自由电子激光器中电子与波的相互作用及其增益分析

赵 东 焕

(中国科学院上海光学精密机械研究所，上海 201800)

(1993 年 10 月 4 日收到)

分析了自由电子激光器中电子与波的相互作用过程，导出了相应的增益表达式. 结果表明，它不仅能很好地反映自由电子激光器中相干辐射，而且表明了具有激光输出饱和特性. 分析结果更加符合实验情况.

PACC: 4255T; 7820J

1 引 言

自 1976 年第一台自由电子激光器运转以来[1]，这门当代激光与相对论电子学密切相关的新兴学科，在理论和实验中都获得了很大发展.

自由电子激光理论大致可分为量子和经典理论两大类，量子理论包括半量子半经典理论都为早期成果[2-4]，而近期发展较快的大都是经典理论[5-12]，这是因为经典理论可得出与实验比较符合的结果.

就自由电子激光增益而言，自第一台激光器问世以来，早就有许多学者对它进行了研究[1,5-7]，但其中较为令人满意的是 Colson 用单粒子轨道经典理论推导的增益，它可表示为[7]

$$G(t) = \mathscr{A}\left(1 - \cos\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta\omega t \sin\Delta\omega t\right). \tag{1}$$

由于这个增益公式不仅能较好地说明自由电子激光相干辐射，而且计算也较方便，因而曾被其他学者用来导出一些研究成果[13]. 但是随着这门学科的深入发展，人们发现(1)式与实验中遇到的激光输出饱和现象相悖，因为(1)式表明增益极大值 G_{max} 是随 $\Delta\omega t$ 增加而增大，然而实验表明自由电子激光相干辐射时间是有限的，电子与波的相互作用，其结果并不总是随相互作用距离增大使辐射能增加，而是达到一定程度后走向反面. 由于(1)式与自由电子激光小信号输出相符，所以一些学者称(1)式为自由电子激光小信号增益公式，并试图用于大信号情况下的增益研究[14]，但至今未得到较满意的结果.

作者认为(1)式之所以不能很好地反映自由电子激光饱和输出现象，原因在于(1)式的解析推导过程中忽略了高阶项的缘故，这就相当于忽略了高阶辐射波与电子相互作用的影响. 本文在考虑了电子与波多次相互作用情况下，导出了自由电子激光增益表达

式，其结果不仅能较好地反映出相干辐射，而且可很好地说明实验中遇到的激光输出饱和现象。

2 相互作用过程

为便于以下公式推导，有必要搞清楚电子与波互作用的全过程。电子与波相互作用总的而言是很复杂的。但大致可分三个阶段，第一阶段是相对论电子在 Wiggler 磁场驱动下产生自发辐射，与此同时相对论电子运动轨道发生变化；第二阶段自发辐射波与同步电子相互作用，使部分电子纵向群聚形成高密度相干辐射波，同时辐射场从同步电子中获取能量；第三阶段相干辐射波与少量同步电子相互作用使电子再次群聚，同时电子与波之间再次实现能量交换。第三阶段是一个多次相互作用过程，这个过程直到所有电子与辐射波不同步为止。电子与波之间能量交换有二种情况，一种是电子把能量传递给波，另一种是电子从波中吸收能量。这二种情况的发生完全取决于同步电子的相位条件[1,5]。以下根据这种相互作用过程来推导一些基本关系式。

3 基本关系式

设圆偏振 Wiggler 螺旋磁场和辐射场分别为

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{W}} = B_0(\hat{\boldsymbol{e}}_x \cos\xi_0 + \hat{\boldsymbol{e}}_y \sin\xi_0), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} = E_{\mathrm{r}}(\hat{\boldsymbol{e}}_x \cos\xi_{\mathrm{r}} - \hat{\boldsymbol{e}}_y \sin\xi_{\mathrm{r}}),$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{r}} = \frac{E_{\mathrm{r}}}{c}(\hat{\boldsymbol{e}}_x \sin\xi_{\mathrm{r}} + \hat{\boldsymbol{e}}_y \cos\xi_{\mathrm{r}}), \tag{3}$$

式中 B_0 为 Wiggler 磁场振幅，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}$ 和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{r}}$ 分别为辐射场电场和磁场，$\xi_0 = k_0 z + \varphi_0$，$k_0 = 2\pi/\lambda_0$，$\xi_{\mathrm{r}} = k_{\mathrm{r}} z - \omega_{\mathrm{r}} t + \varphi_{\mathrm{r}}$，$k_{\mathrm{r}} = 2\pi/\lambda_{\mathrm{r}}$，$\lambda_0$ 和 λ_{r} 分别为 Wiggler 场周期长度和辐射场波长，φ_0 和 φ_{r} 分别为相对应的初相位，ω_{r} 为辐射场圆频率。相对论电子洛仑兹力运动方程和能量方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nu \boldsymbol{v}) = -\frac{|e|}{m_0}[\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{v}x(\boldsymbol{B}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{W}})], \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nu = -\frac{|e|}{m_0 c^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}, \tag{5}$$

式中 ν 为相对论能量因子，m_0 和 e 分别为电子的静止质量和电荷，c 为真空中光速，$\boldsymbol{v}$ 为相对论电子运动速度。由(4)式得无微扰情况下笛卡儿坐标分量方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nu v_x) = \frac{|e|B_0}{m_0} v_z \sin\xi_0 - \frac{|e|E_{\mathrm{r}}}{m_0}\left(1 - \frac{v_z}{c}\right)\cos\xi_{\mathrm{r}},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nu v_y) = -\frac{|e|B_0}{m_0} v_z \cos\xi_0 + \frac{|e|E_{\mathrm{r}}}{m_0}\left(1 - \frac{v_z}{c}\right)\sin\xi_{\mathrm{r}},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nu v_z) = -\frac{|e|}{m_0}\left[v_x\left(B_0 \sin\xi_0 - \frac{E_{\mathrm{r}}}{c}\cos\xi_{\mathrm{r}}\right) - v_y\left(B_0 \cos\xi_0 + \frac{E_{\mathrm{r}}}{c}\sin\xi_{\mathrm{r}}\right)\right]. \tag{6}$$

由此得电子与波相互作用前电子横向运动速度

$$v_x = \frac{2\Omega_r c}{\omega_r}\sin\xi_{rs} - \frac{\Omega_0 c}{\omega_0}\cos\xi_{0s},$$

$$v_y = \frac{2\Omega_r c}{\omega_r}\cos\xi_{rs} - \frac{\Omega_0 c}{\omega_0}\sin\xi_{0s}, \tag{7}$$

式中

$$\Omega_r = \frac{|e|E_r}{\nu_s m_0 c}, \qquad \Omega_0 = \frac{|e|B_0}{\nu_s m_0},$$

$$\xi_{rs} = k_r z_s - \omega_r t + \varphi_r, \qquad \xi_{0s} = k_0 z_s + \varphi_0, \tag{8}$$

ν_s 为电子与波相互作用前相对论能量因子，z_s 为相应的电子纵向位置．由于同步电子与辐射波的相互作用，电子的能量和运动轨迹都将发生变化，即有

$$\nu = \nu_s + \delta\nu, \quad z = z_s + \delta z, \tag{9}$$

$\delta\nu$ 和 δz 为相互作用后电子能量变量和电子群聚后纵向位置漂移量，由(3)和(7)式得相互作用后辐射电场和电子横向速度分别为

$$\boldsymbol{E}_r \approx E_r[\hat{\boldsymbol{e}}_x(\cos\xi_{rs} - k_r\delta z\sin\xi_{rs}) - \hat{\boldsymbol{e}}_y(\sin\xi_{rs} + k_r\delta z\cos\xi_{rs})], \tag{10}$$

$$v_x \approx \frac{2\Omega_r c}{\omega_r}(\sin\xi_{rs} + k_r\delta z\cos\xi_{rs}) - \frac{\Omega_0 c}{\omega_0}(\cos\xi_{0s} - k_0\delta z\sin\xi_{0s}),$$

$$v_y \approx \frac{2\Omega_r c}{\omega_r}(\cos\xi_{rs} - k_r\delta z\sin\xi_{rs}) - \frac{\Omega_0 c}{\omega_0}(\sin\xi_{0s} + k_0\delta z\cos\xi_{0s}). \tag{11}$$

把(10)和(11)式代入(5)式并忽略 $(\delta z)^2$ 项高级小量得

$$\delta\nu = \delta\nu_0 + \delta\nu_1,$$

$$\frac{d}{dt}\delta\nu_0 = H\cos(\Delta\omega t + \theta),$$

$$\frac{d}{dt}\delta\nu_1 = -D\sin(\Delta\omega t + \theta)\delta z, \tag{12}$$

式中

$$H = \frac{\Omega_0\Omega_r\nu_s}{\omega_0}, \qquad D = \frac{\Omega_0\Omega_r\nu_s}{\omega_0}(k_r + k_0),$$

$$\Delta\omega = (k_0 + k_r)v_{zs} - \omega_r, \quad \theta = (k_0 + k_r)z_s + \varphi_r, \tag{13}$$

v_{zs} 为相互作用前相对论电子纵向速度．由上节分析表明，电子与波的相互作用过程是由多次完成的，其中包括若干次相干辐射波与电子的相互作用，所以相互作用后电子漂移量和能量变量应为

$$\delta z = \sum_1^n \delta z_i, \qquad \delta\nu = \sum_0^n \delta\nu_j, \tag{14}$$

则(12)式应改写为[1)]

$$\frac{d}{dt}\delta\nu_0 = H\cos(\Delta\omega t + \theta),$$

---

1) 如果把 $\delta z = \sum_1^n \delta z_i$ 预先代入(9)式，则所得(10)和(11)式中 δz 改为 $\sum_1^n \delta z_i$．那样再把(10)和(11)式代入(5)式，计算后忽略 $\delta z_i\delta z_j$ 因子项的高阶小量，同样可得(15)式结果．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\nu_i = -D\sin(\Delta\omega t+\theta)\delta z_i \qquad (i=1,2,\cdots,n). \tag{15}$$

另一方面 δz_i 的形成是由前一次相干辐射波与电子相干的结果，每次相干辐射后电子相应的能量变量为 $\delta\nu_i$。则有 $\delta\nu_{i-1}\to\delta z_i$，“$\to$”称为诱导形成。根据能量因子 ν 的定义可得下列关系式：

$$\delta\nu_i \approx \frac{c}{\nu_s^3}\delta\nu_{i-1} \qquad (i=1,2,\cdots,n), \tag{16}$$

式中 $\delta\nu_i$ 为第 i 次相干辐射对应的电子速度变量，当 $i=1$ 时近似式(16)右端 $\delta\nu_0$ 为第一次相干辐射之前相应的能量变量，它实际上是 Wiggler 场驱动电子时自发辐射后电子的能量变量。由于实际激光器中 $v_\perp \ll v_z \approx v$。则有

$$\delta z_i \approx \frac{c}{\nu_s^3}\int\delta\nu_{i-1}\mathrm{d}t \qquad (i=1,2,\cdots,n). \tag{17}$$

由此可得各阶能量变量的一个递推关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\nu_i = -\frac{cD}{\nu_s^3}\sin(\Delta\omega t+\theta)\int\delta\nu_{i-1}\mathrm{d}t \qquad (i=1,2,\cdots,n). \tag{18}$$

4 增益及其分析

自由电子激光增益可表示为[7]

$$G(t) = -m_0c^2 4\pi\rho_e V\langle\delta\nu\rangle_\varphi / E_0^2 V, \tag{19}$$

式中 ρ_e 为电子束密度，V 为相互作用区体积，E_0^2V 为辐射场初始能量，$\langle\delta\nu\rangle_\varphi$ 为能量变量相对于电子初相位 φ 的平均值，即

$$\langle\delta\nu\rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta\nu\mathrm{d}\varphi. \tag{20}$$

由(15)和(18)式得

$$\delta\nu_0 = \frac{H}{\Delta\omega}[\sin(\Delta\omega t+\theta) - \sin\theta], \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\delta\nu_1 = -\frac{cDH}{\nu_s^3\Delta\omega^3}\Big[&1-\cos\Delta\omega t + \Delta\omega t\sin\theta\cos(\Delta\omega t+\theta)\\ &-\frac{1}{4}(\cos 2\theta - \cos 2(\Delta\omega t+\theta))\Big],\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\delta\nu_2 = (-1)^2\frac{c^2D^2H}{\nu_s^6\Delta\omega^5}\Big[&\Delta\omega t\cos(\Delta\omega t+\theta)\left(\frac{1}{4}\cos 2\theta - 1\right)\\ &-\frac{1}{2}\Delta\omega t\cos\theta + \frac{1}{4}(\Delta\omega t)^2\sin\theta - \frac{1}{2}\Delta\omega t\sin\theta\sin 2(\Delta\omega t+\theta)\\ &+1\frac{1}{16}(\sin(\Delta\omega t+\theta) - \sin\theta) + \frac{3}{8}(\sin 2(\Delta\omega t+\theta) - \sin 2\theta)\\ &-\frac{1}{8}(\sin(2\Delta\omega t+3\theta) - \sin 3\theta) - \frac{1}{48}(\sin 3(\Delta\omega t+\theta) - \sin 3\theta)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}\cos\theta(\cos 2\theta-\cos 2(\Delta\omega t+\theta))$$

$$-\frac{5}{8}\sin 2\theta(\cos\theta-\cos(\Delta\omega t+\theta))$$

$$-\frac{1}{4}\cos 2\theta(\sin(\Delta\omega t+\theta)-\sin\theta)\Big], \tag{23}$$

$$\delta\nu_3=(-1)^3\frac{c^3D^3H}{\nu_s^9\Delta\omega^7}\Big[-\frac{1}{12}(\Delta\omega t)^3\sin\theta\cos(\Delta\omega t+\theta)$$

$$+\frac{1}{4}(\Delta\omega t)^2\Big(\cos\Delta\omega t-1-\frac{1}{4}\cos 2\theta\Big)$$

$$+1\frac{11}{16}\Delta\omega t\sin\theta\cos(\Delta\omega t+\theta)-\frac{1}{2}\Delta\omega t\cos\theta\sin(\Delta\omega t+\theta)$$

$$+\frac{5}{16}\Delta\omega t\sin 2\theta+\frac{1}{4}\Delta\omega t\sin 2(\Delta\omega t+\theta)$$

$$-\frac{3}{8}\Delta\omega t\sin 2\theta\cos(\Delta\omega t+\theta)-\frac{1}{24}\Delta\omega t\sin\theta\cos 3(\Delta\omega t+\theta)$$

$$-\frac{1}{4}\Delta\omega t\sin\theta\cos 2\theta\cos(\Delta\omega t+\theta)$$

$$+\frac{5}{8}\Delta\omega t\sin 2\theta\cos\theta\cos(\Delta\omega t+\theta)+\frac{1}{16}\Delta\omega t\cos 2\theta\sin 2(\Delta\omega t+\theta)$$

$$-\frac{7}{48}\Delta\omega t\sin 3\theta\cos(\Delta\omega t+\theta)-1\frac{13}{16}\sin\theta(\sin(\Delta\omega t+\theta)-\sin\theta)$$

$$+1\frac{1}{16}\cos\theta(\cos\theta-\cos(\Delta\omega t+\theta))$$

$$-\frac{3}{8}\sin 2\theta(\sin(\Delta\omega t+\theta)-\sin\theta)$$

$$+\frac{3}{16}\cos 2\theta(\cos\theta-\cos(\Delta\omega t+\theta))$$

$$+\frac{5}{32}\sin 2\theta(\sin 2(\Delta\omega t+\theta)-\sin 2\theta)$$

$$+\frac{1}{18}\sin\theta(\sin 3(\Delta\omega t+\theta)-\sin 3\theta)$$

$$+\frac{7}{48}\sin 3\theta(\sin(\Delta\omega t+\theta)-\sin\theta)$$

$$-\frac{5}{72}\cos 3\theta(\cos\theta-\cos(\Delta\omega t+\theta))-\frac{185}{288}(\cos 2\theta-\cos 2(\Delta\omega t+\theta))$$

$$-\frac{1}{32}(\cos 2\theta-\cos(\Delta\omega t+2\theta))-\frac{1}{6}(\cos 3\theta-\cos 3(\Delta\omega t+\theta))$$

$$+\frac{1}{1152}(\cos 4\theta-\cos 4(\Delta\omega t+\theta))$$

$$+\frac{1}{96}(\cos 4\theta-\cos(3\Delta\omega t+4\theta))\Big]. \tag{24}$$

由于 $\delta\nu_i$ 变量随 i 的增大其系数的数量级迅速变小，可以预见当 $i \geqslant 4$ 时 $\delta\nu_i$ 变量很小且完全可以忽略不计。由(20)式得

$$\langle\delta\nu_0\rangle_\varphi = \langle\delta\nu_2\rangle_\varphi = 0, \tag{25}$$

$$\langle\delta\nu_1\rangle_\varphi = -\frac{cDH}{\nu_s^3\Delta\omega^3}\left[1 - \cos\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta\omega t\sin\Delta\omega t\right], \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\langle\delta\nu_3\rangle_\varphi = -\frac{c^3D^3H}{\nu_s^9\Delta\omega^7}\Big[&1\frac{23}{64} - 1\frac{7}{16}\cos\Delta\omega t + \frac{5}{64}\cos 2\Delta\omega t \\ &- 1\frac{5}{16}\Delta\omega t\sin\Delta\omega t - \frac{1}{32}\Delta\omega t\sin 2\Delta\omega t \\ &+ \frac{1}{4}(\Delta\omega t)^2(\cos\Delta\omega t - 1) + \frac{1}{24}(\Delta\omega t)^3\sin\Delta\omega t\Big],\end{aligned} \tag{27}$$

则自由电子激光增益 $G(t) = G_1(t) + G_2(t)$，其中

$$G_1 = g_1F_1(t) = \frac{g_0cDH}{\nu_s^3\Delta\omega^3}\left[1 - \cos\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta\omega t\sin\Delta\omega t\right], \tag{28}$$

$$\begin{aligned}G_2 = g_2F_2(t) = \frac{g_0c^3D^3H}{\nu_s^9\Delta\omega^7}\Big[&1\frac{23}{64} - 1\frac{7}{16}\cos\Delta\omega t + \frac{5}{64}\cos 2\Delta\omega t \\ &- 1\frac{5}{16}\Delta\omega t\sin\Delta\omega t - \frac{1}{32}\Delta\omega t\sin 2\Delta\omega t \\ &+ \frac{1}{4}(\Delta\omega t)^2(\cos\Delta\omega t - 1) + \frac{1}{24}(\Delta\omega t)^3\sin\Delta\omega t\Big],\end{aligned} \tag{29}$$

式中 $g_0 = 4\pi m_0c^2\rho_e/E_0^2$。由于 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 是两个基本反向增长率函数（见图 1 和图 2），在 0—2π 范围内，这两个函数峰值的绝对值差别不大，但 $\Delta\omega t > 2\pi$ 时，它们的峰值之间有较大数量级差，且随 t 的增大，两者数量级差越来越大。由于系数 g_1 比 g_2 的数量级高得多，所以在 0—2π 范围内 $F_2(t)$ 的影响不大，$G(t)$ 曲线基本上接近于 $G_1(t)$。但随 t 增大，$F_2(t)$ 负增长率的影响使 $G(t)$ 远离 $G_1(t)$（见图 1）。且不难看出，增益 G 的局部正峰值随 t 的增大逐步下降，以至到某一时刻完全消失，这说明到达某个时刻，激光增益趋于饱和，实验中通常称为激光输出饱和现象。

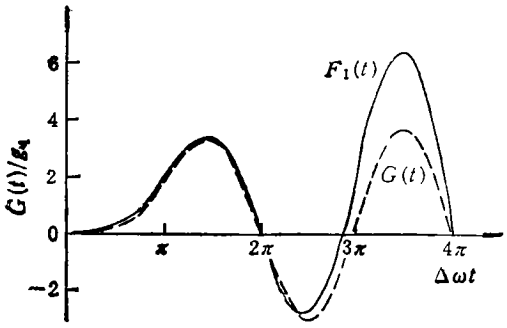

图 1 $F_1(t)$ 曲线及当参量 $\lambda_0 = 2.4\text{mm}$，$\lambda_r = 8\text{mm}$，$\nu_s = 3$，$B_0 = 0.2\text{T}$，$E_r = B_0c/100$，$\Delta\omega = 10^7$ 情况下增益 $G(t)$ 曲线

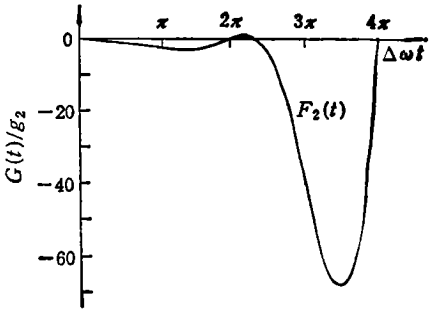

图 2 $F_2(t)$ 曲线

5 结　　语

本文在考虑电子与波多次相互作用过程情况下，导出了自由电子激光增益表达式，结果表明增益函数 $G(t)$ 是由正增长率函数 $G_1(t)$ 和负增长率函数 $G_2(t)$ 两部分组成，在 $0—2\pi$ 范围内，增益 $G(t)$ 一般与 $G_1(t)$ 接近。分析表明，其增益表达式要比已有的结果更符合于自由电子激光器实验情况，它不仅可较好地说明自由电子激光相干辐射，而且完全可以说明实验中激光输出饱和现象。尤其更为重要的是从分析的结果中可进一步引出自由电子激光中电子与辐射波相互作用有效长度的理论解析结果。有关问题将另文讨论。

[1] L. R. Elias *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 717.
[2] R. H. Rantell *et al.*, *IEEE J. Quan. Elec.*, **QE-4**(1968), 905.
[3] J. M. J. Madey, *J. Phys.*, **42**(1971), 1906.
[4] V. P. Sukhatme and P. W. Wolff, *J. Appl. Phys.*, **44**(1973), 2331.
[5] F. A. Hopf *et al.*, *Opt. Comm.*, **18**(1976), 413.
[6] G. Mayer, Opt. Comm., **20**(1977), 200.
[7] W. B. Colson, *Phys. Quan. Elec.*, **5**(1978), 157.
[8] T. Kwan and J. M. Dawson, *Phys. Fluids*, **22**(1979), 1089.
[9] I. B. Bernstein and L. Friedland, *Phys. Rev.*, **A23**(1981), 816.
[10] G. G. Shih and A. Yariv, *Phys. Rev.*, **A22**(1980), 2716.
[11] P. Sprengle and R. A. Smith, *Phys. Rev.*, **A21**(1980), 239.
[12] H. P. Freund *et al.*, *Phys. Rev.*, **A24**(1982), 2004.
[13] 雷仕湛、赵东焕，中国激光，**19**(1992)，81.
[14] 陈建文等，中国激光，**13**(1986)，385.
[15] 雷仕湛、陈建文、赵东焕，中国激光，**10**(1983)，257.

INTERACTIONS BETWEEN ELECTRONS WITH WAVES IN THE FEL AND ITS GAIN ANALYSIS

ZHAO DONG-HUAN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

(Received 4 October 1993)

ABSTRACT

The interaction process between electrons with electromagnetic waves in the free electron laser (FEL) is analysed and the corresponding gain expression is derived. The result shows that it not only reflects the coherent emittance of FEL, but also expounds the property with output saturation of lasers. The result of analysis is close to the experiment condition of FEL.

PACC: 4255T; 7820J