中  $b_n$  为实数, 于是得到偶  $SU(1,1)$  相干态的相位概率分布函数

$$\begin{aligned} P_c(\theta_m) &= |\langle \theta_m | \xi \rangle_c|^2 \\ &= (1+s)^{-1} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>n'} b_n b_{n'} \cos [(\varphi' - 2\theta_m)(n - n')] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

本文取参考相位  $\theta_0$  为

$$\theta_0 = \frac{\varphi'}{2} - \frac{\pi s}{2(s+1)}, \quad (19)$$

于是

$$\theta_m = \frac{\varphi'}{2} - \frac{\pi s}{2(s+1)} + \frac{2\pi m}{s+1}. \quad (20)$$

当  $s \rightarrow \infty$  时,  $\theta_m$  变为连续变量, 令  $\theta = \frac{2\pi m}{s+1}$ ,  $d\theta = \frac{2\pi}{s+1}$ , 对应于  $m$  从 0 至  $s$ ,  $\theta$  从

0 变至  $2\pi$ . 由(18), (20)式和上述关系, 得到连续相位概率分布函数为

$$\begin{aligned} P_c(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2(1 - |\xi|^2)^{\nu/2} \sum_{n>n'} \left[ \frac{(2n-1)!! (2n'-1)!!}{(2n)!! (2n')!!} \right]^{\nu/2} \right. \\ &\quad \left. \cdot |\xi|^{n+n'} \cos [2(n-n')(\theta - \pi/2)] \right\}. \end{aligned} \quad (21a)$$

同理,对于  $k = 3/4$ ,得

$$P_o(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2(1 - |\xi|)^{3/2} \sum_{n>n'} \left[ \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \frac{(2n'+1)!!}{(2n')!!} \right]^{1/2} \cdot |\xi|^{n+n'} \cos [2(n-n')(\theta - \pi/2)] \right\}. \quad (21b)$$

从上式可以看到,  $P_e(\theta)$  和  $P_o(\theta)$  的周期皆为  $\pi$ 。为展现  $SU(1,1)$  相干态光场的相位概率分布特征,我们以  $\bar{n} = 4$  为例,将(21)式的数值计算结果示于图2。从图2中可以看到,无论  $P_e(\theta)$  还是  $P_o(\theta)$  在  $0$  至  $2\pi$  之间都有两个对称的峰值,但是  $P_e(\theta)$  的峰值比  $P_o(\theta)$  的峰值要尖锐得多。这说明在测量光场的相位时,在态  $|\xi\rangle_e$  中的不确定度比  $|\xi\rangle_o$  中的不确定度要小得多,亦即奇  $SU(1,1)$  相干态光场的相位涨落比偶  $SU(1,1)$  相干态光场的要大得多。可见,上述研究的结果表明,在光子数概率分布,光子的聚束与反聚束特性,以及光场相位涨落特性等方面,奇、偶  $SU(1,1)$  相干态光场表现出迥然不同的量子统计特性。

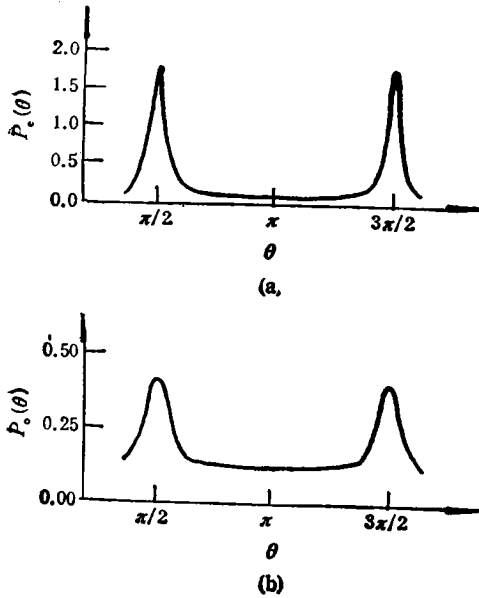


图2 相位概率分布  $P_e(\theta)$  和  $P_o(\theta)$

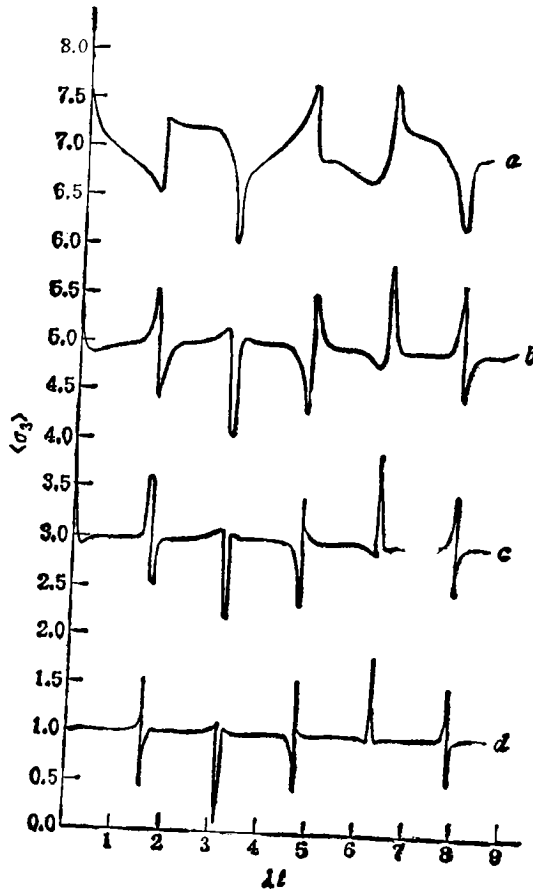


图3 粒子数反转  $\langle \sigma_3 \rangle_e$  和  $\langle \sigma_3 \rangle_o$  随时间的演化  
 a 为  $\langle \sigma_3 \rangle_e + 7, \bar{n} = 10$ ; b 为  $\langle \sigma_3 \rangle_e + 5, \bar{n} = 4$ ;  
 c 为  $\langle \sigma_3 \rangle_o + 3, \bar{n} = 10$ ; d 为  $\langle \sigma_3 \rangle_o + 1, \bar{n} = 20$

### 3 双光子 J-C 模型中,光场初始处于 $SU(1,1)$ 相干态时原子的动力学行为

我们知道,双光子 J-C 模型的哈密顿量在共振情形下可以表为<sup>[12-14]</sup>

$$H = H_0 + H_1, \quad (22)$$

$$H_0 = \hbar\omega_0(\sigma_3 + a^\dagger a), \quad (23)$$

$$H_1 = \hbar\lambda(\sigma_+ a^2 + \sigma_- a^{\dagger 2}), \quad (24)$$

演化算符

$$U_1(t, 0) = \exp(-iH_1 t/\hbar). \quad (25)$$

设  $t = 0$  时原子处在激发态,原子-光场耦合体系的密度矩阵为

$$\begin{aligned} \rho(t) &= U_1(t, 0) \begin{bmatrix} \rho_f(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_1^\dagger(t, 0) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\sqrt{\nu}\lambda t \rho_f(0) \cos\sqrt{\nu}\lambda t & i \cos\sqrt{\nu}\lambda t \rho_f(0) a^2 \frac{\sin\sqrt{\nu'}\lambda t}{\sqrt{\nu'}} \\ -i \frac{\sin\sqrt{\nu'}\lambda t}{\sqrt{\nu'}} a^{\dagger 2} \rho_f(0) \cos\sqrt{\nu}\lambda t & \frac{\sin\sqrt{\nu'}\lambda t}{\sqrt{\nu'}} a^{\dagger 2} \rho_f(0) a^2 \frac{\sin\sqrt{\nu'}\lambda t}{\sqrt{\nu'}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho_{22} & \rho_{21} \\ \rho_{11} & \rho_{11} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

式中  $\nu = a^2 a^{\dagger 2}$ ,  $\nu' = a^{\dagger 2} a^2$ . 为了计算粒子数反转,只要知道原子的约化密度矩阵的矩阵元  $\rho_{22}^a$  和  $\rho_{11}^a$ . 由(26)式可求得

$$\begin{aligned} \rho_{22}^a &= \text{Tr}_f \rho_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho_{22} | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho_f(0) | n \rangle \cos^2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \lambda t, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\rho_{11}^a = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho_f(0) | n \rangle \sin^2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \lambda t, \quad (28)$$

粒子数反转

$$\langle \sigma_3 \rangle = \rho_{22}^a - \rho_{11}^a = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho_f(0) | n \rangle \cos^2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \lambda t. \quad (29)$$

现在考虑光场初态为  $SU(1,1)$  相干态  $|\xi, \kappa\rangle$  的情况,即设  $\rho_f(0) = |\xi, \kappa\rangle\langle\xi, \kappa|$ , 将  $\rho_f(0)$  代入(29)式,即得

$$\langle \sigma_3 \rangle_e = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}^e \cos^2 \sqrt{(2n+1)(2n+2)} \lambda t, \quad (30a)$$

$$\langle \sigma_3 \rangle_o = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}^o \cos^2 \sqrt{(2n+2)(2n+3)} \lambda t. \quad (30b)$$

上述结果可以通过数值解展现出来. 图3表明,对于不同的初始平均光子数,  $\langle \sigma_3 \rangle_e$  总是

作无规振荡(见图 3 中 a),  $\langle \sigma_3 \rangle$  的情况则不同(见图 3 中 b, c, d). 当  $\bar{n}$  较小时, 它是作无规振荡, 但是随着  $\bar{n}$  增大, 逐渐呈现出规则的振荡及脉冲现象.  $\bar{n}$  越大, 脉冲的宽度越窄. 与我们早先关于普通相干态双光子 J-C 模型的结果(见文献[12])比较可知, 文献[12]中出现周期性回复现象的  $\lambda t = \pi, 2\pi$  等处, 现在交替出现负的或正的脉冲, 而在文献[12]中处于崩溃的  $\lambda t = \pi/2, 3\pi/2$  等处, 现在出现了仅有一次的振荡. 另外, 还要指出, 这里的结果与初始光场为压缩相干态时所得到的结果<sup>[15]</sup>在 Rabi 振荡的回复周期、振荡次数等方面也存在着显著的差异. 产生上述差异的原因在于  $SU(1,1)$  相干态光场与普通相干态和压缩相干态光场具有不同的量子统计特性. 当初始平均光子数较小时, 奇、偶  $SU(1,1)$  相干态光场的光子数分布皆类似于热光场的光子数分布, 而我们知道, 初态热光场不会导致 J-C 模型中的崩溃-回复效应, 故而有图 3 中 a, b 的结果. 当  $\bar{n}$  较大时, 奇  $SU(1,1)$  相干态的光子数变得类似于亚泊松分布[图 1(e)(f)], 因此我们期待着会出现规则的崩溃-回复现象. 但是由于奇的  $SU(1,1)$  相干态光场的统计特征与普通相干态和压缩相干态光场不同, 所以它并不展现通常的崩溃-回复现象, 而是展现出周期振荡与脉冲行为. 由于在态  $|\xi\rangle$  的展开式(6b)中不含光子数为偶数的数态, 因而减弱了原子与光场的耦合, 使崩溃-回复效应中在回复阶段的振荡次数减少, 甚至退化为仅含单向的脉冲.

#### 4 结 语

我们的研究表明, 两种不同宇称的  $SU(1,1)$  相干态光场具有迥然不同的量子统计特性. 偶  $SU(1,1)$  相干态光场的光子数概率分布近于热光场, 位相概率分布函数呈尖锐的双峰结构, 光子总是聚束的; 而奇  $SU(1,1)$  相干态光场的光子数概率分布与热光场相比有很大的偏离, 当平均光子数  $\bar{n}$  较大时, 近于亚泊松分布, 位相概率分布函数的峰值比前者低得多, 当  $\bar{n} < 1.84$  时出现光子反聚束. 我们的结果还表明, 在双光子 J-C 模型中, 当初始光场处于奇的  $SU(1,1)$  相干态时, 原子的粒子数反转会出现与通常的崩溃-回复效应不同的周期性振荡和脉冲现象.

- [1] A. M. Perelomov, *Commun. Math. Phys.*, **26**(1972), 222.
- [2] K. Wódkiewicz and J. H. Eberly, *J. Am. Opt. Soc.*, **B2**(1985), 458.
- [3] C. C. Gerry, *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 2146; C. C. Gerry, *Phys. Rev.*, **A37**(1988), 2683.
- [4] C. C. Gerry and E. R. Vrscaj, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 5717.
- [5] V. Bužek, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 3196.
- [6] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Application* (Berlin 1985).
- [7] C. C. Gerry, R. Grobe and E. R. Vrscaj, *Phys. Rev.*, **A43**(1991), 361.
- [8] L. Gilles and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.*, **39**(1992), 1411.
- [9] C. C. Gerry and R. F. Welch, *J. Am. Opt. Soc.*, **B9**(1992), 294.
- [10] M. S. Kim, F. A. M. de Oliveira and P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A40** (1989), 2494.
- [11] D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 1665.
- [12] 彭金生、李高翔, *物理学报*, **40**(1991), 1042.
- [13] 彭金生、黄湘友, *光学学报*, **8**(1988), 756.
- [14] 周 鹏、彭金生, *物理学报*, **38**(1989), 2044.
- [15] 罗耕贤、郭光灿, *光学学报*, **10**(1990), 1.

STATISTICAL PROPERTIES OF  $SU(1,1)$  COHERENT  
STATES OF LIGHT AND ITS INFLUENCE  
ON DYNAMICAL BEHAVIORS  
OF THE ATOM

LU HONG PENG JIN-SHENG

(*State Key Laboratory of Laser Technology, Wuhan 430074; Department  
of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070*)

(Received 8 November 1993)

ABSTRACT

In this paper, we study the properties of two kinds of  $SU(1,1)$  coherent states of light with Bargman index  $k = 1/4$  and  $k = 3/4$  and show that they possess different quantum statistical properties. The atomic dynamical behavior in a two-photon Jaynes-Cummings model with initial  $SU(1,1)$  coherent state field are discussed. We show that the time evolution of atomic inversion displays peculiar periodic oscillation and pulse which are very different from coherent states of light.

**PACC:** 4250; 3280