

轴对称非均匀弹性介质中 引力波对声子的作用效应

李 芳 昱

(重庆大学物理系, 重庆 630044)

罗 俊

(华中理工大学引力实验中心, 武汉 430074)

唐 孟 希

(中山大学物理系, 广州 510275)

(1992年6月19日收到)

采用 Serebryany 的复空间中的复坐标法, 讨论了轴对称非均匀弹性介质中引力波对声子的作用效应, 并给出了由引力波产生的激发力的表达式和相应的声子解。解的形式表明, 平行于对称轴方向传播的引力波只对声子场的径向分量、切向分量产生扰动, 垂直于对称轴方向传播的引力波则对声子场的径向分量、切向分量和轴向分量均产生扰动, 扰动强度取决于切变模量径向分布函数的具体形式和引力波的振幅。此外, 本文还将所得结果与含有螺旋位错的拓扑声子空间中引力波的扰动效应作了比较。

PACC: 0430; 0440; 0480

1 引 言

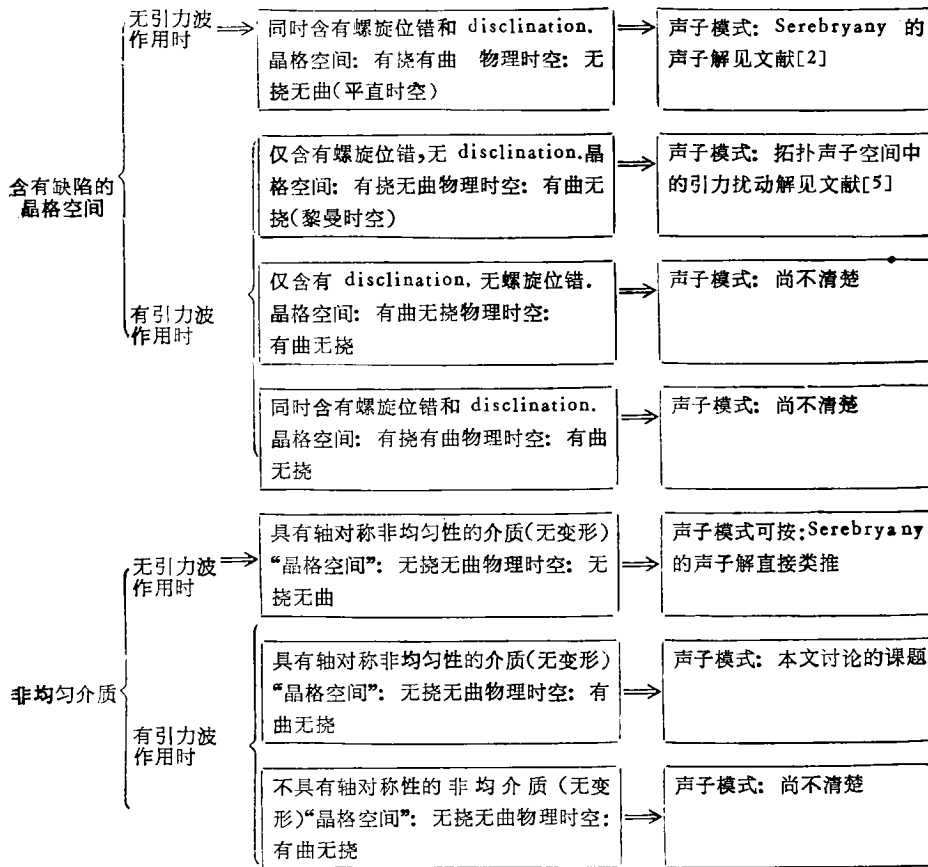
在近期的一些工作中, Serebryany 用复空间中的复坐标法^[1,2], 研究了在含有螺旋位错和 disclination 的晶格空间中的一种新型的声子模式。这一工作是基于 1988 年 Bird 等关于证实电子和位错间存在相互作用拓扑机制实验报道^[3]的启发, 而将其引伸到声子与位错和 disclination 间相互作用拓扑机制的理论分析的。我们采用 Serebryany 的复坐标法, 又进一步讨论了具有轴向非均匀的介质中(平凡声子空间)^[4]和含有直螺旋位错的晶体中(拓扑声子空间)^[5]在引力波作用下的声子模式。我们发现, 上述两种情况均有可能增大引力波和介质的耦合强度, 这一结果和 Dyson 方程所得到的结论^[6]是自洽的。Dyson 方程是基于广义相对论和经典弹性理论的作用量原理导出的。它表明: 在一个完全均匀和各向同性的介质内部, 引力波和介质的耦合为零, 即引力波只在切变模量的非均匀处和实变区域(如界面等)发生耦合, 这是通常弹性体对引力波能量吸截面极其微小的原因之一。也许因为非均匀介质为求解 Dyson 方程所带来的困难和复杂性, 文献[6]仅仅讨论了把地球作为一个均匀的和各向同性的介质球体, 而由引力波作用引起的声学振荡模式。Esposito 将 Dyson 结果推广到匀速运动的流体介质的情况^[7,8], 也得到了类似

的结果。Carter 则将弹性介质的非线性效应考虑在内,讨论了在引力波作用下的声学振荡模式^[9]。

事实上,像螺旋位错这类缺陷的出现,只是晶体均匀性的局部破坏。另外,由于扭曲、变形或杂质的某种分布,均可造成介质均匀性的破坏。而如果这种非均匀性既不像螺旋位错那样仅仅定域在局部区域,同时又具有某种对称性(如本文的轴对称性),这同样可能进一步增大引力波与介质的耦合强度。我们发现,对于具有轴对称性的非均匀弹性介质,Serebryany 的复坐标法为求解相应的声子解仍然是行之有效的。

2 声子方程

为避免混淆,这里将镶嵌在晶格点阵或介质原子实网点上的坐标系统称为“晶格空间坐标系”,以区分建立在真实四维物理时空中的坐标系。关于引力波在通常介质中引起的声学振荡模式,可参见文献[6—9],这里仅讨论声子模式。目前有关方面的工作可直观地用下面的方框图表示



由上面方框图可见,引力波在含有缺陷的晶格空间中对声子的作用效应,一是有曲无挠的晶格空间(只含有 disclination 而无螺旋位错)和有挠有曲的晶格空间(同时含有螺

旋位错和 disclination) 中的声子模式尚不清楚, 值得作进一步的研究。另一类是在通常非均匀介质中引起的声子模式。之所以考虑轴对称的情况, 一方面是因为现今的棒状弹性体的引力波探测装置通常是轴对称的, 另一方面是因为它和文献[5](即只含有直螺旋位错的晶格空间)的对称性有不少类似之处, 故方法上可以借用, 但也有重要差别, 因而声子解的形式既有类似之处, 也有明显的差别。与文献[5]中由于扭曲而产生的螺旋位错(挠率的存在)的情况不同, 这里并无介质的变形, 因而这里的“晶格空间坐标系”和物理空间坐标系可以选择得完全重合, 即 Serebryany 的复微分算符和普通微分算符可以完全等价, 故可直接代换, 所以实际的计算程序还要简便些。而使用前者纯粹是为了将声子场变换到形式上的复空间中去, 从而便于求解声子方程。文献[5]已经给出了复空间的基矢、复微分算符和普通空间相应量的关系, 但为了叙述方便, 这里再简列如下。复空间中的复基矢定义为

$$\mathbf{e}_{\pm} = \mathbf{e}_r \pm i\mathbf{e}_\varphi \quad (1)$$

其中 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ 为物理空间中柱坐标系的基矢, 故声子场 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 一般可表示为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_z u^z + \mathbf{e}_+ u^+ + \mathbf{e}_- u^- = \mathbf{e}_z u^z + \mathbf{e}_r u^r + \mathbf{e}_\varphi u^\varphi \quad (2)$$

由(1),(2)两式有

$$u^r = u^+ + u^-, u^\varphi = -i(u^+ - u^-), \quad (3)$$

$$u^+ = \frac{1}{2}(u^r - iu^\varphi), u^- = \frac{1}{2}(u^r + iu^\varphi), \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_+ = \mathbf{e}_- \cdot \mathbf{e}_- = 0, \mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_- = \mathbf{e}_- \cdot \mathbf{e}_+ = 2. \quad (5)$$

在 Serebryany 复空间中的复微分算符为^[2]

$$\nabla = \mathbf{e}_z \partial_z + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_+ \partial_- + \mathbf{e}_- \partial_+) \quad (6)$$

其中

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial r} \pm i \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - L \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{(对标量的作用)} \quad (7)$$

$$\partial_+ \mathbf{e}_{\pm} = \pm \frac{H}{r} \mathbf{e}_{\pm}, \partial_- \mathbf{e}_{\pm} = \mp \frac{H}{r} \mathbf{e}_{\pm} \text{(对基矢的作用)} \quad (8)$$

L 和 H 分别代表螺旋位错和 disclination 的贡献, 且 $L = \frac{b}{2\pi}$, b 是螺旋位错的 Burgers 矢量。

对于同时存在螺旋位错和 disclination 的晶格空间, 有 $L \neq 0, H \neq 1$ 。而对于本文既无螺旋位错又无 disclination 的情况, 则有 $L = 0, H = 1$, 于是(7),(8)两式退耦为

$$\partial_{\pm} = \frac{\partial}{\partial r} \pm i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{(对标量的作用)} \quad (9)$$

$$\partial_+ \mathbf{e}_{\pm} = \pm \frac{1}{r} \mathbf{e}_{\pm}, \partial_- \mathbf{e}_{\pm} = \mp \frac{1}{r} \mathbf{e}_{\pm} \text{(对基矢的作用)} \quad (10)$$

容易证明由(6),(9),(10)式定义微分算符和普通微分算符是完全等价的。由于这里的“晶格空间坐标系”可以和四维物理时空中的空间坐标系完全重合, 加之弱场条件下的平面引力波通常是用笛卡尔坐标表示的, 因而我们可以首先用作用量原理求出四维物理时

空中用笛卡尔坐标表示的声子方程,然后再将其变换到复空间中去。

在引力波场中声子体系的作用量为

$$S = \int d^3x dt \sqrt{g} (\mathcal{L}_{\text{pho}} + \mathcal{L}_{\text{int}}). \quad (11)$$

其中

$$\mathcal{L}_{\text{pho}} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}^i - \frac{\lambda}{2} (\nabla_i u^i)^2 - \frac{\mu}{2} [(\nabla_m u^k)(\nabla^m u_k) + (\nabla_k u^i)(\nabla_i u^k)], \quad (12)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mu h^i \nabla_i u^i. \quad (13)$$

分别为声子的拉氏密度和引力波与声子相互作用的拉氏密度。注意(12), (13)式中的 ∇ 算符即笛卡尔坐标系中的普通微分算符, h_i^j 为引力波场, ρ 为质量密度, $\lambda = \rho(V_L^2 - 2V_T^2)$, $\mu = \rho V_T^2$, V_L 和 V_T 为局域纵声速和局域横声速。对(11)式所示的作用量作变分,得声子方程:

$$\ddot{u}^i = V_T^2 [\nabla_i (\nabla^i u^i) + \nabla_i (\nabla^i u^i)] + (V_L^2 - 2V_T^2) \nabla^i (\nabla_k u^k) - f^i. \quad (14)$$

其中

$$f^i = \frac{\eta^{ik}}{\rho} \nabla_l (\mu h_k^l) = \frac{\eta^{ik}}{\rho} \left(\mu \nabla_l h_k^l + h_k^l \frac{\partial \mu}{\partial x^l} \right). \quad (15)$$

η^{ik} 为 Minkowski 度规。由于弱场条件下引力波 TT (Transverse Traceless) 规范的横向条件,故有 $\nabla_l h_k^l = \frac{\partial}{\partial x^l} h_k^l = 0$, 这是与有挠无曲晶格空间^[4]的一个重要区别。但由于

这里的轴对称非均匀性,一般 $\frac{\partial \mu}{\partial x^l} \neq 0$, 即切变模量的非均匀性导致了非零激发力的存在。

由(15)式以及(4)式类推,可得激发力在复空间中的复分量为

$$f^* = \frac{1}{\rho} \eta^{ik} h_k^l \frac{\partial \mu}{\partial x^l}$$

$$f^\pm = \frac{1}{2} (f^r \mp i f^\varphi) = \frac{1}{2} [f^1 \cos \varphi + f^2 \sin \varphi \mp i(-f^1 \sin \varphi + f^2 \cos \varphi)] \quad (16)$$

其中

$$f^1 = f^* = \frac{1}{\rho} \eta^{ik} h_k^l \frac{\partial \mu}{\partial x^l}, f^2 = f^\gamma = \frac{1}{\rho} \eta^{2k} h_k^l \frac{\partial \mu}{\partial x^l}$$

显然,只要知道了切变模量对坐标 x^l 的函数关系,则可求出激发力在复坐标系中的具体形式。方程(14)中的算符 ∇ 可按(6),(9),(10)式变回到复坐标系中去,声子场 u^i 等则可由(4)式直接变换到复坐标系。对于轴对称非均匀介质的情况,应有 $\mu = \mu(r)$ 。

3 声子解

本文考察一种简化的轴对称非均匀分布模型,即 $\mu = \frac{\mu_0}{\gamma} (\gamma_1 \leq r \leq \gamma_2, \mu_0$ 为常数)。

考察这一简化模型是基于两个原因:(1)在满足典型的轴对称非均匀性的同时,可突出物

理图象和简化运算。而对于其它类型的轴对称非均匀性,按照本文程序可作类推。(2)这是一个中空(即小于 r_1 的区域)的圆柱形介质模型,它是基于 Rudenko 等最近提出的一种新型的引力波探测模型的设想和模拟实验¹⁾的启发,即把一个光学的法布里-珀罗(Fabry-Perot)干涉仪放在一个“挖空”的韦伯棒中,这种实验室尺度下的探测装置可望同时吸收光学相干和韦伯棒两方面的优点。我们发现,在上述模型框架中,在复坐标系中的方程(14)恰好可分解成关于声子场 u^s, u^+, u^- 的三个独立的贝塞耳方程,再加上各自对应的由引力波产生的激发力的小的扰动项,故可按级数法求解。

下面我们给出沿两个特殊方向传播的引力波作用下的声子模式。

3.1 沿对称轴 z 方向传播的引力波的作用效应

由引力波的 TT 规范,其非零分量为

$$h_1^1 = -h_2^2, h_3^3 = h_4^4, h_5^5 = a_1^i \exp(ik^i x_i) = a_1^i \exp[i(kz - \omega t)]. \quad (17)$$

其中 k 和 ω 为引力波的波矢和频率。将(16),(17)式代入方程(14),并利用(6),(9),(10)式,我们对方程(14)求得如下声子解:

当 $n =$ 奇数时

$$u^s(x, t) = [A_1 J_n(pr) + B_1 N_n(pr)] \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)], \quad (18)$$

$$u^+(x, t) = [A_2 J_{n-1}(pr) + B_2 N_{n-1}(pr)] \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)]$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \{(-1)^{m+1} \pi (h_1^1 \cos 2\varphi + h_2^2 \sin 2\varphi) (pr)^{2m+1} \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)]\} /$$

$$\left\{ 2^{2m+3} p \cdot \cos \left[\frac{1}{2}(n-1)\pi \right] \cdot \Gamma \left[m + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{3}{2} \right] \right.$$

$$\left. \cdot \Gamma \left[m - \frac{1}{2}(n-1) + \frac{3}{2} \right] \right\}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{m+1} \pi (h_1^1 \sin 2\varphi - h_2^2 \cos 2\varphi) (pr)^{2m+1} \cdot \exp \left[i(n\varphi + kz \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\pi}{2} - \omega t) \right] \right\} / \left\{ 2^{2m+3} p \cdot \cos \left[\frac{1}{2}(n-1)\pi \right] \cdot \Gamma \left[m + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{3}{2} \right] \right.$$

$$\left. \cdot \Gamma \left[m - \frac{1}{2}(n-1) + \frac{3}{2} \right] \right\} \quad (19)$$

$$u^-(x, t) = [A_3 J_{n+1}(pr) + B_3 N_{n+1}(pr)] \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)]$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \{(-1)^{m+1} \pi (h_1^1 \cos 2\varphi + h_2^2 \sin 2\varphi) (pr)^{2m+1} \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)]\} /$$

$$\left\{ 2^{2m+3} \cdot p \cdot \cos \left[\frac{1}{2}(n+1)\pi \right] \cdot \Gamma \left[m + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{2} \right] \right.$$

$$\left. \cdot \Gamma \left[m - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{2} \right] \right\}$$

1) V.N. Rudenko, A.V. Gusev, *et. al.*, 私人通信。

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{m+1} \pi (h_1^1 \sin 2\varphi - h_2^1 \cos 2\varphi) (pr)^{2m+1} \cdot \exp \left[i \left(n\varphi + kz \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right] \right\} / \left\{ 2^{2m+3} \cdot p \cdot \cos \left[\frac{1}{2} (n+1) \pi \right] \cdot \Gamma \left[m + \frac{1}{2} (n+1) + \frac{3}{2} \right] \right. \\
& \left. \cdot \Gamma \left[m - \frac{1}{2} (n+1) + \frac{3}{2} \right] \right\} \quad (20)
\end{aligned}$$

当 $n =$ 偶数时(但不为零),

$$u^+(x, t) = [A_4 J_n(pr) + B_4 N_n(pr)] \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)], \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
u^+(x, t) &= [A_5 J_{n-1}(pr) + B_5 N_{n-1}(pr)] \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \\
&- \frac{1}{2p} (h_1^1 \cos 2\varphi + h_2^1 \sin 2\varphi) \cdot F^+(pr) \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \\
&- \frac{1}{2p} (h_1^1 \sin 2\varphi - h_2^1 \cos 2\varphi) \cdot F^+(pr) \cdot \exp \left[i \left(n\varphi + kz + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right], \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^-(x, t) &= [A_6 J_{n+1}(pr) + B_6 N_{n+1}(pr)] \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \\
&- \frac{1}{2p} (h_1^1 \cos 2\varphi + h_2^1 \sin 2\varphi) \cdot F^-(pr) \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \\
&- \frac{1}{2p} (h_1^1 \sin 2\varphi - h_2^1 \cos 2\varphi) \cdot F^-(pr) \cdot \exp \left[i \left(n\varphi + kz + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right]. \quad (23)
\end{aligned}$$

这里 J_n, N_n 等分别为贝塞耳函数和诺埃曼函数, $F^\pm(pr)$ 为

$$\begin{aligned}
F^+ &= \frac{1}{pr} + \frac{1}{(pr)^3} [(n-1)^2 - 1] + \frac{1}{(pr)^5} [(n-1)^2 - 1][(n-1)^2 - 3^2] \\
&+ \dots + \frac{2^{n-2} \Gamma(n-1)}{(pr)^{n-1}}. \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^- &= \frac{1}{pr} + \frac{1}{(pr)^3} [(n+1)^2 - 1] + \frac{1}{(pr)^5} [(n+1)^2 - 1][(n+1)^2 - 3^2] \\
&+ \dots + \frac{2^n \Gamma(n+1)}{(pr)^{n+1}}. \quad (25)
\end{aligned}$$

p 满足和文献[2]相同的色散关系: $p^2 = p_L^2 = \frac{\omega^2}{V_L^2} - k^2 \approx \frac{\omega^2}{V_T^2} - k^2 = p_T^2$, k 为声子场的波矢量.

3.2 沿垂直于对称轴方向传播的引力波的作用效应

这时引力波的非零分量为

$$h_2^2 = -h_3^2, h_3^1 = h_2^3, h_1^1 = a_1^1 \exp(i k^\mu x_\mu) = a_1^1 \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (26)$$

用同样的方法,对方程(14)求得如下声子解:

当 $n =$ 偶数时(不为零),

$$\begin{aligned}
u^+(x, t) &= [A_7 J_n(pr) + B_7 N_n(pr)] \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{m+1} \pi h_3^2 \sin \varphi \cdot (pr)^{2m+1} \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \right\} /
\end{aligned}$$

$$\left\{ 2^{2m+3} \cdot p \cdot \cos \frac{n}{2} \pi \cdot \Gamma \left[m + \frac{n}{2} + \frac{3}{2} \right] \right. \\ \left. \cdot \Gamma \left[m - \frac{n}{2} + \frac{3}{2} \right] \right\}. \quad (27)$$

$$u^+(x, t) = [A_8 J_{n-1}(pr) + B_8 N_{n-1}(pr)] \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \\ + \frac{1}{2p} h_3^2 \sin^2 \varphi \cdot F^+(pr) \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \\ - \frac{1}{4p} h_3^2 \sin 2\varphi \cdot F^+(pr) \cdot \exp \left[i \left(n\varphi + kz + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right], \quad (28)$$

$$u^-(x, t) = [A_9 J_{n+1}(pr) + B_9 N_{n+1}(pr)] \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \\ + \frac{1}{2p} h_3^2 \sin^2 \varphi \cdot F^-(pr) \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \\ + \frac{1}{4p} h_3^2 \sin 2\varphi \cdot F^-(pr) \cdot \exp \left[i \left(n\varphi + kz + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right]. \quad (29)$$

当 $n =$ 奇数时,

$$u^s(x, t) = [A_{10} J_n(pr) + B_{10} N_n(pr)] \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \\ - \frac{1}{p} h_3^2 \sin \varphi \cdot F^s(pr) \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)]. \quad (30)$$

其中

$$F^s(pr) = \frac{1}{pr} + \frac{1}{(pr)^3} (n^2 - 1) + \frac{1}{(pr)^5} (n^2 - 1)(n^2 - 3^2) \\ + \dots + \frac{2^{n-1} \Gamma(n)}{(pr)^n}. \quad (31)$$

$$u^+(x, t) = [A_{11} J_{n-1}(pr) + B_{11} N_{n-1}(pr)] \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^m \pi h_3^2 \sin^2 \varphi \cdot (pr)^{2m+1} \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)] \right\} / \\ \left\{ 2^{2m+3} p \cdot \cos \left[\frac{1}{2}(n-1)\pi \right] \cdot \Gamma \left[m + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{3}{2} \right] \right. \\ \left. \Gamma \left[m - \frac{1}{2}(n-1) + \frac{3}{2} \right] \right\} \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^m \pi h_3^2 \sin 2\varphi \cdot (pr)^{2m+1} \cdot \exp \left[i \left(n\varphi + kz + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right] \right\} / \\ \left\{ 2^{2m+4} \cdot p \cdot \cos \left[\frac{1}{2}(n-1)\pi \right] \cdot \Gamma \left[m + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{3}{2} \right] \right. \\ \left. \cdot \Gamma \left[m - \frac{1}{2}(n-1) + \frac{3}{2} \right] \right\}. \quad (32)$$

$$u^-(x, t) = [A_{12} J_{n+1}(pr) + B_{12} N_{n+1}(pr)] \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{\infty} \{(-1)^m \pi h_3^2 \sin^2 \varphi \cdot (pr)^{2m+1} \cdot \exp[i(n\varphi + kz - \omega t)]\} / \\
& \quad \left\{ 2^{2m+3} \cdot p \cdot \cos \left[\frac{1}{2}(n+1)\pi \right] \cdot \Gamma \left[m + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. \cdot \Gamma \left[m - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{2} \right] \right\} \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^m \pi h_3^2 \cdot \sin 2\varphi \cdot (pr)^{2m+1} \cdot \exp \left[i \left(n\varphi + kz + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right] \right\} / \\
& \quad \left\{ 2^{2m+4} \cdot p \cdot \cos \left[\frac{1}{2}(n+1)\pi \right] \cdot \Gamma \left[m + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. \cdot \Gamma \left[m - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{2} \right] \right\}. \tag{33}
\end{aligned}$$

将以上各声子解代入(3)式,即可得物理空间中用柱坐标系表示的声子场的各分量.其中 $A_1, A_2, \dots, A_{12}; B_1, B_2, \dots, B_{12}$ 为积分常数,它们由具体的边界条件所确定.

综上所述,可以看出平面引力波在具有圆柱形空腔的轴对称非均匀介质中对声子的作用效应具有以下主要特征:

1) 由于引力波产生的激发力的大小除了与引力波的振幅有关外,还取决于切变模量径向分布函数的具体形式,因而切变模量的形式是引力波和介质耦合强度的重要参量.另外,由于这种声子模式定域在 $r_1 \leq r \leq r_2$ 的空间范围,因而各声子解族中均无奇异声子模式,解的形式是合理的.

2) 与文献[5]只含直螺旋位错的情况不同(在那里,沿垂直于直螺旋位错线方向——即垂直于该处对称轴方向传播的引力波对声子场无扰动效应),这里沿对称轴方向和垂直于该方向传播的引力波对声子场均有扰动效应,前者将对声子场的径向分量、切向分量产生扰动,后者则对声子场的径向分量、切向分量和轴向分量均产生扰动.

3) 沿垂直于对称轴方向传播的引力波的十型极化分量和X型极化分量对声子场扰动形式有着不同的物理行为,前者只对声子场的径向分量和切向分量有扰动效应,后者则只对声子场的轴向分量有扰动效应.

4) 由于这里介质的非均匀性不像螺旋位错那样只分布在局部区域,因而由引力波对声子所产生的非零激发力也是定域在整个介质中的.在仅有螺旋位错的情况,上述激发力则随离开螺旋位错线距离的增大而迅速减小.因此这一结果可能为增大引力波和介质的耦合强度提供新的论点和依据.

本文的声子模式在对称轴方向(z 方向)是无界的,进一步考察该方向上的有界约束以及在普遍形式的轴对称非均匀性的条件下的声子模式显然是一个很有意义的工作,有关这方面的研究正在进行之中.

感谢莫斯科大学 V.N. Rudenko 教授、D.V. Galtsov 教授的多次讨论和有益的建议.

- [1] E.M. Serebryany, *Theoretical and Mathematical Physics*, **83**(1990), 428 (in Russian).
- [2] E.M. Serebryany, *Theoretical and Mathematical Physics*, **86**(1991), 81 (in Russian)
- [3] D.M. Bird *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 2863.
- [4] Li Fang-yu *et. al.*, *Journal of Moscow University*, **T34**(1993), 41. (in Russian).
- [5] 李芳昱、罗俊、唐孟希, *中国科学 (A 辑)*, **23**(1993), 1178.
- [6] F.J. Dyson, *Astrophysical Journal*, **156**(1969), 529.
- [7] F.P. Esposito, *Astrophysical Journal*, **165** (1970), 165.
- [8] F.P. Esposito, *Astrophysical Journal*, **168** (1971), 495.
- [9] B. Carter, H. Quintana, *Phys. Rev.* **D16**(1977), 2928.

EFFECT OF GRAVITATIONAL WAVES ON PHONON IN AXISYMMETRIC NON-UNIFORM ELASTIC MEDIUM

LI FANG-YU

(Department of Physics, Chongqing University, Chongqing 630044)

LUO JUN

(Center for Gravitational Experiment, Huazhong University of
Science and Technology, Wahan 430074)

TANG MENG-XI

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

(Received 19 June 1992)

ABSTRACT

The effect of gravitational waves (GW) on phonon in axisymmetric non-uniform elastic medium is analysed by means of the complex coordinate in Serebryany's complex space. and expression of diving force produced by the GW and corresponding phonon solitons are given. In our solution forms, they are shown that the GW propagating along symmetric axial direction generates only perturbation to radial and tangential components of the phonon fields, while the GW propagating along direction perpendicular to the symmetric axis generates perturbation to all components of the phonon fields. i.e., radial, tangential and axial components. The strength of perturbation depends on concrete form of radial distribution function of shear modulus and the GW's amplitude. Moreover, above results are compared with the GW's perturbing effect in topological phonon space with the spiral dislocation.

PACC: 0430; 0440; 0480